BÉLYÁCZ IVÁN

BEFEKTETÉS-ELMÉLET

UNIVERSITAS QUINQUEECCLESIENSIS 1367

PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEM

2001

BÉLYÁCZ IVÁN

BEFEKTETÉS-ELMÉLET

BÉLYÁCZ IVÁN

BEFEKTETÉS-ELMÉLET

PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEM KIADÓ

2001.

OKTATÁSI MINISZTÉRIUM

A könyv az Oktatási Minisztérium támogatásával, a Felsőoktatási Pályázatok Irodája által lebonyolított felsőoktatási tankönyvtámogatási program keretében jelent meg.

A szerző 1997-2000 között Széchenyi Professzori Ösztöndíjban részesült, s a kötet ezen időszak kutatómunkájának eredménye.

Szerző: Bélyácz Iván egyetemi tanár

Lektorálta: Barta Imre egyetemi tanár

Carbocomp Kft., Nyomda – Pécs

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS

A szerző az elmúlt évtizedben több olyan tankönyvet írt, amely részletesen tárgyalja a vállalati befektetések alapvető elméleti problémáit és gyakorlati kérdéseit. Az először 1991-ben megjelent „Vállalati tőkefinanszírozás" című munka az egyik első hazai tananyagként, a finanszírozási döntések alapjait tárgyalja. Az 1995-ben közreadott „Tőke-beruházási és finanszírozási döntések" című könyv a beruházási és finanszírozási döntések kettősségére épül, és több tekintetben mélyíti a vállalati finanszírozás alapismereteit. Az 1998-ban publikált „Tőkefinanszírozási számítások" című anyag a döntések megalapozásának módszertani implikációit mutatja be, hasonlóan a Katits Etelkával közösen írt „Tőkefinanszírozási példatár" címen, 1999-ben megjelent műhöz.

Az elmúlt évtizedben folyt oktatás tapasztalatai alapján érlelődött az igény olyan átfogó munka megírására, amely áttekinti a befektetés-elmélet valamennyi lényeges területét. A szerző abból a megfontolásból indult ki, hogy a befektetési és finanszírozási elmélet történeti fejlődése lehet az az alap, amire az ilyen elméleti mű felépíthető. Az elmúlt évszázad a befektetési elmélet látványos fejlődését hozta. A XX. század elején fogalmazódik meg a finanszírozás mindmáig fundamentumként tekintett építőköve, a nettó jelenérték, s a század végén válnak a beruházási döntéshozatal mindennapi eszközeivé a reálopciók. A két elméleti vívmány megjelenése közötti időben definiálják a kockázat és bizonytalanság döntésbeli szerepét, megfogalmazzák a hasznossági elmélet alaptételeit, megalapozzák a kockázat és megtérülés kölcsönkapcsolatán alapuló portfolió elméletet. A szóban forgó időszakban válik elméleti igényű vizsgálódás tárgyává a vállalati tőkestruktúra, kifejlődik a tőkepiaci értékelés egyensúlyi elmélete, s a származékos eszközök a befektetési elmélet csúcsát jelentik.

E mű nem a teljesség igényével íródott, inkább csak a fő elméleti fejlődési vonulat bemutatásának szándékával. A befektetési elmélet fejlődése a döntések egyre árnyaltabbá tételét garantálta. A teljes bizonyosságon alapuló mérlegelést így válthatta fel a bizonytalanság figyelembe vétele, s a döntések így jutottak el az egyensúlyi feltevések kizárólagosságától a befektetések nem egyensúlyi állapotának döntésbeli elfogadásáig. A befektetési elmélet építőkövei egyben fejlődési csomópontok is.

E könyv mondanivalója a nettó jelenérték, a kockázat, a hasznosság, a portfolió, a tőkestruktúra és az opciók tőkepiaci megjelenésének történetén nyugszik. A munka a döntések finomodásának útját és feltételeit rögzíti, megmutatva annak elméleti hátterét.

A könyvben foglalt mondanivaló a beruházási és finanszírozási ismereteket szakképzés keretében és posztgraduális formában elsajátító hallgatók számára nyújthat segítséget. Ezen túlmenően, minden érdeklődő számára megkönnyíti a befektetési döntések elméleti alapjainak megértését.

1. A BEFEKTETÉSI ELMÉLET FEJLŐDÉSE

A könyv áttekintést ad a vállalati befektetés modern elméletének fejlődéséről. A vállalati befektetési és finanszírozási elmélet az 50-es évek elejéig csaknem teljesen leíró jellegű, azaz normatív orientációjú volt, s jobbára ad hoc megközelítést tükröző tételekből állt. Akkoriban a legtöbb figyelmet az optimális beruházási-finanszírozási- és osztalékpolitika kapta, ugyanakkor háttérben maradt eme célok egyéni ösztönzésre gyakorolt hatása, illetve a finanszírozási piacok egyensúlyának több jellemzője.

A vállalati befektetési elmélet fejletlen állapota hátrányosan befolyásolta a finanszírozási piacok elméletét is, egészen az 50-es évek végéig. A portfolió-elméletet még nem dolgozták ki, az értékelést és a pénzpiacok egyensúlyának egyéb következményeit nagyrészt mellőzték. Az 50-es években viszont alapvető változás kezdődött az elméleti fejlődésben. A közgazdaságtanban hagyományosan használt elemzési módszereket és technikákat alkalmazták a finanszírozási problémákra, és ennek eredménye lett a jelentős átalakulás. Ezt a fejlődést kísérte a kérdésfeltevés módosulása is. A „milyennek kell lennie a beruházási-, finanszírozási- és osztalékpolitikának?" típusú *normatív* kérdések helyébe a „mi az alternatív beruházási-, finanszírozási-, vagy osztalékpolitika hatása a vállalat értékére?" jellegű *pozitív* elméleti kérdések léptek.

A döntéshozatal logikai struktúrájának következménye, hogy valószínűleg jobb válaszokat adnak a normatív kérdésekre akkor, ha a döntéshozó olyan pozitív elméletekre támaszkodik, amelyek a választás következményeinek jobb megértését szolgálják. Ezt a fontos összefüggést a normatív és pozitív elméletek között gyakran nem ismerik fel. Céltudatos döntések nem hozhatók a pozitív elméletek explicit vagy implicit alkalmazása nélkül. Az egyén nem tudja milyen akcióba kezdjen, és nem várhatja célja teljesülését, ha nincs elképzelése arról, hogy az alternatív akciók miként befolyásolják a kívánt eredményt, s ez az, amihez eszközt jelent a pozitív elmélet. Például az alternatív finanszírozási struktúrák közötti választáshoz a menedzser tudni akarja, hogy azok hogyan befolyásolják a várható nettó pénzáramot, annak kockázatát és ezáltal hogyan hatnak a vállalat értékére. Helytelen kiinduláson alapuló pozitív elméletek alkalmazása olyan döntésekhez vezet, melyeknek nem várt és nem kívánt eredményei vannak.

A befektetési elmélet az 50-es évek óta eltelt (és a megelőző) fejlődés alapján a következő építőkövekre alapozódik:

- A pénz időértékén alapuló nettó jelenérték (NPV) koncepció
- A kockázat és megtérülés közötti átváltási kapcsolat
- A hatékony tőkepiacok elmélete
- Az ügynökelmélet
- A portfolió elmélet

- A tőkepiaci értékelési elmélet
- A tőkestruktúra és az osztalék irrelevancia tétele
- Opció-értékelési elmélet

A továbbiakban nézzük meg az alkotóelemek rövid tartalmát és szerepét a befektetési elmélet fejlődésében!

1.1. A nettó jelenérték (NPV)

Ha egy jövőbeni pénzáram értékét szeretnénk megtudni, akkor a tőkepiacon uralkodó árakat vesszük figyelembe annak feltételezésével, hogy ott a jövőbeli pénzáramokra vonatkozó követelésekkel kereskednek. Amenynyiben sikerül pénzáramot vásárolnunk részvényeseink számára alacsonyabb áron, mint amennyit a tőkepiacon azért fizetnünk kellett volna, ekkor emeljük befektetésük értékét. Ez a nettó jelenérték (NPV) fogalma mögött meghúzódó tartalom. Amikor egy beruházás NPV értékét kiszámítjuk, akkor feltesszük a kérdést, hogy vajon a beruházás többet ér-e, mint amennyibe kerül. Annak alapján becsüljük meg az értéket, hogy kiszámoljuk: mennyit érnek az általa képviselt pénzáramok, ha azokra vonatkozó igényt felajánlanánk a befektetőknek, s az megjelenne a tőkepiaci kereskedésben. Ezért számítjuk az NPV értéket oly módon, hogy a jövőbeni pénzáramokat diszkontáljuk a tőke haszonáldozati költségével, azaz a beruházással azonos kockázatú értékpapírok várható hozamával. *Hatékonyan működő tőkepiacon az egyenlő kockázatú tőkejavak árát úgy állapítják meg, hogy azok várható hozama egyforma legyen.* A tőke haszonáldozati költségével történő diszkontálás során azt az árat számítjuk ki, amely mellett a beruházást végző befektetők várhatóan erre a hozamra számíthatnak. Az NPV szabály részvényesek ezrei számára lehetővé teszi a részvételt ugyanazon vállalkozásban, noha anyagi hátterük és kockázati viszonyulásuk nagy mértékben eltérhet. A részvényesek egyetlen utasítást adnak a tőkeműködtetőknek: maximalizálják a nettó jelenértéket.

1.2. A kockázat és megtérülés átváltási kapcsolata

A tőkepiaci értékelés egyensúlyi modelljében az a vonzó, hogy kezelhető gondolkodásmódot ad a kockázatos befektetés megkövetelt megtérülésének becsléséhez. A befektetési döntésekhez kétféle kockázat kapcsolódik: az egyik, amely a befektetések változatossá tételével (diverzifikációval) elhárítható, a másik, amely nem kiküszöbölhető. A döntéshozók csak azzal a kockázattal törődnek, amitől nem tudnak megszabadulni, azaz a nem diverzifikálhatóval. Megmérhetjük egy befektetés nem diverzifikálható, avagy piaci kockázatát, ha megvizsgáljuk, hogy a befektetés értéke milyen mértékben érintett egy – a gazdaságban szereplő összes vagyonelem értékében bekövetkezett változás során. E mutatót nevezzük a befektetés *béta* értékének. Egy eszköz megkövetelt hozama annak bétájával együtt növekszik. Gondot okozhat a tőkepiaci értékelés egyensúlyi modelljének néhány megszorító feltételezése, az alapelgondolás azonban tartósnak bizonyulhat. A befektetők általában kockázat-kerülők, s a kockázat ellensúlyozására magasabb megtérülést követelnek meg. Kockázaton általában annak nem diverzifikálható részét értik.

1.3. A hatékony tőkepiacok elmélete

Az alapvető elképzelés szerint az értékpapírok ára pontosan tükrözi a rendelkezésre álló információkat, s újabbak megjelenésekor, amilyen gyorsan csak lehet – reagál. A hatékony tőkepiac-teória három értelmezésével találkozhatunk attól függően, hogy miként értelmezik a „rendelkezésre álló információt". A hatékony tőkepiac *gyenge* változata (a véletlen bolyongás elmélete) szerint az értékpapír árak a korábbiakban már ismert, mindennemű információt tükröznek, a *középerős* változatban az árakban minden – nyilvánosan fellelhető – információ tükröződik, míg az *erős* változat értelmezésében az árak minden megszerezhető információt tartalmaznak. A hatékony tőkepiac elméletét nem szabad félreérteni. E teória azt mondja, hogy *a tőkepiacon kemény verseny van, befektetés és kockázatvállalás nélkül nem lehet hozamhoz jutni, s az értékpapír-árak híven tükrözik a tőkejavak valós értékét, a befektetők rendelkezésére álló lehető legjobb információkra alapozva.*

1.4. Az ügynökelmélet

A modern üzleti társaság olyan aktorok erőfeszítésének eredménye, amiben benne van a menedzserek, az alkalmazottak, a részvényesek és/vagy a kölcsöntőke-juttatók hozzájárulása. E szereplőket formális és informális szerződés kapcsolja össze, a köztük levő egyetértés biztosítása érdekében. A közgazdászok hosszú időn keresztül azt hitték, hogy mindegyik résztvevő a közjó érdekében tevékenykedik. Az elmúlt két évtizedben azonban sokat megtudtunk a lehetséges érdekellentétekről és arról, hogy a vállalatok hogyan próbálják leküzdeni azokat. Ezeket az elképzeléseket összefoglaló néven ügynöki elméletként ismerjük. E teória segítségével könynyebben megválaszolhatók az olyan kérdések, mint például: hogyan győzheti meg egy vállalkozó a kockázati tőke befektetőit arról, hogy csatlakozzanak a vállalkozáshoz; mi az oka a kötvény-kibocsátási megállapodásokban állandóan szereplő kitételeknek; vajon az összevonás, tulajdonszerzés vagy a hitelből finanszírozott vállalatvásárlás, egyszerűen a többi résztvevő kirablására tett kísérlet, vagy megváltoztatja a menedzserek ösztönzését a vállalat értékének maximalizálására.

1.5. A portfolió elmélet

Markowitz (1952, 1959) előtt kevés figyelmet fordítottak a portfolió-szelekcióra. Az értékpapír-elemzés az alulértékelt papírok kiválasztására összpontosított: a portfoliót általában csak ezen értékpapírok összességének tekintették. Markowitz kimutatta, hogy ha a kockázat nem kívánatos a beruházó számára, akkor a prognosztizált „nyertesek” egyszerű összessége gyenge portfolió-kiválasztási eljárásnak bizonyul, mivel nem veszi figyelembe a portfolió diverzifikáció kockázatra gyakorolt hatását. Markowitz elemzi a normatív portfolió problémát: hogyan válasszuk ki azokat a portfoliókat, amelyek maximalizálják a beruházók várható hasznosságát olyan feltételek között, ahol a beruházók a várható portfolió megtérülés, valamint a varianciával mért kockázat alapján választanak a portfoliók közül. Markowitz a hatékony portfoliók halmazát olyan kompozícióként definiálta, mint amely adott variancia mellett maximális várható megtérülést, és adott várható megtérülés mellett maximális varianciát szolgáltat. Markowitz várható érték-variancia elemzése megadta a diverzifikáció jelentésének tartalmát, az értékpapírok megtérülési értéke közötti kovariancia portfolió kockázathoz való hozzájárulásának mérőszámát, és a hatékony portfolió alkotásának szabályait. A portfolió elméletből következik, hogy a vállalatnak azonos módon kell értékelnie a projekteket, mint ahogy a beruházók értékelik az értékpapírokat. Például nincs jutalom, vagy büntetés a vállalati diverzifikációhoz kapcsolódóan. Természetesen a diverzifikáció befolyásolhatja az értéket, a várható csődköltségekre és így a nettó pénzáramra gyakorolt hatása révén.

1.6. A tőkepiaci értékelési elmélet

Markowitz normatív elemzését Treynor (1961), Sharpe (1964) és Lintner (1965) alkalmazta a tőkepiaci értékelés determinációjának megalkotására. Markowitz várható érték-variancia portfolió kiválasztási modelljéből következő, rögzített értékpapír keresletnél és állandó eszközkínálatnál modellt állítottak fel egyensúlyi árakra, egyperiódusú időhorizontra, adók feltételezése nélkül.

Jóllehet, a portfolió-megtérülés varianciája a teljes kockázatot méri, Treynor, Sharpe és Lintner kimutatja, hogy az egyedi értékpapír egyensúlyi árát úgy kell meghatározni, hogy az tükrözze a teljes kockázathoz való hozzájárulást, amit megtérülésének az összes eszközből álló piaci portfolió megtérülésével alkotott kovarianciával mérünk. Ezt a kockázati mérőszámot általában „szisztematikus kockázatnak" nevezzük. A tőkepiaci értékelési modell legegyszerűbb formája a következő kifejezéssel azonos a j-edik eszköz $E(Rj)$ egyensúlyi várható megtérülésére $E(Rj)=R_F + [E(R_M) - R_F]\, \beta_j$, ahol R_F a kockázatmentes kamatráta; $E(R_M)$ az összes eszközből álló piaci portfolió várható megtérülése és $COV\,(Rj,R_M)/\sigma_M{}^2$, a j-edik eszköz megtérülése és a piaci portfolió megtérülés közötti kovariancia osztva a piaci portfolió varianciájával, ami a j-edik eszköz szisztematikus kockázatának mérőszáma (βj). Így a tőkepiaci értékelés modellje a vállalati tőke-költségvetési döntések számára definiálja a tőke haszonáldozati költségét. Később megtörtént a modell bővítése és empirikus tesztelése. Roll (1977) például a tőkepiaci értékelési modell empirikus tesztelésének kritikáját adta. A Ross (1976) által ajánlott arbitrázs értékelési modell az értékpapír árak struktúrájának jobb megértéséhez vezethet, s legyőzheti a tőkepiaci értékelési modell korlátjait.

1.7. A tőkestruktúra és osztalék irrelevancia tételek

Modigliani és Miller (1958) irrelevancia megközelítése szerint finanszírozási lépésekkel csak akkor lehet növelni az értéket, ha ezek az akciók a befektetők számára rendelkezésre álló teljes pénzáram nagyságát is növelik. Azok a finanszírozási döntések, amelyek mindössze „újracsomagolják" a jelenleg rendelkezésre álló pénzáramot, nem hoznak létre értéket. A finanszírozási menedzserek gyakran kérdezik, hogy vállalatuknak mennyi kölcsönt kell felvenni. Modigliani és Miller válasza erre az, hogy amenynyiben a kölcsön felvétele nem változtatja meg a cég eszközei által létrehozott teljes pénzáramot, az a cég értékét nem befolyásolja.

Modigliani és Miller (1965) ehhez hasonló érvelést használ annak kimutatásához is, hogy az osztalékpolitika nem befolyásolja a cég értékét, hacsak nem változtatja meg a részvényesek rendelkezésére álló teljes pénzáramot. Az a cég, amely nagyobb osztalékot fizet a részvényeseknek, de egyben újabb részvények kibocsátásával pénzt kap vissza, egyszerűen pénzt rak a részvényesek egyik zsebébe, míg a másikból elveszi ugyanezt.

Ugyanezeket az elgondolásokat végigfuttathatjuk ellenkező irányban is. Mint ahogy a pénzáram felosztása nem hoz létre értéket, úgy a különböző pénzáramok összevonása sem. Ez magában foglalja azt is, hogy nem lehet két vállalat puszta összevonásával emelni az értéket, csak ha az összevonás eredményeként a teljes pénzáram is megnő. Ebből kifolyólag a diverzifikálás céljából létrejövő fúziók semmiféle hasznot nem hajtanak.

1.8. Opció-értékelési elmélet

A mindennapi életben az *opció* szót gyakran használják a választás vagy alternatíva szinonimájaként. A finanszírozásban az opciót kifejezetten a mában meghatározott feltételek melletti, jövőbeni kereskedés lehetőségére használjuk. Az előrelátó döntéshozó jól tudja, hogy gyakran érdemes ma fizetni azért, hogy egy értéket a jövőben vásárolhassunk, vagy eladhassunk. Például a vállalatok szívesen fizetnek olyan beruházásokért, amelyek a jövőben rugalmasságot biztosítanak számukra. Ezen kívül számos értékpapír opciókat kínál a vállalat vagy a befektetők számára. Egy átváltható kötvény tulajdonosa számára adott a részvényre cserélés opciója.

Ma lényegesen nagyobb az opciók szerepe, mint korábban. Ez részben annak köszönhető, hogy a kockázatot egyre inkább opciók segítségével próbálják meg csökkenteni. Az utóbbi idők finanszírozás-elméleti fejlődésének egyik legnagyobb vívmánya volt Black és Scholes opció-értékelési modelljének felfedezése (1973).

2. AZ IDŐPREFERENCIA ÉS A NETTÓ JELENÉRTÉK

A beruházási döntések elméletét először abból a szempontból vizsgáljuk, hogy milyen úton jutunk el a befektető preferenciáitól az optimális beruházási döntésekhez. Ezen belül az időpreferencia elmélete azt vizsgálja, hogy az egyéni befektetők hogyan döntenek jövedelmük elfogyasztásáról, illetve befektetéséről. A döntési elmélet másik ága a bizonytalanság körülményei közötti választásokkal foglalkozik. Kimutathatók a befektető várható hasznosságát maximalizáló döntéshozatal előnyei is.

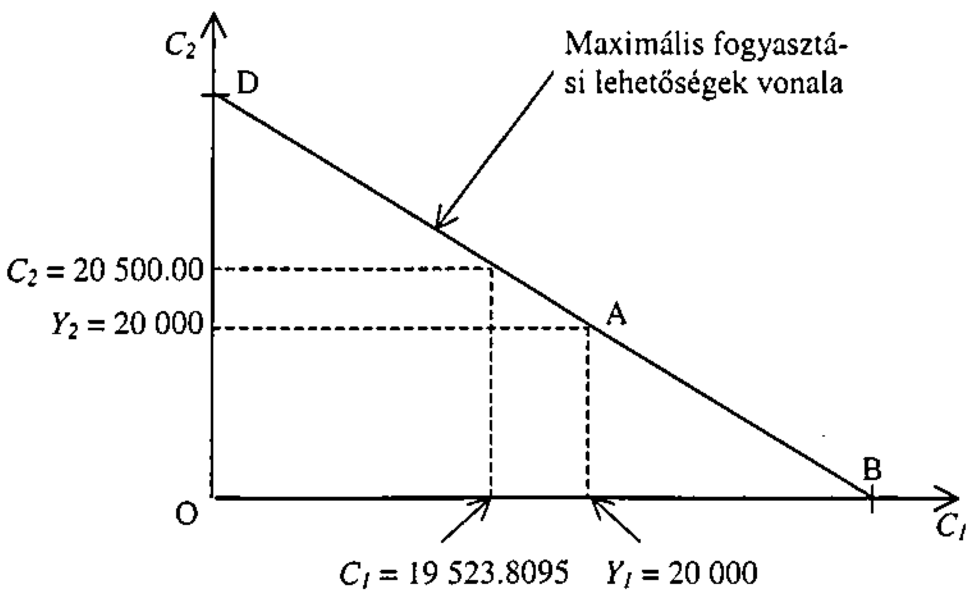
2.1. Kétperiódusú időpreferencia-modell

Az időpreferencia-elmélet megalapozása Irving Fisher nevéhez fűződik[1]. Az ő időpreferencia-modellje annak eldöntését szolgálja, hogy elsősorban ma fogyasszunk, vagy ma azért eszközöljünk beruházást, hogy később

[1] A választás elméletét Irving Fisher három könyve alapozta meg a század elején: The Rate of Interest, New York: MacMillan 1907; The Nature of Capital and Income, New York: MacMillan 1912; The Theory of Interest, New York: MacMillan 1930. További fontos hozzájárulást jelentett Dean, Joel: Capital Budgeting, Columbia University Press, New York 1951, valamint Lutz, Frederich és Vera Lutz: Theory of Investment of the Firm, Princeton University, Princeton 1951 c. műve.

többet fogyaszthassunk. A modell feltételezése szerint az összes lehetséges alternatíva bizonyossággal ismertnek tekinthető. Vizsgáljuk meg Fisher fogyasztási-beruházási döntési modelljét az egyén cselekedetei alapján. A fogyasztó egyén ebben az évben és a következőben is egyaránt 20 000 dollár jövedelemhez jut.

1. ábra A kétperiódusú időpreferencia-modell jövedelem- és fogyasztási lehetőségei



Az ábra *A* pontja illusztrálja a kétperiódusú időpreferencia-modell induló jövedelmének betáplálását. Ez a modell alkalmas annak vizsgálatára, hogy az egyén köteles-e jövedelmének egy részét beruházni a jövő érdekében, vagy inkább kölcsönt vesz fel folyó fogyasztásának meglevő jövedelme feletti finanszírozására. Az egyén megtehetné, hogy elfogyasztja első évi jövedelmének egészét, és így semmit nem takarítana meg. Amennyiben semmit nem takarít meg az első évben, akkor lehetetlen lesz számára többet fogyasztani az akkor esedékes jövedelménél a második évben. Az ábra A pontja azt az alternatívát reprezentálja, amely $Y_1 = 20\,000$ dollár első évi, és $Y_2 = 20\,000$ dollár második évi jövedelem realizálását, s annak a képződés évében történő elfogyasztását jelenti.

2.2. Fogyasztási-beruházási lehetőségek

Amennyiben az egyén a beruházási lehetőségek csupán legegyszerűbb változatát kapja meg, akkor ezáltal fogyasztási-beruházási alternatívák meghatározatlan számú sokaságából választhat. Az egyén úgy is növelheti elkölthető forrásait, hogy elmegy a bankba és $R = 5\%$-os kamat mellett kölcsönt vesz fel $Y_2 = 20\,000$ dolláros második évben esedékes jövedelme terhére.

$$\frac{Y_2}{1+R} = \frac{20\,000}{1+0.05} = \frac{20\,000}{1.05} = 19\,047.61905$$

Kombinálva 2. évi jövedelme, 5%-kal diszkontált, jelenlegi értékét, a 19 047.62 dolláros összeget saját 1. évi $Y_1 = 20\,000$ dolláros jövedelmével, az egyén saját forrásait 39 047.62 dollárra emelheti fel. Ennek részletezése a következők szerint történhet:

19 047.62	2. évi jövedelem jelenértéke = $Y_2/(1+R)$
20 000.00	1. évi Y_1 jövedelem
39 047.62	1. évi maximális fogyasztási lehetőség

Az 1. ábra *B* pontja reprezentálja az egyén ama lehetőségét, hogy kölcsönt vegyen fel 2. évi jövedelme terhére annak érdekében, hogy mindent elfogyaszthasson az 1. évben. Amennyiben az egyén elmegy egészen a *B* pontig, akkor kiteszi magát a 2. évi zéró fogyasztás fájdalmas fenyegetésének. A *B* pont eszerint nyilvánvalóan irracionális fogyasztási lehetőség, mivel a 2. évi teljes lemondás nem kívánatos alternatíva.

A totális kiköltekezéssel szemben az egyén megpróbálhatja az ellenkező végletet, s az első évben azért koplalna, hogy maximalizálhassa beruházási lehetőségeit. Annak érdekében, hogy a maximális összeget beruházhassa, az egyén semmit nem fogyasztana az első évben, azaz $C_1 = 0$ érvényesülne, s így egész első évi jövedelmét 5%-os kamatra bankba tenné.

$$(Y_1)\cdot(1+R)=(20\ 000)\,(1+R)=(20\ 000)\,(1.05)=21\ 000.00$$

Ha az egyén teljes Y_1 összegű 1. évi jövedelmét beruházza, akkor a 2. évben 41 000 dollár áll rendelkezésre fogyasztásra. Ennek részletezése a következő:

21 000	1. évi jövedelem beruházása = $(Y_1)(1+R)$
20 000	2. évi jövedelem = Y_2
41 000	2. évi maximális fogyasztási lehetőség

Ezt a lehetőséget mutatja az ábra *D* pontja. Az egyén 2. évi fogyasztási lehetőségét az alábbiak szerint számíthatjuk ki:

$$(Y_1 - C_1)\,(1+R)+Y_2 = C_2$$
$$(20\ 000 - C_1)(1+r)+20\ 000 = C_2$$
$$41\ 000-(1.05)\,(C_1)=C_2$$

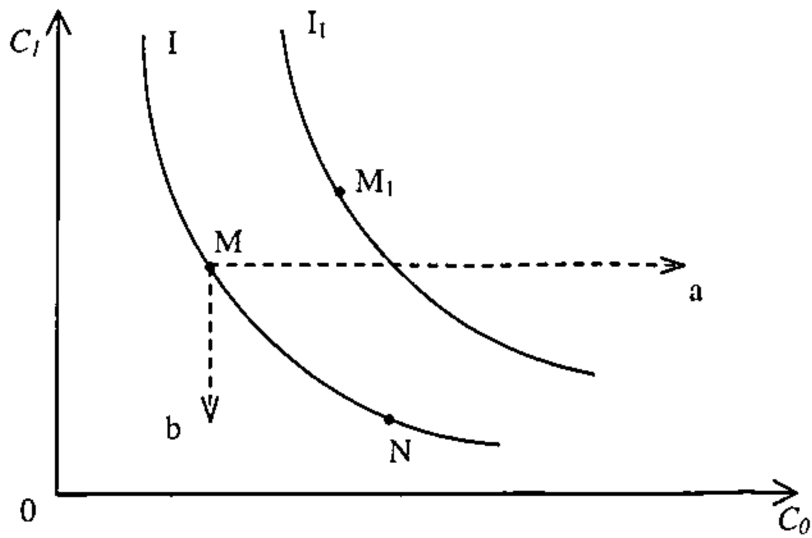
Az utóbbi egyenlet az ábra maximális fogyasztási lehetőség egyeneseként tekinthető, amely a függőleges tengelyt 41 000 dollárnál metszi, s meredeksége: -(1+*R*) = -1.05. *E negatív meredekség azt juttatja kifejezésre, hogy az egyén által az első évben elfogyasztott egységnyi dollár 1.05 dollár egységgel csökkenti a második évi fogyasztási lehetőségeket.* Mivel a fogyasztási lehetöség grafikon folytonos egyenes, így az egyén meghatározatlan számú fogyasztási-beruházási alternatívából választhat e kétperiódusú időpreferencia modellben. Az ilyen típusú fogyasztók döntései a közömbösségi görbék segítségével vizsgálhatók.

2.3. A közömbösségi görbe jelentése[2]

Tekintsünk egy racionálisan gondolkodó egyént, aki a C_0 jelenbeli és C_1 jövőbeli fogyasztás olyan kombinációját választja, amely igényeit maximálisan kielégíti. Az *M* pont egy lehetséges kombinációt mutat a 2. ábrán.

[2] A közömbösségi görbék szerepével részletesen foglalkozik Levy, Haim-Sarnat, Marshall: Capital Investment and Financial Decisions c. müve. Prentice Hall International 1986.

2. ábra *Beruházási és közömbösségi görbék*



Ha az *M* kombinációt *a* irányba haladva alternatív pozícióval helyettesítjük, akkor a pénzáramból származó megelégedettség *növekvő* lesz. Az *a* irányba tartó minden lépés (*Ma* egyenesen) növeli a folyó fogyasztást anélkül, hogy módosítaná a jövőbeli fogyasztást.

Másrészt viszont, bármely lépés *b* irányába nem kívánatos, mivel anélkül csökkenti a jövőbeli fogyasztást, hogy kompenzációt adna a jelenbeli fogyasztásban, s ez az egyén számára nyilvánvaló hátrány.

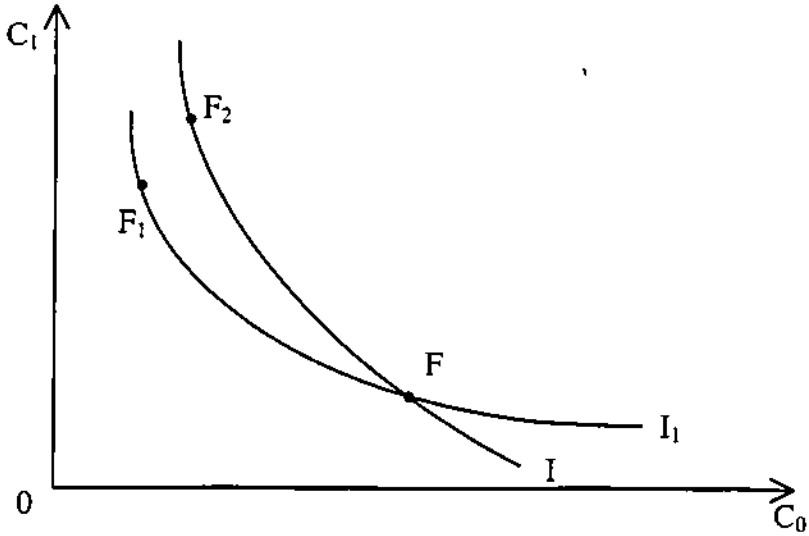
Mivel bármely elmozdulás *b* irányába csökkenti a befektető megelégedettségét, az *a* irányba történő mozgás viszont növeli azt, akkor az *a* és *b* pont között található (például *N*) pont, ahol az egyéni megelégedettség *se nem nő, se nem csökken.*

Amennyiben az N kombinációval helyettesítjük az M pontot, akkor a jelenbeli pénzáram növekszik, a jövőbeli viszont csökken, de ahogy azt feltételeztük, az egyén megelégedettsége változatlan marad, s a C_0 növekedését éppen ellensúlyozza a C_1 csökkenése az egyéni megelégedettség tekintetében. Emiatt az egyén közömbös lesz a tekintetben, hogy az M vagy N ponttal jelzett fogyasztási kombinációt választja. Az M ponttal azonos megelégedettséget biztosító C_0 C_1 kombinációk sorozata található az I görbén. Ha az M_1 pontból indulunk, akkor az eljárás az előzőhöz hasonlóan folytatható, s felrajzolható az I_1 közömbösségi görbe, sőt görbék sorozata, amely leírja az egyén mai fogyasztás-jövőbeli fogyasztás összes ízlésváltozatát. A 2. ábra közömbösségi görbéi balról jobbra csökkenő lefutásúak, ami azt jelenti, hogy a racionális egyént a jövőbeli fogyasztás növelésével kompenzálni kell akkor, ha folyó fogyasztását csökkenti. *A görbe ugyanakkor konvex az origóra, ami azon a feltevésen alapul, hogy a folyó fogyasztás minden pótlólagos csökkenése a jövőbeli fogyasztás növekvő mértékben nagyobb növekményét igényli ahhoz, hogy az egyén közömbös maradhasson a változás iránt.*

A közömbösségi görbe másik jellegzetessége, hogy adott egyén indifferencia-görbéi nem metszhetik egymást. Ezt a 3. ábrával igazoljuk, amelyen az egyén I és I_1 közömbösségi görbéje F pontban metszi egymást.

Mivel az ábrán F és F_1 ugyanazon a közömbösségi görbén (I) van, így az egyén közömbös kell legyen irántuk. Az F_2 és F szintén ugyanazon a görbén (I_1) fekszik, így az egyén e két alternatívával szemben is közömbös.

3. ábra *Egymást metsző közömbösségi görbék*

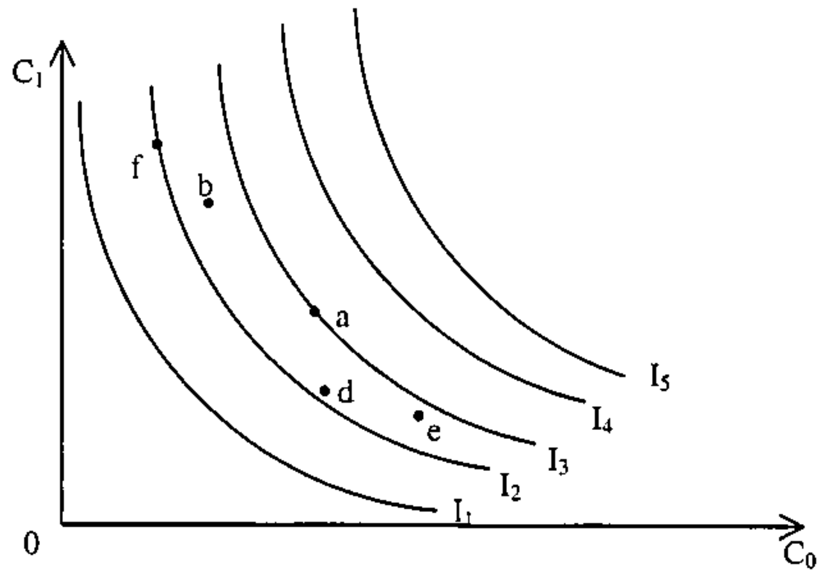


Ebből következően az egyén közömbös kell legyen F_1 és F_2 tekintetében is, holott az ellentmond ama feltevésnek, hogy a beruházó racionális, mivel az F_2 nagyobb pénzáram értéket reprezentál mindkét periódusban.

Az egyén végső döntése a lehetséges pénzáram kombinációk közüli választásban függ saját attitűdjétől: azt a kombinációt választja, amely a legmagasabb közömbösségi görbe elérését engedi; minél magasabb elhelyezkedésű a görbe, annál nagyobb a megelégedettség, vagy hasznosság. A 4. ábra adott egyén *a*, *b*, *d*, *e* és *f* alternatív pénzáram kombinációira fektetett közömbösségi görbe sorozatát mutatja.

Az egyén olyan kombinációt részesítene előnyben, amely lehetővé tenné számára az I_5 indifferencia görbe elérését, habár ilyen kombináció nincs az elérhetők között. (Az I_5 görbe nem is metszi és nem is érinti a lehetséges pontok egyikét sem.) A legjobb, amit az egyén tehet, az az *a* kombináció kiválasztása, amely az I_3 görbén található opció.

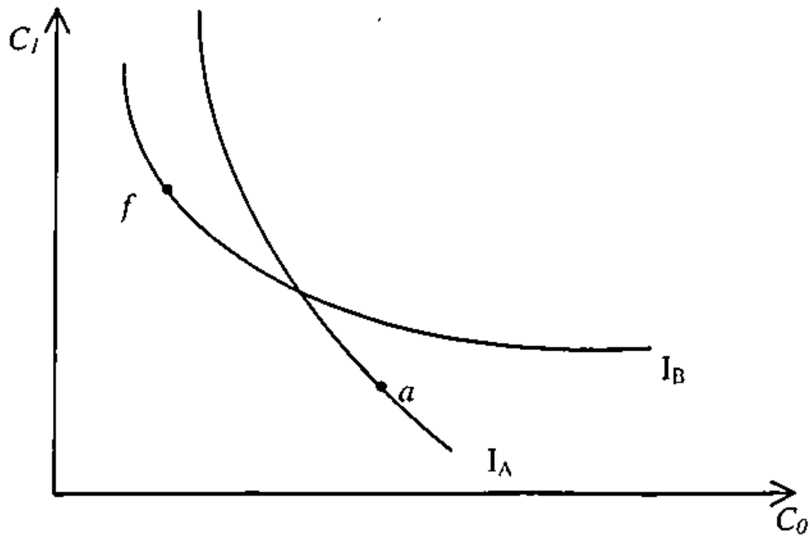
4. ábra *Pénzáramok közömbösségi görbe sorozata*



Mivel nincs olyan másik választás, amely a megelégedettség (hasznosság) magasabb szintjét biztosítaná, így az *a* pont által jelölt pénzáram kombináció tekinthető optimális választásnak. Az egyén választhatna egy másik alternatívát is a lehetőségek halmazából, mondjuk az *f* pontot, ez azonban csak az I_2 görbe elérését tenné lehetővé, ami viszont csökkentené a megelégedettséget, mivel a hasznosság alacsonyabb szintjét reprezentálja.

Vajon következik-e a fentiekből, hogy az egyén sosem preferálhatja az *f* változatot, vagy az *a* változat reprezentálja-e minden egyén számára az optimális választást? Mivel a közömbösségi görbék alakja egyénenként változó, így elképzelhető egy másik egyén, akinek közömbösségi görbe sorozatán (eme másik egyén saját preferenciáit reprezentálva) a legmagasabban fekvő közömbösségi görbe inkább az *f* pontot érinti, mint az *a* változatot. A görbe alakjának függvényében más alternatívák bizonyul-hatnak optimálisnak az egyén számára. Ezt illusztrálja az alábbi ábra, amely két különböző egyén közömbösségi görbéjét mutatja.

5. ábra *Különböző egyének közömbösségi görbéje*



Az egyének közömbösségi görbéinek alakjából látható, hogy az I_A görbével reprezentált egyén az *a* pontot választja, míg a másik az *f* pontot preferálja. Az is jól látható, hogy az I_A közömbösségi görbe meredekebb, mint az I_B. Ez azt jelenti, hogy ha a C_0 folyó fogyasztás egységnyivel csökken, akkor az *A* egyén nagyobb növekményt igényel kompenzációként a C_1 jövőbeli fogyasztásban. Másik oldalról, a *B* egyénre vonatkozóan az alacsonyabb folyó fogyasztás kisebb hátrányt jelent, ezért ez az egyén kisebb növekményt igényel kompenzációként a jövőbeli fogyasztásban, hogy megelégedettsége változatlan szinten maradhasson.

2.4. Az egyéni preferenciák leírása

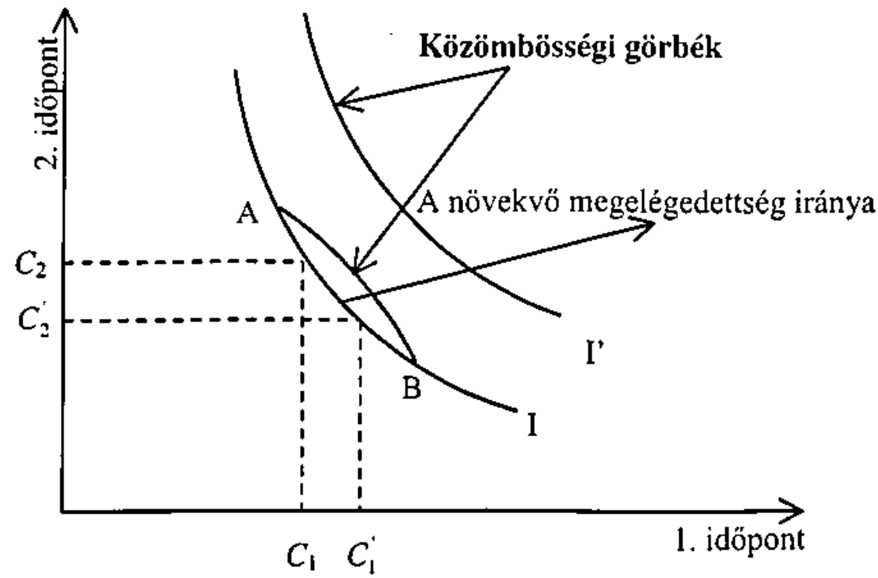
Az egyének preferenciáit a különböző időpontokban elérhető fogyasztási kosarakkal szembeni magatartásuk alapján lehet meghatározni. A különböző cikkek elfogyasztása során nyert megelégedettséget azok piaci értéke foglalja össze, amit fogyasztási kompozíciónak nevezünk. A fogyasztói preferenciákat bemutathatjuk hasznossági függvényekkel is, ha a fogyasztó konzisztens kijelentéseket tud közölni arról, hogy mit részesít előnyben. Ezek tartalma a következők szerint adható meg:

1. A fogyasztó összehasonlíthat egy $(C_1 C_2)$ fogyasztási kompozíciót egy másikkal, mondjuk $(C_1^0 C_2^0)$-vel és megmondja, hogy melyiket választja, ha egyáltalán preferálja valamelyiket.

2. A fogyasztó tranzitív módon végzi az összehasonlításokat, vagyis ha az egyik fogyasztási kompozíciót előnyben részesíti a másodikkal, azt pedig a harmadikkal szemben, akkor nála az első előnyben részesül a harmadikkal szemben.

Mindaddig, amíg a fogyasztói preferencia megfelel az előbbi két feltételnek, a különböző fogyasztási kompozíciókkal szembeni magatartás hasznossági függvénnyel ábrázolható, s nagyobb érték rendelhető a preferált alternatívához, ha fennáll a preferencia. Ugyanez a függvény ugyanakkora értéket rendel az egyformán preferált alternatívákhoz. Tehát *az a fogyasztó, aki megpróbálja elérni a számára legkedvezőbb pozíciót, az a hasznosságot igyekszik maximalizálni.* A hasznossági függvény az alábbi ábrán látható. Ezen közömbösségi görbéknek nevezett réteg vonalakkal ábrázoljuk a hasznossági felület egyenlő magasságú pontjait az 1. és 2. fogyasztási kompozíció által meghatározott síkban.

6. ábra A két időpont fogyasztási kompozíciói és közömbösségi görbéi



A közömbösségi görbék minden pontja egy 1. és 2. időpontbeli fogyasztási kombinációt jelöl, amely ugyanakkora megelégedettséget biztosít, mint ugyanannak a görbének bármely más pontja. Ezt tükrözi az a tény is, hogy mindegyik közömbösségi görbe olyan pontok összessége, amelyekre a hasznossági függvény ugyanazt az értéket veszi fel. A görbék alakjával kapcsolatban két újabb feltételezéssel kell élnünk.

3. Minél nagyobb a fogyasztási kiadás, annál nagyobb a fogyasztói megelégedettség. Ez azt jelenti, hogy a fogyasztói megelégedettség növekedését az ábrán felfelé, jobbfelé, illetve jobbra felfelé történő elmozdulás jelzi.

4. Bármely két egyforma megelégedettséget nyújtó, de különböző fogyasztási kombináció átlaga magasabb szintű megelégedettséget eredményez, mint az átlagot alkotó kombinációk bármelyike.

Ennek a feltételezésnek az a célja, hogy határozottan konvex lefutásúvá tegye a közömbösségi görbéket. A határozott konvexitás azt jelenti, hogy a 6. ábra *A* és *B* pontja közti egyenes, amely az adott pontokkal jelölt fogyasztási kompozíciók feletti átlagot jelöl, az *I* közömbösségi görbén belül fekszik és ezért érinti az *I*-nél magasabban fekvő görbéket. Ez a feltételezés arra szolgál, hogy eloszlasson minden kétséget afelől, hogy a fogyasztó melyik kompozíciót választja, ha szelekciós lehetőségei korlátozottak. *A közömbösségi görbe meredekségét – bármely pontban – a jelenbeli és jövőbeli fogyasztás közötti helyettesítési határrátának nevezzük.* Ez a ráta a fogyasztás ama preferenciáját jelöli, hogy a jelenbeli fogyasztást milyen mértékben cseréli jövőbelire. A két utóbbi feltétel alapján megjegyezhető, hogy *egy adott időszak fogyasztására vonatkozó helyettesítési határráta csökken az időszak fogyasztásának növekedésével. Tehát minél nagyobb a jelenbeli fogyasztás, annál kisebb lesz a fogyasztó hajlandósága további jelenbeli fogyasztásra a jövőbelivel szemben.* Ha például az 1. időszak fogyasztása nő, akkor az ábra közömbösségi görbéi a vízszinteshez közelítenek, egyre laposabbá válnak. Ez azt jelenti, hogy minél magasabb a fogyasztás szintje az 1. időszakban, annál több fogyasztásnak kell felhalmozódni az 1. időszakban a 2. időszak fogyasztásában előálló csökkenés kompenzálására, (ha azt feltételezzük, hogy a fogyasztó ugyanazon a közömbösségi görbén marad).

2.5. A fogyasztás és befektetés problémája

A vállalat úgy szerezhet tőkét, hogy a fogyasztótól vesz kölcsön. Ez utóbbi eldöntheti, hogy adott időszakban mennyit fogyaszt, illetve mennyit ad kölcsön (befektetést eszközölve finanszírozási eszközök vásárlásán keresztül), jövőbeli fogyasztásának finanszírozását megalapozva. Vegyük sorba a fogyasztók finanszírozási döntéseinek alapvető jellemzőit, felhasználva a fogyasztói választás elméleti megfontolását!

1. Minden fogyasztó a bizonyosság világában él, vagyis pontosan ismer minden információt, amely a döntés szempontjából számít mind a jelenben, mind pedig az összes jövőbeni időpontban.

2. Csak két időszaknak van jelentősége, a jelenleginek és az utána következőnek, melyek közül az utóbbiban érvényesülnek számos jövőbeli időszakon keresztül megmaradó hatások.

3. A tőkepiacon sok szereplő van, s egyik sem elég erős ahhoz, hogy az árakat illetve a kamatokat befolyásolja.

4. Minden piaci szereplő ugyanazokkal a biztos információkkal rendelkezik a piaci árakat, valamint a tranzakciók feltételeit illetően.

5. A tőkepiaci tranzakciókat az uralkodó piaci kamatokon kívül más díj nem terheli[3].

[3] Az utolsó három feltétel együttesen a tökéletes tőkepiac feltételeit írja körül.

A tökéletes tőkepiac egyik fontos következménye az, hogy a finanszírozási eszközök mindegyike megegyezik a hitel kockázatában és a hozamként elért kamatban, ha a kamatlábat az eszköz piaci árát alapul véve számítják ki. Bizonyosság esetén csak akkor kölcsönöznek, illetve fektetnek be pénzt, ha tudják, hogy azt a kölcsönt felvevő vissza fogja fizetni, így hitelkockázat egyáltalán nem jelenik meg. Egyetlen tőkefelhasználónak sem kell magasabb kamatot fizetni, mert sok hitelező van és a kölcsönt igénybe vevők ismerik a megkövetelt kamatrátákat. Ebből kifolyólag nincs értelme a piaci kamatrátát meghaladó árat fizetni a kölcsönért. Ugyanígy egyetlen hitelező sem fog a piacinál alacsonyabb kamatráta mellett hitelt nyújtani, mert a piaci kamat mindig elérhető más tranzakciókkal. Az elmondottak egy további következménye, hogy bármiféle – adott jelenértékkel rendelkező – pénzbevétel (illetve kiadás), ugyanolyan vagyoni helyzetet biztosít a tulajdonosnak, mint bármely más, ugyanakkora jelenértékű pénzáram lefutás. *Mivel mindenki ugyanakkora piaci kamatráta mellett ad illetve vesz kölcsön* (ez a kamatráta időről-időre különbözhet), *a finanszírozási tranzakciókat egyszerű mérőszámra redukálhatjuk, s ez pedig a jelenérték.*

2.5.1. A fogyasztási és beruházási döntés megalapozása

A beruházási döntések általában a nettó jelenérték kritériumra alapozódnak: minden olyan projekt elfogadható, amely pozitív NPV értéket ígér. Szükséges elméletileg is indokolni, hogy miért éppen az NPV szabály a megfelelő mind a vállalat, mind annak tulajdonosai számára.[4] Az egyének és a részvénytulajdonosok előtt alapvetően három elhatározás lehetősége áll:

- Fogyasztási döntés: a rendelkezésre álló erőforrások közül mennyit kell azonnal fogyasztásra költeni?
- Beruházási döntés: a meglevő erőforrások közül ma mennyit érdemes a fogyasztás elől elvenni a jövőbeli erőforrás-növekedés reményében, s hogyan kell ilyen döntést hozni?
- Finanszírozási döntés: milyen összegben szükséges kölcsön venni vagy kölcsönt nyújtani ahhoz, hogy e beruházási döntések finanszírozhatók legyenek?

Egyértelműnek látszik, hogy a fenti döntések kölcsönkapcsolatban vannak egymással, s nem szemlélhetők egymástól izoláltan. Az egyének olyan választással szembesülnek, hogy forrásaik mekkora hányadát kell most elfogyasztaniuk, s mekkora részüket kell beruházni a későbbi fogyasztás reményében. E választás átváltást tartalmaz az azonnali és a késleltetett fogyasztás között.

A továbbiakban azt vizsgáljuk közelebbről, hogy miként történik a menedzseri döntéshozatal. Az üzleti működésből származó pénzáram rendszerint két úton hasznosul: egy részét kiosztják a részvényesek között osztalék formájában, másik részét újra befektetik az üzleti működésbe. A tőkeműködtetők legalább évente egyszer döntésre kényszerülnek abban a

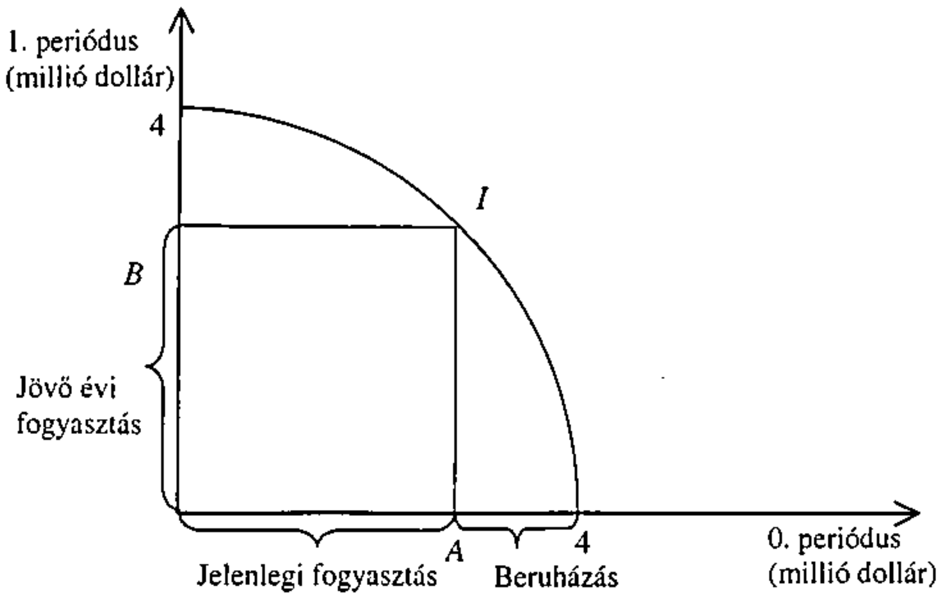
[4] Dean (1956), Loire-Savage (1955), Lutz-Lutz (1951) egyaránt a nettó jelenérték kritériumot ajánlja a befektetések értékeléséhez. A nettó jelenérték szabály arra utasítja a menedzsert, hogy a projekt pénzáramát a piacon alapuló tőkeköltséggel diszkontálja, és fogadjon el minden pozitív diszkontált jelenértékű projektet.

kérdésben, hogy az üzleti hozam mekkora hányada legyen osztalék, illetve mennyit költsenek beruházási célú felszerelésekre. A részvényesek csak akkor lesznek hajlandók a fogyasztás egy részét elhalasztani, ha a jövőben még többet fogyaszthatnak. *A mai fogyasztásról való lemondás hajlandósága a növekvő jövőbeli fogyasztás reményében: a beruházási döntés igazi mozgatója.*

Vegyünk példaként egyetlen tulajdonos birtokában levő új vállalkozást, amelynek egyetlen eszköze van 4 000 000 dollár értékben. A vállalat több ígéretes beruházási elgondolást mérlegel (mindegyik egy év lefutású), de a tulajdonos a befektetés előtt több kérdést is megfogalmaz. Mekkora megtérülés érhető el a tőke befektetésével, ha az invesztíció részben vagy egészben a tőkepiacra irányul? Mennyit kell az üzleti tőkébe befektetni? Mekkora a vállalkozás nettó jelenértéke? Mielőtt megválaszoljuk e kérdéseket szükség van az NPV szabály elméleti alapjainak tisztázására.

A 7. ábra a vállalat beruházási lehetőség görbéjét mutatja, ami a vállalat számára rendelkezésre álló tőkeprojekteket illusztrálja, sorba rendezve azokat a profitabilitás szerint. Az egyik extrém döntés lehetőséget ad a vállalatnak a 4 000 000 dollár osztalékként történő mai kifizetésére, s ezt követően a vállalkozást felszámolják. A másik szélső döntési lehetőség szerint a 4 000 000 dollár egészét egy éves tőkeprojektbe invesztálják annak reményében, hogy a következő időszakban 4 000 000 dollár nyerhető. Hogyan kell beruházási döntéseket végrehajtani a megfogalmazott alapfeltevések mellett? Úgy, hogy kritériumot határozunk meg a mai és a jövőbeli pénz közötti viszonyra vonatkozóan.

7. ábra *Beruházási lehetőségek görbéje*



A gazdagság időbeli transzformálására a következők szerint határozhatunk meg átváltási rátát. Tegyük fel, hogy minimálisan 115 dollárt várunk kompenzációként a 100 dollárról történő mai lemondásért. Az így kapott átváltási ráta: $115_{t_0} : 100_{t_1}$. Ez a fogyasztás egy éves késleltetéséért a következők szerint számítható prémiumot igényli:

$$\frac{115}{100} - 1 = 0.15 \text{ vagy } 15\%$$

A mai és a jövőbeli pénz közötti átváltási ráta a jelenlegi fogyasztásról való lemondás szintje függvényében változik. A vállalkozás tulajdonosa hajlandó lenne a potenciális osztalék első 100 dollárját a fogyasztás elől elvenni 15%-os pótlólagos megtérülés fejében, ugyanakkor egy következő 100 dolláros halasztás valamivel többet igényelne kompenzációként

15%-nál. *A gazdagság időbeli transzferálásának – különböző beruházási szintek mellett észlelt – változó átváltási rátáját az időpreferencia marginális rátájának nevezik, s a rátáról ismert, hogy egyénenként változó.* Megfigyelhető, hogy a beruházási lehetőségek vonala az origóra nézve konkáv, s nem egyenes vonal. Ez a görbe-lefutás minden következő beruházási lehetőség *egyre csökkenő marginális hozadékára utal.* A gazdagságának maximalizálására törekvő tulajdonos először a legmagasabb megtérülést ígérő projekteket választja, s halad az egyre kisebb megtérülést ígérők felé. A görbe mentén egy ponton (*I* projekt) azonban megáll. Vajon miért nem vállalkozik a következő beruházás megvalósítására? Az *I* projekt ugyanis olyan marginális beruházás, amely után megvalósításra alkalmatlan projektek vannak, mivel ezek egy dollárnyi beruházása nem nyújtana kielégítő kompenzációt egy további dollárnyi fogyasztásról való lemondással szemben. Az *I* projekt olyan pontot reprezentál, ahol a beruházás marginális megtérülése éppen egyenlő az időpreferencia marginális rátájával.

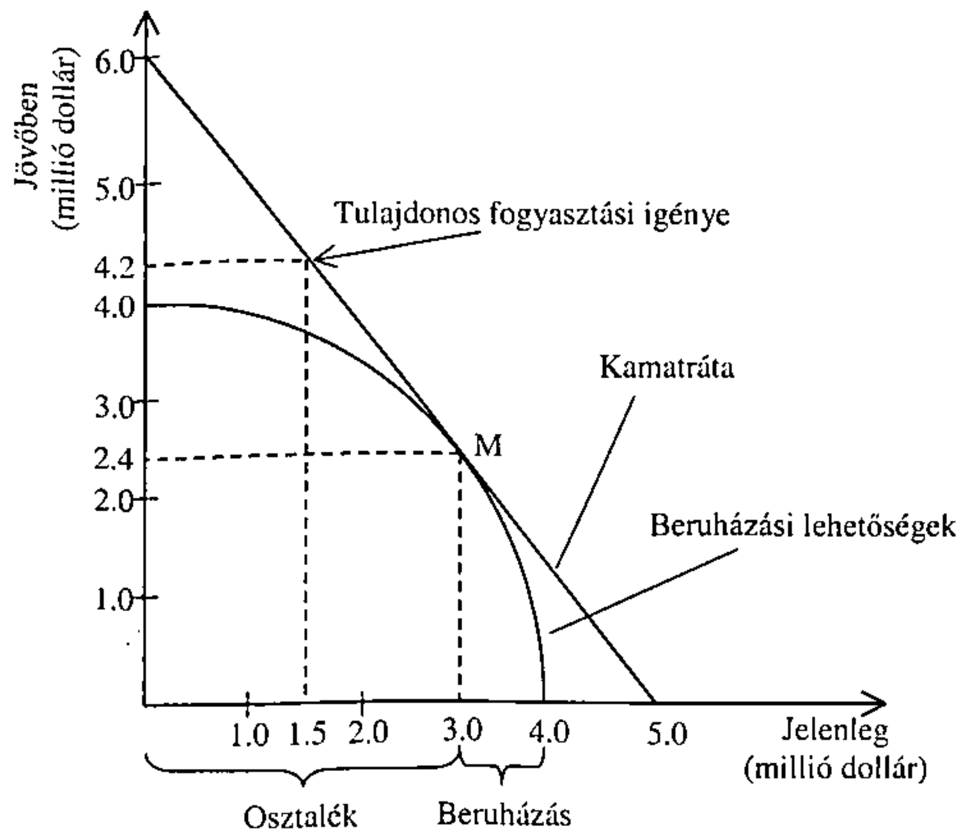
2.5.2. Kölcsönadási és kölcsönvételi lehetőségek

Eddig – nagyon leegyszerűsítő feltevések mellett – a vállalat tulajdonosának fogyasztási és beruházási döntési lehetősége volt. Amennyiben többet költ beruházásra, akkor kevesebbet fogyaszthat jelenleg, és fordítva. Eszerint eddig figyelmen kívül maradt a harmadik lehetséges választás: a finanszírozási döntés. Ha létezik tőkepiac, akkor az egyének és a vállalatok nemcsak tartós és folyó reáleszközöket adhatnak el és vásárolhatnak, hanem finanszírozási eszközöket is. Abban az esetben, ha tökéletes tőkepiac működik (a kölcsönvevő nem befolyásolhatja a kamatlábat; minden piaci résztvevő azonos eséllyel és költségmentesen juthat információhoz; nincsenek tranzakciós költségek és adók), akkor *csak egyetlen piaci kamatráta érvényesül mind a kölcsönvételre, mind a kölcsönadásra.* A tőkepiac létezése a vállalati fogyasztási-beruházási formulától eltérő módon engedi a tulajdonosnak a gazdagság időbeli transzferálását. Ezt mutatja a 8. ábra kamatráta egyenese, amely átváltási rátát reprezentál a jelenbeli és jövőbeli pénzáramok között, tökéletes tőkepiaci viszonyok között. Ennek meredeksége $-(1+R)$, ahol R jelöli az egyperiódusú kamatrátát. Példánkban a kamatráta úgy határozható meg, ha az egyenes bármely pontján egybevetjük egymással a jelenlegi és jövőbeli gazdagságot.

A szélső pólusokon ez a 6 000 000 / 5 000 000 = 1.20 számítással kapható meg, így a kamatráta 20%-os.

A finanszírozási piaci lehetőségek bevezetésével a vállalat megkeresheti a megfelelő beruházási szintet. Befektetéseit egészen az M pontig folytathatja, ahol a kamatráta egyenes éppen érinti a beruházási lehetőségek görbéjét. E pontnál az összes olyan beruházás, amely legalább akkora megtérülést ígér, mint a piaci kamatláb – elfogadható. Minden ilyen beruházásnak pozitív nettó jelenértéke van. Az ábráról látható, hogy a befektetés egészen az M pontig 3 000 000 dollár jelenlegi osztalékot és 1 000 000 dollár beruházást jelentene (4 000 000 – 3 000 000). *Egészen egyszerűen azért nem érdemes tovább beruházni, mert az újabb projektek negatív NPV értéket ígérnének.* Így a vállalatnak célszerűbb 3 000 000 dollárt kivonni, s azt a tőkepiacon befektetni 20%-os ráta mellett.

8. ábra *Beruházási és finanszírozási lehetőségek*



Mekkora lehet ezután az 1 000 000 dolláros beruházási program nettó jelenértéke? Az ábráról leolvasható, hogy a beruházási lehetőség görbe *M* pontjánál az 1 000 000 dolláros beruházási kiadás a következő időszakban 2 400 000 dolláros pénzáramot eredményez. Így a nettó jelenérték 1 000 000 dollár lesz.

$$NPV = \frac{2\ 400\ 000}{1.20} - 1\ 000\ 000 = 2\ 000\ 000 - 1\ 000\ 000 = 1\ 000\ 000$$

Eszerint a vállalat új értéke 5 000 000 dollárra módosul (a 4 000 000 dolláros eredeti érték plusz a beruházás nettó jelenlegi értéke).

Korábban szó volt arról, hogy a vállalat által be nem ruházott 3 000 000 dolláros összeget osztalékként fizethetik ki. Alternatív lehetőség a vállalat számára részben vagy egészben befektetni azt a tőkepiacon addig, amíg a befektetési lehetőségek pozitív nettó jelenértéket kínálnak. Feltételezzük, hogy a tulajdonos csupán 1 500 000 dolláros osztalékot igényel, így 1 500 000 dollár pótlólagosan befektethető a tőkepiacon, s ez a következő periódusban 1 800 000 dollár hasznot eredményez (4 200 000 – 2 400 000 vagy 1 500 000 · 1.20). Eszerint a tulajdonos következő időszaki pénzárama 2 400 000 dolláros tőkeberuházásból és 1 800 000 dolláros finanszírozási befektetésből áll.

2.5.3. A tulajdon és működtetés elválasztása

A vállalatok többségének nagy számú tulajdonosa van, s közülük csak kevesen vesznek részt aktívan az üzlet működtetésében. Az nyilvánvalóan lehetetlen feladatnak tűnik, hogy a tőkeműködtetők a beruházási döntéseket a részvényesek összességének egyéni fogyasztási-beruházási preferenciái alapján hozzák. A tőkepiacok létezése szerencsére szükségtelenné is teszi ezt a kísérletet. A tőkeműködtetők nem kötelesek olyan beruházási projektet kiválasztani, amelynek pénzárama pontosan illeszkedik a részvényesek által preferált fogyasztási kompozícióhoz. *Ellenben a tőkeműködtetők feladata a jelenlegi érték maximalizálása az összes olyan beru-*

házási projekt elfogadásával, amely legalább akkora megtérülést ígér, mint amilyen a piaci kamatráta.

E kritérium alapján maximalizálható a részvényesek folyó gazdagsága, akik azután azt tetszés szerinti fogyasztási kompozícióvá transzferálhatják. *Addig adhatnak kölcsön és vehetnek kölcsön a tőkepiacon, amíg saját marginális időpreferenciájuk azonossá válik a tőkepiaci kamatlábbal. Ezt nevezik szeparációs elméletnek, ami a következő döntési szabályokhoz vezet. A vállalati tőkeműködtetők olyan projektekbe kell hogy beruházzanak, amelyek a tőkepiaci rátával történő diszkontálás mellett pozitív nettó jelenértéket ígérnek.* A részvénytulajdonosok a tőkepiacon kölcsönvehetnek és kölcsönadhatnak, elérve ezáltal a gazdagság olyan időbeli eloszlását, amely megfelel személyes fogyasztási kompozíciós követelményeiknek.

2.5.4. Tőkepiaci tökéletlenségek[5]

A tőkeműködtetőknek ama pontig kell beruházásokat megvalósítani, ahol a beruházás marginális megtérülése megegyezik a tőkepiaci megtérülési rátával. Általában tökéletes tőkepiacot feltételezünk, illetve a kockázat hiányát. Ha e feltevéseket feloldjuk, akkor a nettó jelenérték szabály argumentuma gyengül. Ilyen feltételek között egyetlen tőkepiaci kamatláb helyett kamatráták sorozata érvényesül változásnak kitetten a kölcsönvevő státusza, a kölcsönvett összeg és a beruházás felismert kockázatossága függvényében. A projekt megtérülését egybe kell vetni a tőkepiaci ekvivalens kockázatú beruházás megtérülési rátájával, azaz minél nagyobb a

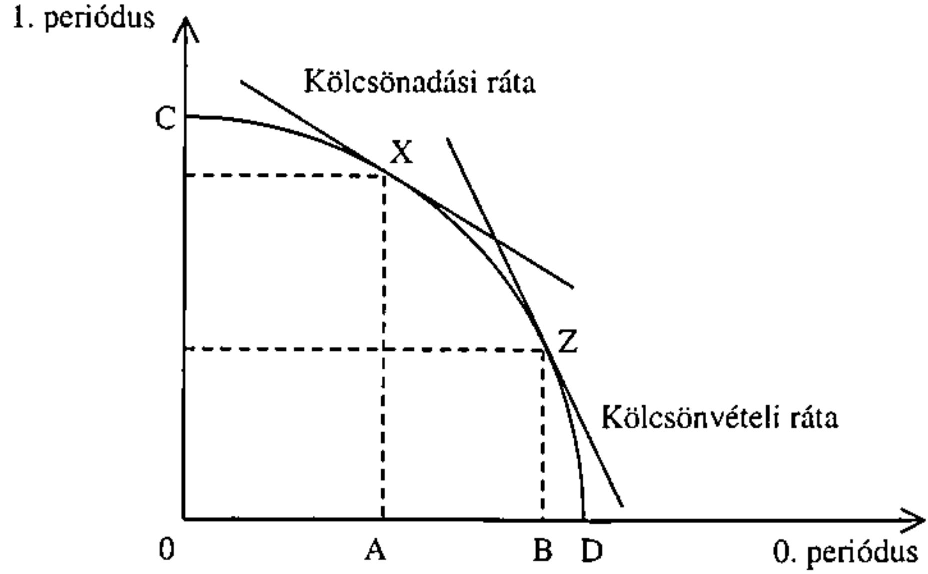
[5] Hirshleifer (1958) kimutatja azt, miként kell Fisher alapelveit alkalmazni a piaci tökéletlenség feltételei között.

beruházás kockázata, annak arányában nagyobb kell legyen a megkövetelt megtérülési ráta. Az egyik legfontosabb tőkepiaci tökéletlenség akkor jelentkezik, ha a kölcsönvételi ráta lényegesen nagyobb a kölcsönadási kamatlábnál. Ebben az esetben a kétperiódusú beruházási modell a 9. ábrára emlékeztető alakot ölt.

A meredekebb vonal reprezentálja a kölcsönvevő kamatrátáját, a kevésbé meredek pedig a kölcsönadási rátát. Az eltérő kamatráták két különböző érintési pontot határoznak meg a *CD* beruházási lehetőség görbén. A potenciális kölcsönvevők nagyobb kamatot fognak fizetni a pénzalapokért, ami arra indítja a vállalatot, hogy a folyó évben csak *BD* összeget ruházzon be, azaz beruházás az *Z* projektig történik. A potenciális kölcsönadók viszont azt várják a vállalattól, hogy alacsonyabb kölcsönadási ráta mellett diszkontáljon, ami nagyobb *AD* beruházáshoz vezet, s ekkor az *X* beruházás lesz a marginális projekt.

A fogyasztási-beruházási döntésekre nem egyszerű megoldást találni akkor, ha piaci tökéletlenségek jelentkeznek. A funkcióikat jól betöltő, versenypiacként működő tőkepiacokon a kölcsönadási és kölcsönvételi ráták között minimális a különbség, ellenben újonnan kialakuló pénz- és tőkepiacokon viszont jelentős különbségek adódhatnak.

9. ábra *Eltérő kölcsönadási és kölcsönvételi ráta*



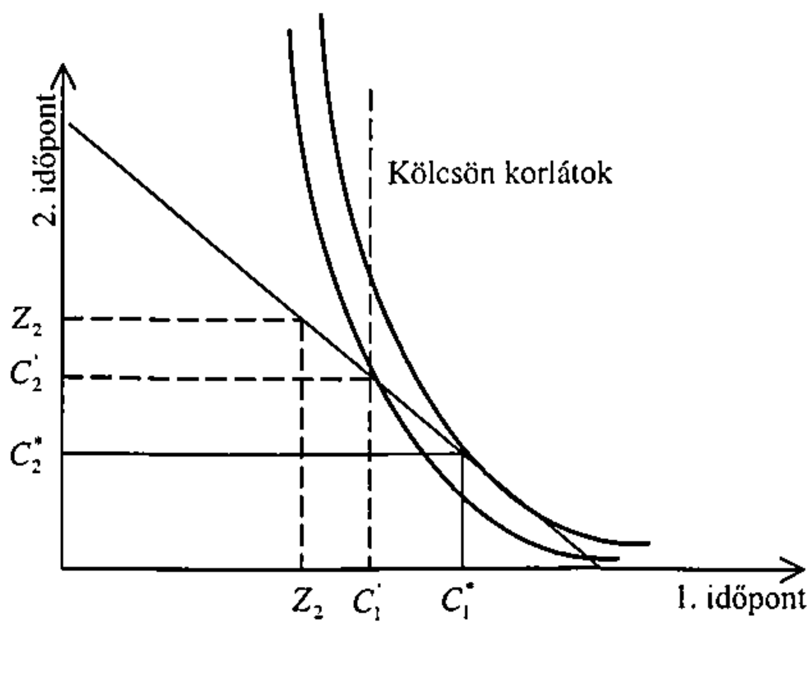
2.5.5. A tőkepiaci tökéletlenségek hatásai

Az előző elemzésben megmutattuk, hogy az egyének a megfelelően működő tőkepiacok környezetében nem veszítenek jólétükből, sőt általában jobb színvonalra kerülnek ama képességükkel, hogy szabadon adnak, illetve vesznek fel kölcsönt a fogyasztási kompozíciók választásakor. Ez az oka annak, hogy a tőkepiaci tökéletlenségeket általában kedvezőtlennek értékelik. Például a brókeri díj – tranzakciós költségként – megakadályozza azt, hogy a részvényár növekedés (tőkenyereség) költség nélkül váljon készpénzzé. Ugyanígy az egyenlőtlen információ megoszlás is megakadályozhatja, hogy bizonyos kölcsön-tranzakciók létrejöjjenek. A piaci tökéletlenségek közül vegyük a kölcsönzés korlátozásának hatásait!

Ilyen beavatkozás esetén megtörténhet, hogy néhány fogyasztó jóléte csökken, amint ezt a 10. ábra mutatja.

Ebben az esetben az egyént kölcsönzési korlát befolyásolja, amely a kölcsön felvételt csak egy meghatározott $C_1^{'} - Z_1$ összegig engedélyezi. Ez az összeg kisebb, mint $C_1^{*} - Z_1$, vagyis az az összeg, amit kölcsön vennének, ha nem lenne korlát. Így a fogyasztó csak a $\left(C_1^{'}C_2^{'}\right)$ fogyasztási kompozíciót szerezheti meg, amely a közömbösségi görbét egy alacsonyabb megelégedettségi szintnél érinti, mint a $\left(C_1^{*}C_2^{*}\right)$ esetében.

10. ábra Az egyén megelégedettségét csökkentő kölcsönzési korlát



2.5.6. A fogyasztás-befektetés választás gyakorlati jelentősége

Az elmondottakból kiderül, hogy az egyén jóléte növekedhet olajozottan működő pénzpiacok létezésekor. Az elmélet anticipációit tükröző gyakorlati tény, hogy sokan folyamatosan befizetnek különféle befektetési alapokba, vagyis a kölcsönadás által az előrejelzett fogyasztási kiadások megfelelőbb időbeli lefutását érhetik el, mint amilyenhez akkor jutnának, ha nem lennének ilyen megtakarítási lehetőségek. A háztartások (egyének) befektetési döntései nagy jelentőséggel bírnak a vállalatok szempontjából, mivel a háztartások a pénztőke elsődleges forrásai. A legtöbb fejlett gazdaságban a háztartások mindent egybevetve nettó hitelezők, ugyanis tőkéjük nagy részét olyan pénzintézetekbe fektetik, mint a biztosító társaságok, nyugdíjalapok, viszont-befektetési alapok. A nevezett intézményekben felhalmozódó tőkét visszaforgatják azáltal, hogy azt újra befektetik vállalati és kormányzati értékpapírokba. A háztartások közvetlenül is vásárolnak e papírokból, így az üzleti életet és a kormányzatot közvetlenül is hitelezik. A háztartások jövőbeli fogyasztásukat kívánják finanszírozni, ezért biztosítják annak a tőkének a forrását, amit a vállalatok saját beruházási tevékenységük finanszírozására fordítanak. A vállalat a tőkéért azt az árat fizeti, amit a háztartások igényelnek ahhoz, hogy jelen fogyasztásukat elhalasszák egy jövőbeli időpontra. Az elmélet fontos ismérvet nyújt a tőkeműködtetőknek: *teljes bizonyosságot feltételező környezet és tökéletes tőkepiac mellett a fogyasztói döntések egyetlen korlátja a vagyon, minél nagyobb ez a vagyon, annál nagyobb a fogyasztó megelégedettsége.* Ennek megfelelően, a legjobb amit a vállalatok tulajdonosaik érdekében tehetnek az, hogy maximalizálják a vállalatokban található tulajdonrészek jelenértékét. A tőkeműködtetők feladata az, hogy a lehető legnagyobb vagyont hozzák létre, és ez az amit a vállalat összes tulajdonosa elvár a tőkeműködtetőktől. Ez utóbbiak úgy hajtják végre vagyonteremtő feladatukat, hogy a megszerzett tőkét a piaci kamatrátánál magasabb hozam mellett újra befektetik.

2.6. Az optimális beruházási döntés[6]

Most már abban a helyzetben vagyunk, hogy kombinálhatjuk a beruházási produktivitási görbét a közömbösségi görbék sorozatával, az egyén vagy vállalat optimális beruházási politikájának meghatározásához. A 11. ábra együtt mutatja a képzeletbeli egyén közömbösségi görbéit a $W_0 d$ beruházási produktivitási grafikonban összegződő beruházási lehetőségekkel[7]. Feltételezzük, hogy az egyén eredeti forrása W_0 összeggel azonos.

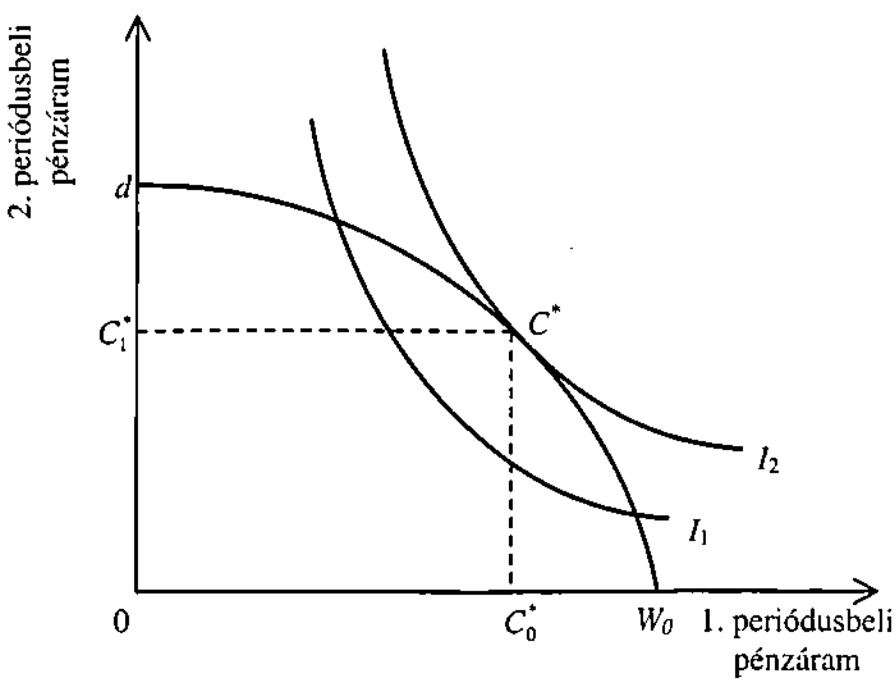
A 11. ábra világosan mutatja, hogy a $(C_0^* C_1^*)$ pénzáram kombináció, amelyet C^* reprezentál, megengedi az egyénnek a legmagasabb fekvésű közömbösségi görbe (I_2) elérését. *Ez a produktivitási és közömbösségi görbe érintési pontjában van. E pontban a beruházás marginális megtérülése éppen egyenlő az időpreferencia marginális rátájával.* A maximális fogyasztási kombináció az egyén számára legkedvezőbb beruházási

[6] Ugyancsak Hirshleifer tett kísérletet – Irving Fisher alapelveire támaszkodva – az optimális beruházási döntési probléma megoldására az isoquant analízis segítségével.

[7] Csak zárójelben jegyezzük meg, hogy két különböző egyén közömbösségi görbéjének metszése nem mond ellent korábbi tételünknek, mely szerint ugyanazon egyén közömbösségi görbéi nem metszhetik egymást.

politikát meghatározza. A C^* pont azáltal érhető el, hogy C_0^* összeget fogyasztanak az 1. periódusban, illetve $W_0 - C_0^*$ összeget beruháznak annak érdekében, hogy a 2. periódusban annyi pénzáram álljon rendelkezésre, ami éppen elégséges a C_1^* fogyasztás finanszírozásához.

11. ábra *Produktivitási és közömbösségi görbe*



2.6.1. A pénzpiaci egyenes

Tekintsünk egy olyan egyént, aki C_0 pénzárammal szembesül az 1. és C_1 pénzárammal a 2. periódusban. A fizetési tételek nettó jelenértéke – az időpreferencia miatt – nem $C_0 + C_1$ lesz, hanem a tagok diszkontált összege.

$$NPV = C_0 + \frac{C_1}{1+k}$$

Ahol k az egyén tőke-haszonáldozati költsége, amely tökéletes piacon, bizonyosság feltételezése mellett a kölcsönvétel és kölcsönnyújtás kockázatmentes rátájaként is tekinthető. Így bármely NPV értékre vonatkozóan (például $NPV = 1$) a C_0 és C_1 meghatározatlanul sok kombinációja található, amely ezt az értéket adja. Ezért a C_1 és C_0 között az alábbi lineáris kapcsolat írható fel:

$$C_1 = NPV_1(1+k) - C_0(1+k)$$

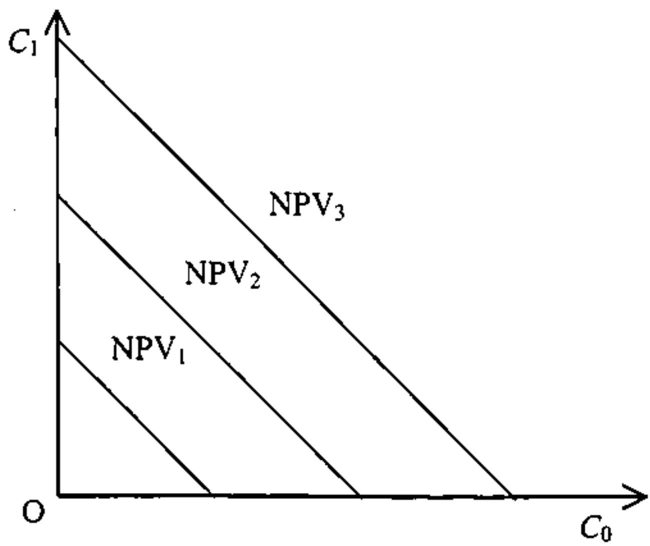
Mivel a k konstans, a piaci egyenes függőleges tengellyel való metszése $NPV_1(1+k)$ konstans, az egyenes meredeksége $-(1+k)$. A $(C_0 C_1)$ pénzáram tételek – egyenesen fekvő – összes kombinációja ugyanazt a nettó jelenértéket adja, ez ebben az esetben NPV_1. Most feltételezzük, hogy találunk olyan $(C_0 C_1)$ pontsorozatot, amely magasabb NPV értéket ad, mondjuk NPV_2 pontsort. Ebben az esetben NPV_1 helyére NPV_2 kerül a fenti egyenletben, s az így kapott egyenes az előzővel azonos meredekségű lesz, de a függőleges tengelyt magasabban metszi.

Az NPV alternatív értékeinek előállításával párhuzamos egyenesek sorozatát kaphatjuk, s adott egyenes olyan pontkombinációk sorozata, amelyek ugyanolyan NPV értéket reprezentálnak. Ezért nevezik ezeket *iso-*

NPV egyeneseknek. Vizsgáljunk meg tipikus *iso-NPV* egyeneseket a 12. ábrán!

Vajon melyik *NPV* egyenest szeretné elérni az egyén? Nyilvánvalóan a legmagasabban fekvő NPV_3 egyenest, mivel ez tartalmazza a legnagyobb nettó jelenértéket biztosító C_0C_1 kombinációkat.

12. ábra *Azonos NPV értéket mutató egyenesek sorozata*

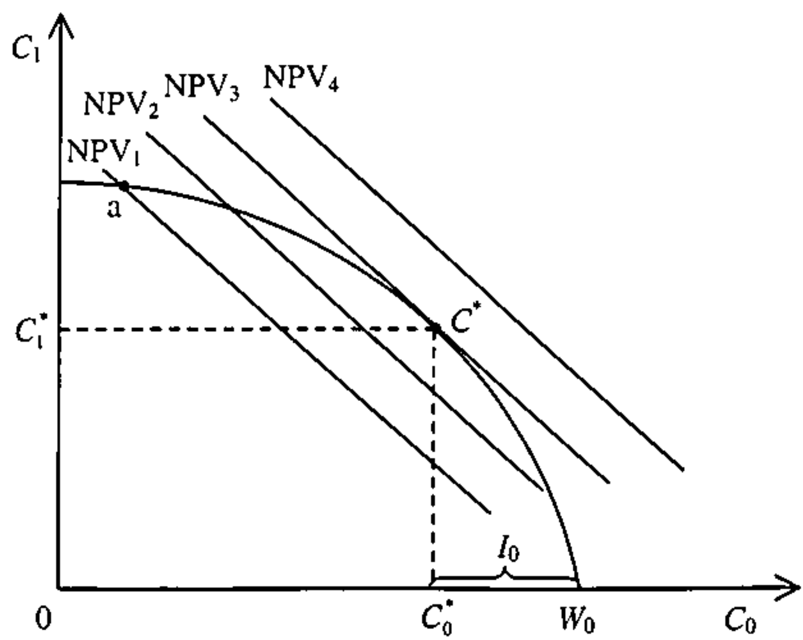


Ugyanakkor tudni kell, hogy ezen egyenesek nem mindegyike reprezentál elérhető pénzáram kombinációkat. Adott *iso-NPV* egyenes szóbajöhetősége egyrészt függ az egyén induló forrásától (W_0), másrészt a beruházási lehetőségektől (beruházási produktivitási görbe).

A 13. ábra a beruházási produktivitási görbét együtt mutatja az *iso-NPV* egyenesek sorozatával.

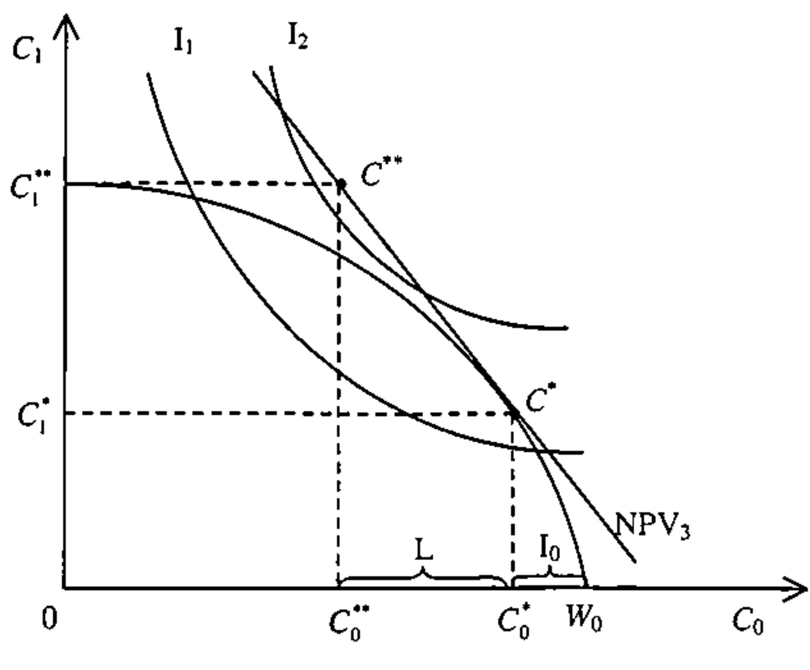
Az induló forrást W_0 szimbólummal jelöljük a vízszintes tengelyen. Bár az egyén preferálná az NPV_4 egyenes elérését, noha a (C_0C_1) kombinációk közül egyetlen sem található ezen az egyenesen, mivel az a produktivitási görbétől jobbra esik. Az *a* pont éppen elérhető lenne, ha az egyén az eredeti forrás egy részét ide beruházná, s idáig mozogna a beruházási produktivitási görbén. De fogja-e választani az egyén ezt a pontot?

13. ábra *A közömbösségi egyenes és produktivitási görbe*



A válasz egyértelműen nem, mivel a C^* is elérhető I_0 beruházásával, s ez a pont az *NPV* magasabb szintjét reprezentálja. ($NPV_3 > NPV_1$). Adott induló forrás és produktív beruházási lehetőségek mellett, I_0 kezdeti beruházási kiadást feltételezve a $\left(C_0^*C_1^*\right)$ nettó pénzáram kombinációnál (C^*) pont lesz a legjobb lehetséges alternatíva, amely képes a pénzáram jelenértékének maximalizálására. A k tőkeköltséggel szembesülő egyén feltétlenül a C^* ponttal jelölt fogyasztási kombinációt fogja választani? A kérdés megválaszolásához feltétlenül figyelembe kell venni az egyén attitűdjét reprezentáló közömbösségi görbe sorozatot, sőt az elemzésnek azt is figyelembe kell venni, hogy az egyén meghatározott finanszírozási és produktív beruházási lehetőségekkel szembesül. Ezt a 14. ábra illusztrálja, amely együtt jeleníti meg az egyén közömbösségi görbéit, a beruházási produktivitási grafikont és az *iso-NPV* egyenest.

14. ábra *A kölcsönadási szándék erősödése*



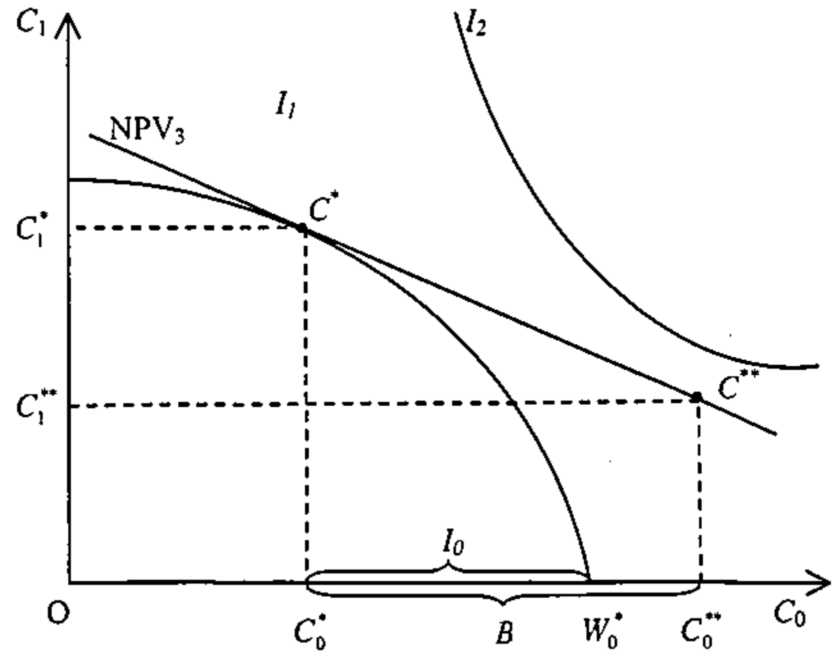
Úgy, mint az előzőekben az egyén I_0 összeget ruház be ahhoz, hogy elérje a C^* pontot, amely egyben a legmagasabb elérhető *iso-NPV* egyenes és a produktivitási görbe érintési pontja. Ugyanakkor a C^* ponton áthaladó I_1 közömbösségi görbe a produktivitási görbe alatt halad, amely szintén elérhető, ha a finanszírozási alternatívákat is figyelembe vesszük.

Meghatározott egyéni attitűd mellett (amit a közömbösségi görbe alakja mutat) a megelégedettség magasabb szintje érhető el, ha L összeget kölcsön adunk *k* haszonáldozati költség mellett. Ezt megmutathatjuk, ha felfelé mozgunk az *iso-NPV* egyenesen a C^{**} pontig, ahol is az iso-NPV egyenest éppen érinti az I_2 közömbösségi görbe. Az egyén azért preferálja a kölcsön nyújtást a C^* ponton történő beruházáson túl, mivel a 2. periódusban $L(1+k)$ megtérülést kap a kölcsönadás viszonzásaként. A finanszírozási tranzakció *k* effektív kamatrátája – e ponton túl – nagyobb a produktív beruházás megtérülési rátájánál, ahogy ezt a beruházási görbe és az *NPV* egyenes meredekségének összehasonlítása mutatja.

A közömbösségi görbe érintése a C^* ponttól jobbra is elhelyezkedhet; ekkor az egyén újra csak a C^* pontig ruház be, de most *B* összeget kölcsönvesz folyó fogyasztása növeléséhez. Ez utóbbi esetet a 15. ábra mutatja.

Az ábra közömbösségi görbéi meredekebbek, ami azt mutatja, hogy az egyén most a folyó fogyasztást előnyben részesíti a jövőbelivel szemben. Mindazonáltal a folyó fogyasztás fokozott preferálása ellenére az egyén először előnyben részesíti a produktív beruházási lehetőségeit és beruház I_0 összeget, s ez elvezeti a C^* pontig. A preferált fogyasztási kombináció finanszírozási tranzakcióval – ebben az esetben – kölcsönvétellel érhető el.

15. ábra *A kölcsönvételi szándék erősödése*



Végül a harmadik eset az, amikor a közömbösségi görbe éppen a C^* pontban érinti a beruházási produktivitás görbéjét; ilyenkor az egyén nem is ad és nem is vesz kölcsön, s a C^* pont reprezentálja a fogyasztás optimális kombinációját.

2.6.2. A beruházási és finanszírozási döntés elválasztása

Elemzésünk meglepő tanulsága az, hogy a C^* ponttal jelölt optimális beruházási döntés nem függ a közömbösségi görbék alakjától. Amennyiben az egyén fogyasztása időbeli átcsoportosítására törekszik – kölcsönadással vagy kölcsönvétellel – attól a beruházási döntés ugyanolyan marad. A 13. ábrán látható beruházási görbe $W_0C_0^*$ szakaszán található projektek mind elfogadhatók, mivel ez a változatok olyan részhalmaza, amely *k* tőkeköltség mellett pozitív *NPV* értéket biztosít, s ez megengedi az egyénnek a legmagasabb elérhető *NPV* egyenesre jutást. Így mindaddig, amíg az egyén úgy választ beruházást, hogy az maximális *NPV* értéket ad, azaz eljuttatja a legmagasabb elérhető *iso-NPV* egyenesre, szintén biztosított lesz számára megelégedettségének (hasznosságának) maximalizálása, saját fogyasztásának (esetleges) időbeli átcsoportosításával, akár kölcsönvétel, akár kölcsönadás útján. *Ebben a tekintetben az NPV szabály optimális döntéshez vezet, hiszen az ennek alapján hozott döntés egyenértékű az egyén hasznosságának egyidejű maximalizálásával. A beruházási és finanszírozási (kölcsönvételi vagy kölcsönadási) döntés egymástól függetlenségét szeparációnak nevezik, s ez a modern finanszírozási elmélet egyik alaptétele.*[8] Ehhez hatékonyan működő tőkepiacra van szükség, mely az egyénnek megengedi úgy meghozni produktív beruházási döntéseit, hogy explicite figyelembe veheti saját finanszírozási döntéseit mindaddig, amíg tőkeforrásai haszonáldozati költsége jelen van beruházási lehetőségei értékelésében. Emiatt a *k* tőkeköltség az NPV módszer döntési szabályának integráns része.

A kétperiódusú fogyasztási-beruházási modell értelmet ad a nettó jelenérték megközelítésnek. Ennek logikája így összegezhető:

[8] A szeparációs tétel az Irving Fisher klasszikus műveiben megfogalmazott elméleti felismeréseken alapul.

- A tőkeműködtetők a tulajdonosok-részvényesek érdekei szerint cselekszenek. Ezt úgy tehetik, hogy a részvényesek gazdagságának maximalizálására törekszenek a pénzáram folytonos növelésével. A jelenlegi és jövőbeli gazdagság közötti piaci átváltási arány tükröződik a folyó kamatrátában.

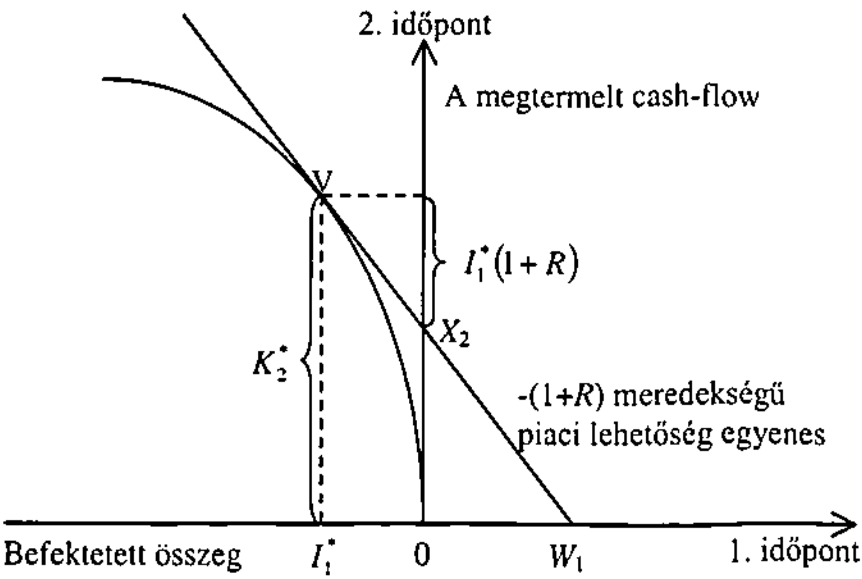
- A tőkeműködtetők minden projektet meg kell valósítsanak egészen addig a pontig, ahol a beruházás marginális megtérülése egyenlővé válik a tőkepiaci ekvivalens finanszírozási beruházások kamatrátájával. Ez pontosan ugyanaz, mint a nettó jelenérték szabály: el kell fogadni minden pozitív nettó jelenlegi értéket ígérő beruházást, amenynyiben a diszkontálás az ekvivalens piaci kamatráta mellett történik. Ennek eredményeként nő a vállalat piaci értéke, s így a részvényesek vállalatbeli érdekeltségének piaci értéke is.

- A tőkeműködtetők nem kell hogy törődjenek a részvényesek egyéni fogyasztási választásával vagy kockázati preferenciájával. Jól működő tőkepiacokon a részvénytulajdonosok úgy adhatnak és vehetnek kölcsön, hogy ezáltal elérhessék a nekik megfelelő személyes fogyasztási igény teljesítését. Biztonságos és kockázatos beruházások gondos kombinálásával elérhetik fogyasztási igényük kívánatos kockázati karakterisztikáit.

2.6.3. Az induló erőforrásokkal nem rendelkező vállalkozó[9]

Tekintsünk most egy olyan nagyratörő vállalkozót, akinek van piacképes terméke, ért a szükséges termelési technológiához, azonban nem rendelkezik erőforrásokkal a vállalkozás finanszírozásához. Megakadályozható-e a vállalkozó abban, hogy szakmai értékeit realizálja? Tökéletes tőkepiac feltételezése mellett a válasz: nem. Amint a 16. ábrán látható, az induló erőforrásokkal nem rendelkező vállalkozó a periódus elején elmehet a tőkepiacra, ahol kölcsönként felveheti a projekt finanszírozásához szükséges OI_1^* összegű tőkét (amit az új kapacitás által létrehozott és a periódus végén megkapott pénzből fog visszafizetni).

16. ábra *A vállalkozó kölcsönveszi az induló tőkét*

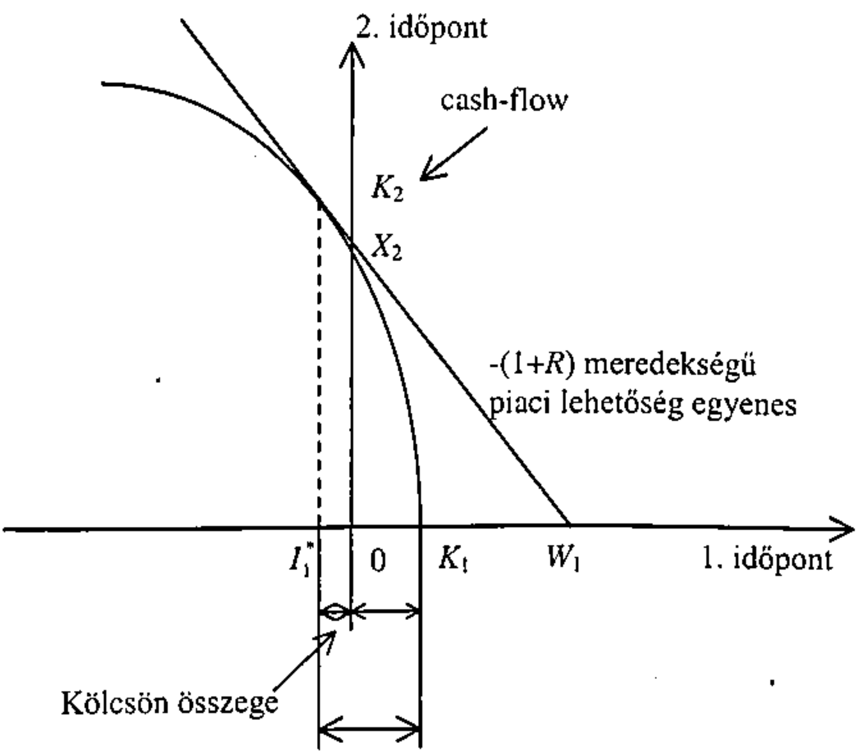


[9] Az optimális beruházási döntés rendhagyó eseteit tárgyalja Neave, Edwin-Wiginton, John:Financial Management: Theory and Strategies c. munkája. Prentice Hall 1981.

Az ugyancsak leolvasható az ábráról, hogy a periódus-eleji értéke természetesen W_1. Láthatjuk, hogy tökéletes tőkepiacon az életképes üzleti ötlettel rendelkező vállalkozó még akkor is tud vagyont teremteni, ha nincs induló tőkéje a vállalkozás finanszírozására.

Elképzelhetünk olyan esetet is, amelyben a vállalkozó rendelkezik valamennyi tőkével, a beruházáshoz szükséges különbözetet azonban kölcsön kell vennie. Ezt a változatot a 17. ábrán bemutatott, célirányosan elhelyezett transzformációs görbével írjuk le.

17. ábra *A vállalkozó kölcsönből fedezi a szükséges tőke egy részét*



Megjegyezzük, hogy a vállalkozó K_1W_1 vagyon növekménye ugyanakkora, függetlenül attól, hogy az OI_1^* összeget kölcsönveszi, s az OK_1 forrást befekteti, vagy az OK_1 részt eladja és a teljes $I_1^*K_1$ összeget kölcsönveszi.

Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy ilyen körülmények között a termelő beruházás finanszírozásának módszere irreleváns a beruházási lehetőség értékének meghatározása szempontjából.

2.6.4. A tőkeműködtetők által a tulajdonos nevében hozott befektetési döntések

Az eddigiekben a tulajdonos-vállalkozó optimális döntési elveit vizsgáltuk, azonban a befektetett tőke nagy részét társaságok birtokolják. E tényből két fontos következmény adódik. Az egyik szerint az üzleti társaságnak több tulajdonosa van és semmi értelme nincs azt feltételezni, hogy az összes tulajdonos preferenciája megegyezik. Másrészt nem a vállalat tulajdonosai hozzák a társaság beruházási-termelési döntéseit, hanem menedzserekre ruházzák át a döntéshozatal jogát. *Nem jelentkezik probléma akkor, ha úgy irányítják a vállalatot, hogy akkora jelenérték-többletet tesznek hozzá a tulajdonosok vagyonához, ami pontosan akkora, mintha a tulajdonosok maguk hozták volna a döntéseket.*

Tudjuk továbbá, hogy W_1 jelenti az egyének fogyasztási döntéseinek egyetlen korlátját, tökéletes tőkepiacon az üzleti társaságot a vagyon előállításának eszközeként tekintik, mivel az általa létrehozott pénzmegtérülés az egyetlen fontos dolog a tulajdonosok számára. Ez még akkor is igaz, ha a tulajdonosok helyettesítési határrátája különböző a periódus-eleji és –végi fogyasztást illetően, mivel a tőkepiacon az induló vagyon jelenértéke a fogyasztási döntések egyetlen korlátja. *Mivel ezt az induló tőkét akkor lehet maximalizálni, amikor az egyének befektetéseinek piaci értéke eléri maximumát, így a menedzsereknek, tökéletes tőkepiacon az általuk irányított vállalatok piaci értékét kell maximalizálni.* Ennek teljesülésekor a tulajdonosok társasági jövedelem arányának piaci értékét is maximalizálják.

2.6.5. Vállalatok és a piaci érték kritérium

Hogyan alkalmazzák a menedzserek a gyakorlatban a piaci érték kritériumot?

A korábbiakban a vállalkozó optimális fogyasztási, beruházási és finanszirozási döntéseit két érintési feltétel egyidejű teljesítésével jellemeztük; egyrészt a transzformációs görbe és a tőkepiaci lehetőség egyenes közti érintési feltétel, valamint a tőkepiaci lehetőség egyenes és egy közömbösségi görbe közti érintési pont teljesülésével. Az első feltétel úgy is kielégíthető, hogy semmit nem tudunk az egyénnek a másik feltételt jellemző preferenciáiról. Azzal a feltételezéssel, hogy a menedzsert a szakmai hozzáértés alapján választották ki, meg tudja határozni a vállalat piaci értékét maximalizáló termelési tervet azáltal, hogy a társaság beruházásból származó belső megtérülési rátáját összeveti a piaci kamatráta nagyságát illető, általánosan hozzáférhető információval.

Az érvelés következő lépése az a kulcs, amellyel megérthető a finanszírozási elmélet hatóereje. Tudjuk, hogy a piaci lehetőség egyenesek az egyenlő jelenértékek egyeneseiként tekinthetők. Így tehát, ha arra utasítjuk a menedzsert, hogy keresse meg a transzformációs görbe és a piaci lehetőség egyenes érintési pontját, akkor ez azonos ama pénzkivonás periódus-eleji értékének maximalizálásával, amit a jelenlegi tulajdonos a vállalat révén realizál (ha a belső megtérülési ráták a befektetés növekedésével csökkennek). Így az a menedzser, aki ezt a receptet követi, maximalizálni fogja a vállalat jelenlegi tulajdonosainak kombinált vagyonát, valamint minden egyéni tulajdonos részarányos hozamát is. A menedzserek a fogyasztási döntéseket az egyénekre hagyhatják, mivel az egyén jelenlegi vagyona a fogyasztás időbeli lehetőségeinek egyetlen korlátja.

Az egyén az optimum elérésének második feltételét a tőkepiacon végzett személyes tranzakciókon keresztül elégíti ki. Tökéletes tőkepiacon bármely adott jelenértékű fogyasztási választás csomagot el lehet cserélni egy másik, ugyanakkora jelenértékkel rendelkező csomagra. Ez azt eredményezi, hogy a részvényes minden, vállalattól nyert fogyasztási csomagját át lehet alakítani a jelenérték kiszámításával ugyanekkora vagyonra. Tehát, ha valamely menedzseri döntés növeli a részvényesek jelenlegi vagyonát, akkor azok jóléte egyértelműen nő. *Így a piaci értéket maximalizáló döntés mindegyik részvényes jólétét a lehető legnagyobb mértékben növeli.*

2.6.6. A piaci érték maximalizálása megfelel a profit maximalizálásának

A piaci érték kritérium valójában sokkal általánosabb, mint amilyennek eddig tűnt. Ha megfelelően értelmezzük a piaci érték szabályt, akkor ez egy olyan követelményt is magában foglal, amely elvárja a menedzserektől, hogy minden időpontban maximalizálják a profitot. Annak belátásához, hogy az érték maximalizálás és a megfelelően értelmezett profit maximalizálás egymással ekvivalens, tekintsük a következő példát, amely az általánosítás érdekében három időpontot foglal magában.

Legyen I_1^* az 1. időpontban a vállalatba befektetett teljes összeg, C_2 a működési költségekkel csökkentett pénzáram a 2. időpontban, C_3 pedig a működési költségekkel csökkentett pénzáram a 3. időpontban. Feltételezzük, hogy mindkét időszakban R a piaci kamatráta. Ebben az esetben a vállalat piaci értéke az 1. időpontban:

$$V_1 = \frac{C_3}{(1+R)^2} + \frac{C_2}{(1+R)} - I_1^* \tag{1}$$

Most feltételezzük azt, hogy I_1^* beruházási költséget teljes egészében kölcsönből fedezik, valamint, hogy a kölcsönt visszafizetési ütemterv alapján, a kölcsön összegét és a kamatokat magában foglaló CI_2 és CI_3 összegben kell visszafizetni a 2. és 3. időpontban:

$$\frac{CI_2}{(1+R)} + \frac{CI_3}{(1+R)^2} - I_1^* \tag{2}$$

Ez az ütemterv biztosítja, hogy a hitelező a kölcsön után megkapja a piaci kamatrátát. Ennek alapján felírható a következő összefüggés a vállalat értékére:

$$V_1 = \frac{C_2}{1+R} - \frac{CI_2}{1+R} + \frac{C_3}{(1+R)^2} - \frac{CI_3}{(1+R)^2} \qquad (3)$$

Amit úgy kapunk, ha a (2) egyenletet behelyettesítjük az (1) kifejezésbe. Továbbá, ha a kölcsön visszafizetési részletei pontosan megegyeznek az értékcsökkenési leírással, akkor $C_2 - I_2 = \pi_2$ és $C_3 - I_3 = \pi_3$, így tehát π_2 és π_3 a két időszak profitja. Erre alapozva a (3) egyenlet a következők szerint átírható:

$$V_1 = \frac{\pi_2}{1+R} + \frac{\pi_3}{(1+R)^2}$$

Ennek alapján az összes profit jelenértékének maximalizálása egyenértékű a vállalat piaci értékének maximalizálásával. A piaci érték maximalizálásának követelménye, valamint a profitok időszakonkénti maximalizálásának kritériuma nem egyezik meg akkor, amikor a döntések eredményeként bizonyos időszakokban nő, máskor viszont csökken a profit. Ilyen körülmények között természetesen akkor születnek helyes döntések, ha ezekhez a piaci érték kritériumot használják. Ezen kívül a periódusonkénti profitok megfelelő értelmezése még ebben az esetben is azt eredményezi, hogy ezek jelenértéke maximális lesz.

2.7. A beruházási és finanszírozási döntések következményei

Az elmondottak nagy jelentőségűek a finanszírozási döntéshozatal megértése szempontjából. A kifejtettek két általános elv segítségével összefoglalhatók:

1. A piaci értéket maximalizáló vállalat ama pontig folytatja beruházásait, ahol a belső megtérülési határráta egyenlő lesz a piaci kamatrátával. Ez összhangban van a hosszú távú profit maximalizálásával, ha a profit számítása helyes. A döntésbe beletartozik a beruházott összeg meghatározása is, tehát nemcsak annak eldöntéséről van szó, hogy egy rögzített méretű projektet elfogadjanak, vagy elutasítsanak.

2. Egy adott vállalatba irányuló teljes beruházás függ a projekt által termelt pénzáramtól, illetve a piaci kamatrátától. *Új érték akkor termelődik, ha a vállalat átlagos belső megtérülési rátája meghaladja a piaci kamatrátát.* Az érték akkor maximális, ha e két ráta a befektetési határadagnál egyenlővé válik. Mivel a tökéletes tőkepiaccal rendelkező, bizonyosságon alapuló környezetben a piaci kamatráta a vállalat tőkeköltsége, az érték akkor maximális, ha addig a pontig fektetnek be tőkét, ahol a belső megtérülési határráta akkorára csökken, hogy egyenlő lesz a vállalat tőkeköltségével.

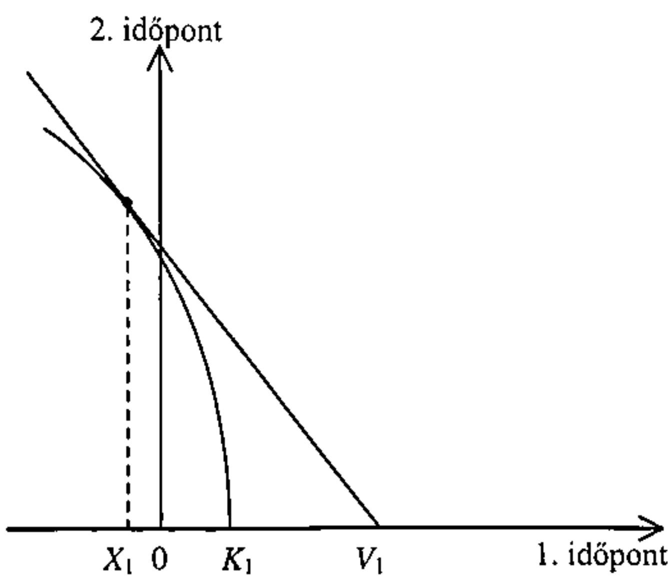
A vázolt elvek szempontjából irreleváns, hogy a vállalat egyetlen tulajdonos, vagy több részvényes birtokában van, mivel ha a vállalat piaci értékét maximalizálják, akkor az összes részvényes piaci értékbeli arányos részesedését is maximalizálják. Az sem jelent különbséget, hogy a vállalat saját tőkéjét használja fel, vagy pedig külső finanszírozást alkalmaz. A bizonyosság és a tökéletes tőkepiac feltételezése mellett az összes finanszírozásnak ugyanakkora a költsége, ami egyenlő a piaci kamatrátával. Ez a mérleg szerinti jövedelemre is igaz, mivel a piaci kamatráta ennek a haszonáldozati költsége.

Hangsúlyozni kell, hogy a következtetések a tökéletes tőkepiaccal jellemezhető bizonyossági környezetre igazak. Az eredmények ennek ellenére értékesek, mivel útmutatást adnak arra vonatkozólag, hogy milyen feltételek (piaci tökéletlenségek) igazolják a tőkestruktúra jelentőségét. Azt is meg kell jegyezni, hogy míg a piaci érték kritérium azt kívánja a menedzserektől, hogy csak a termelés technikai aspektusát tekintsék, ugyanakkor nekik is lehetnek saját preferenciáik, amelyek szemben állhatnak a részvényesek preferenciáival. Az ügynökelmélet ad magyarázatot arra, hogy a menedzserek miként követik a piaci érték szabályt.

2.7.1. A termelési és finanszírozási döntések elkülönítése

Meghatározott termelési-beruházási terv végrehajtásához szükséges vállalati befektetés finanszírozási módja a tulajdonos számára közömbös. Eszerint a vállalat piaci értékét kizárólag a vállalat által létrehozott pénzáram határozza meg, nem pedig a finanszírozás módozata. Ez azt is jelenti, hogy a vállalat tőkeköltsége független a finanszírozási forrásoktól. Ez az elkülönítési elv abból a tényből ered, hogy ha egyszer már rögzítették a vállalat termelési-beruházási elgondolásait (vagyis, ha már megtalálták a transzformációs görbe és a piaci lehetőség egyenes érintési pontját), akkor irreleváns, hogy a finanszírozás milyen forrásból történik, mivel az összes finanszírozási változat költsége azonos és megegyezik a piaci kamatrátával. *Az elkülönítési elv termelési-beruházási jelentősége abban rejlik, hogy a vállalat termelési-beruházási döntésével egyidejűleg nem kell határozni a befektetés finanszírozásáról is.* Ez ugyanazt takarja, mintha azt állítanánk, hogy az összes befektetési döntést a piaci kamatráta felhasználásával lehet értékelni, mivel ez a kamatráta a vállalat tőkeköltsége. A termelési-beruházási és finanszírozási döntések szétválasztását grafikusan a 18. ábra mutatja.

18. ábra *A termelési és finanszírozási döntések szétválasztása*



A termelési döntés alatt azt értjük, hogy elhatározzuk X_1K_1 összeg befektetését, ami meghatározza a vállalat által kibocsátott és értékesített volument illetve összeget. A finanszírozási és termelési döntés elválasztottsága azt jelenti, hogy ha a vállalat meglévő tulajdonosainak eredetileg OK_1

erőforrás áll rendelkezésére, akkor az általuk személyenként befektetett erőforrás-részek nagysága irreleváns a vállalat értékének meghatározása szempontjából. Megfelelő üzleti működés eredményeként a vállalat értéke V_1.

A meglévő tulajdonosok bármilyen lefutású pénzkivonást eszközölhetnek a vállalatnál a periódus elején és végén mindaddig, amíg a lefutás jelenértéke V_1értékkel lesz egyenlő. Amennyiben a meglévő tulajdonosoknak nem áll rendelkezésre a szükséges X_1K_1 tőke beruházáshoz, akkor ezt az összeget megszerezhetik a tőkepiacon. *Tökéletes tőkepiacon mindig minden gazdaságilag életképes ötletet finanszíroz valamilyen befektető és a külső tőkejuttató mindig a piaci kamatrátát kapja befektetése után.* Ha a befektetők az eredeti tulajdonosok, akkor ők magasabb megtérülési rátát kapnak vállalati befektetéseik után. Az így előállított pénzáramot azonban a piaci kamatráta felhasználásával értékelik, mivel ez a rájuk vonatkozó haszonáldozati költség. Másképpen fogalmazva, a menedzserek a tőke befektetésével akkora értéket teremtenek az eredeti tulajdonosok számára, amely átlagban meghaladja a piaci kamatrátát. A létrejött vagyon meghatározásához az eredeti tulajdonosok a vállalati pénzáramot a piaci kamatrátával tőkésítik.

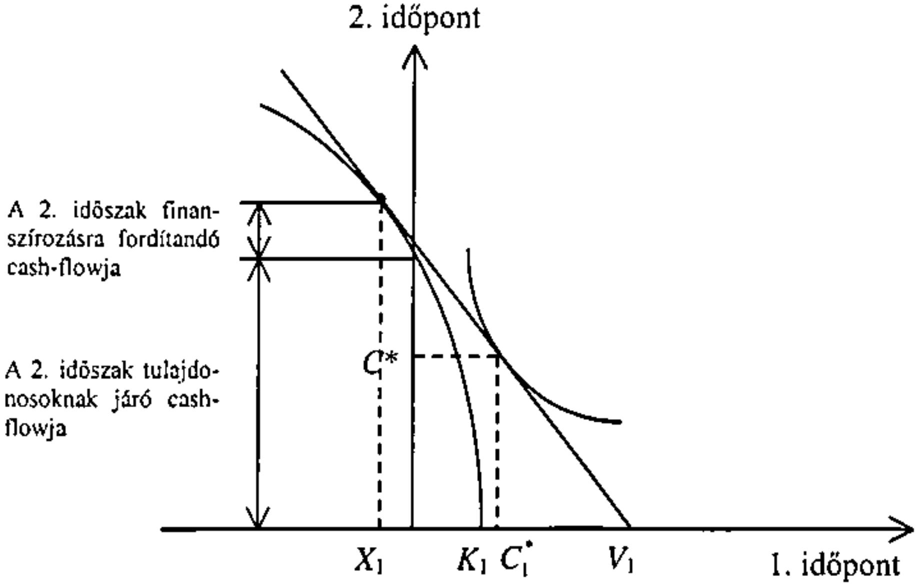
2.7.2. A menedzseri és tulajdonosi döntések elválasztása

Az elemzés eredményeiből származó második fő alapelv az, hogy nincsenek eltérések a menedzser és a tulajdonos céljai között mindaddig, amíg a menedzserek maximalizálják a tulajdonos által a vállalatba irányuló befektetés piaci értékét. Ha a vállalatnak csak egy tulajdonosa van, a vállalkozó, akkor azt állítjuk, hogy a megelégedettség meghatározásának megfelelő kritériumát a tulajdonos fogyasztási kiadásainak periódus-eleji értéke képviseli. Azt is láttuk azonban, hogy a vállalkozó fogyasztási döntéseinek egyetlen korlátja a piaci lehetőség egyenes, amelyet az induló vagyon értéke határoz meg. A vagyonteremtés feladatát tehát rá lehet bízni a finanszírozási menedzserekre, akiknek nem szükséges tudniuk azt, hogy melyek a tulajdonos fogyasztási preferenciái.

Hasonló eredményt kapunk a tökéletes tőkepiacon működő, több tulajdonos birtokában levő vállalat esetén is. A piaci érték szabály megköveteli a menedzserektől, hogy maximalizálják a vállalat jelenlegi piaci értékét, amelyet a transzformációs görbével ábrázolható technológiai korlátok befolyásolnak. *Az érték maximalizálása minden, amit a menedzserek a részvényesekért tehetnek, független azok preferenciáitól, ugyanis az összes befektetés piaci értéke a tulajdonos vagyona és e vagyon képezi a tulajdonosok fogyasztási döntéseinek egyetlen korlátját. Ennek az eredménynek a jelentősége abban rejlik, hogy a menedzsereknek annak érdekében, hogy a legjobban járjanak el a tulajdonosok érdekében, nincs szükségük információra a tulajdonos hasznossági függvényét illetően.* A pénzügyi menedzserek feladata tehát az, hogy vagyont teremtsenek azáltal, hogy megkeresik azokat a termelési lehetőségeket, amelyek átlagban a piaci kamatrátát meghaladó megtérülést biztosítanak. A menedzserek ezt a vagyont a piaci érték szabály segítségével maximalizálják ama pontig történő beruházással, ahol a belső megtérülési határráta akkorára csökken, hogy egyenlővé válik a piaci kamatrátával.

A szétválasztási elv szerint a piaci érték szabály magában foglalja a menedzserek által figyelembe veendő összes információt. A szétválasztási elvet a 19. ábra illusztrálja.

19. ábra *A vállalatvezetői és tulajdonosi döntések elkülönítése*



A szétválasztási elv szerint a menedzserek meghatározzák az X_1K_1 optimális befektetést és így annak V_1 piaci értékét is. Másképpen fogalmazva a menedzserek meghatározzák a tulajdonos piaci lehetőség egyenesének V_1 metszetét. Ha a vállalatnak csak egy tulajdonosa van, akkor ő meghatározza, hogy az V_1 jelenértékkel milyen fogyasztási mintákat preferál, vagyis a tulajdonos választ egy pontot a piaci lehetőség egyenesen. Ha a vállalatnak több tulajdonosa van, akkor egy adott tulajdonos csak a piaci érték valamekkora hányadára jogosult, s ez meghatározza azt a piaci lehetőség egyenest, amelyen a szóban forgó tulajdonos mozoghat.

2.7.3. Befektetési és finanszírozási döntések

2.7.3.1. Finanszírozási döntések

A vállalatok befektetési és finanszírozási döntései vizsgálhatók bizonyosság és tökéletes tőkepiaci viszonyok érvényesülése mellett. A tőkeműködtetőknek azért kell maximalizálni a vállalat piaci értékét, hogy maximalizálhassák a tulajdonosok gazdagságának jelenértékét. A befektetési döntések alternatív változatait olyan szempontból kell értékelni, hogy azok megfelelnek-e a piaci érték szabálynak. A vállalat által összegyűjtött tőke piaci kamatráta mellett áll rendelkezésre, s a visszatartott profitot is e rátával diszkontálják (azaz a haszonáldozati költséggel), ezért a döntéshozóknak a piaci kamatrátát kell használniuk tőkeköltségként a befektetési lehetőségek értékelése során. *Így a projekt által generált, s a befektetőknek járó megtérülési pénzáramokat e tőkeköltség felhasználásával lehet diszkontálni a projekt nettó jelenértékének meghatározásához, ami azt mutatja, hogy a projekt mennyivel járul hozzá a vállalat piaci értékéhez.*

2.7.3.2. A piaci érték szabály alkalmazása független projektekre

Az optimális befektetési döntések meghozatalakor további nehézséggel is szembe kell nézni. A piaci érték szabály a vállalat befektetéseinek összességével foglalkozik, nem pedig az azt alkotó egyes projektekkel. Gyakran azonban egyszerűbb a vállalat eszközeinek növekményét értékelni, és ennek érdekében meg kell értenünk, hogy a pótlólagos befektetés hogyan járul hozzá a piaci értékhez. A növekményi befektetés értékelésének problémáját könnyű megoldani, ha az független a vállalat többi eszközétől. Függetlenség alatt – ebben az összefüggésben – azt értjük, hogy egy befektetési lehetőség pénzhozamát nem befolyásolja egyetlen más lehetőség működési szintje sem. Ezt követően a tőkeműködtető eldönti a projekt elfogadhatóságát, és más projektekre tekintet nélkül mérlegel. Az összes projekt adott időpontban fennálló költségeit a vállalat jelenlegi tőkeköltségvetésének nevezzük. A döntéshozó a tőke-költségvetésen belüli összes projektet értékelheti vagy egyidejűleg, vagy ha úgy megfelelőbb, akkor minden egyes független projektet értékelhet külön-külön is.

Mivel az értékeléshez a piaci érték szabályt használjuk, minden egyes projekttel kapcsolatban azt a kérdést kell feltennünk, hogy a projekt milyen mérete biztosítja a legnagyobb piaci érték növekményt. *Ha a projekt hozzájárulása a piaci értékhez negatív minden alkalmazási szinten, akkor a vállalatnak természetesen nem szabad belevágni a beruházásba.* Ilyen megszorításokat szem előtt tartva a projektek egymástól függetlenül szemlélhetők, biztosítva azt, hogy az elfogadott projektek összessége értékmaximalizáló tulajdonsággal rendelkezzék. Ha a független projektek értéke hozzájárul a vállalat piaci értékéhez, akkor érvényesül a hozzáadott érték elv.

2.7.3.3. Néhány ismert értékelési kritérium

A nettó jelenérték és a belső megtérülési ráta elfogadási-elutasítási döntésekhez mindaddig megfelelő, amíg helyesen értelmezik azokat. Az elfogadási-elutasítási döntéseket csak akkor kezelik helyesen, ha a projekt egyetlen rögzített szinten fogadható el. Amennyiben a projekt szintje változhat, akkor fontos meghatározni azt a szintet, amely a legnagyobb növekményt biztosítja a piaci értékben.

2.7.3.3.1. Nettó jelenérték

Legyen I_0 az a jelenbeli pénzkiadás, ami ahhoz szükséges, hogy adott méretű eszközt szerezzen a vállalat. Ha egy méretnél többre van lehetőség, akkor meg kell ismételni az elemzést, hogy a most levezetett ismérv szerinti legnagyobb értéket kiválaszthassuk. Legyen C_1 az az 1. időpontbeli – termelési értéket nem tartalmazó – pénzáram (C_1 tartalmazza a tőkeeszköz elszámolási értékét – ha van ilyen), amely I_0 befektetéséhez kapcsolódik. Legyen továbbá R a piac által elvárt egyperiódusú megtérülési ráta. Így a projekt nettó jelenértéke a következők szerint írható fel:

$$NPV = \frac{C_1}{(1+R)} - I_0 \qquad (1)$$

Ha a nettó jelenérték pozitív, akkor a vállalat piaci értéke nőni fog a projekt elfogadásával, mivel tökéletes piacon korlátlanul szerezhetők finanszírozási források, ezért az összes ilyen produktív befektetési lehetőséget el kell fogadni.

2.7.3.3.2. Belső megtérülési ráta[10]

Ha két időpontot vizsgálunk, akkor a belső megtérülési ráta ugyanazt az eredményt adja, mint a jelenérték számítás. Ha a fentebb használt defini-

[10] Hirshleifer (1958) feltárta a belső megtérülési ráta-módszer hibáját, jelezve azt, hogy e módszer általában nem helyes megközelítés többperiódusú beruházások vizsgálata esetén. Lásd még Solomon, E.: The Arithmetic of Capital Budgeting Decisions. Journal of Business, April 1956.

ciót használjuk, akkor a belső megtérülési rátát az alábbi egyenlet R^*-ra megoldásával kapjuk meg:

$$NPV = \frac{C_1}{1+R^*} - I_0 = 0 \tag{2}$$

A döntéshozatal során az R^* belső megtérülési rátát össze kell hasonlítani a piac által elvárt R megtérülési rátával. Az $R^* > R$ reláció esetén a befektetési lehetőség elfogadható, mivel növeli a vállalat piaci értékét. Ha különböző választási szintek állnak rendelkezésre e kétperiódusú elemzésben, akkor a legmagasabb belső megtérülési rátát biztosító változat az, amely a piaci értéket maximalizálja.

Többperiódusú esetben a nettó jelenérték így írható fel:

$$NPV = \sum_{t=1}^{n} C_t \cdot (1+R)^{-t} - I_0 \tag{3}$$

A belső megtérülési rátát pedig úgy kapjuk meg, hogy az alábbi egyenletet megoldjuk R^*-ra:

$$\sum_{t=1}^{n} C_t \cdot (1+R^*)^{-t} - I_0 = 0 \tag{4}$$

Az n mindkét esetben a befektetési lehetőség élettartamát jelöli. Mindkét esetben feltételezzük, hogy az I_0 induló tőkekiadás a tőkésített pénzáramból levonásra kerül. Feltéve, hogy C_t összes értéke nem negatív, bármelyik ismérv alkalmazható az elfogadási-elutasítási döntéshez, és mindkettő egyformán helyes, bár a belső megtérülési ráta ismérv nem ad olyan egyértelmű választ a megfelelő méretű befektetés kiválasztásának problémájára, mint a jelenérték számítás. Mindazonáltal az C_1, C_2 .... pénzáram tételekre nem feltétlenül áll fenn a nem negativitási kitétel, mivel a projektnél – a nevezett időszakban – szükség lehet pótlólagos befektetésekre. Ha a C_t pénzáram tételek bármilyen előjelűek lehetnek, akkor probléma merülhet fel a belső megtérülési ráta ismérv esetében.

2.7.3.3.3. A megtérülési ráta többszöröződése[11]

A (4) egyenlet valójában n-1-ed fokú többtagú kifejezés $(1+R^*)$ ismeretlenre C_t együtthatóval. Az ilyen többtagú kifejezésekkel az a probléma, hogy ha az C_t együttható előjele nem korlátozott, akkor a (4) egyenletnek több gyöke is lehet, és így a projekt belső megtérülési rátája nem definiálható egyértelműen. Általános esetben, amikor n időszakot tekintünk, a polinom kifejezésnek $(1+R)$-re vonatkozóan n-1 hatványig lesznek tagjai és ezért n-1 különböző gyök is létezhet. Példaként tekintsünk egy olyan projektet, amely az alábbi pénzárammal jellemezhető:

I_0	C_1	C_2
-1 600	+10 000	-10 000

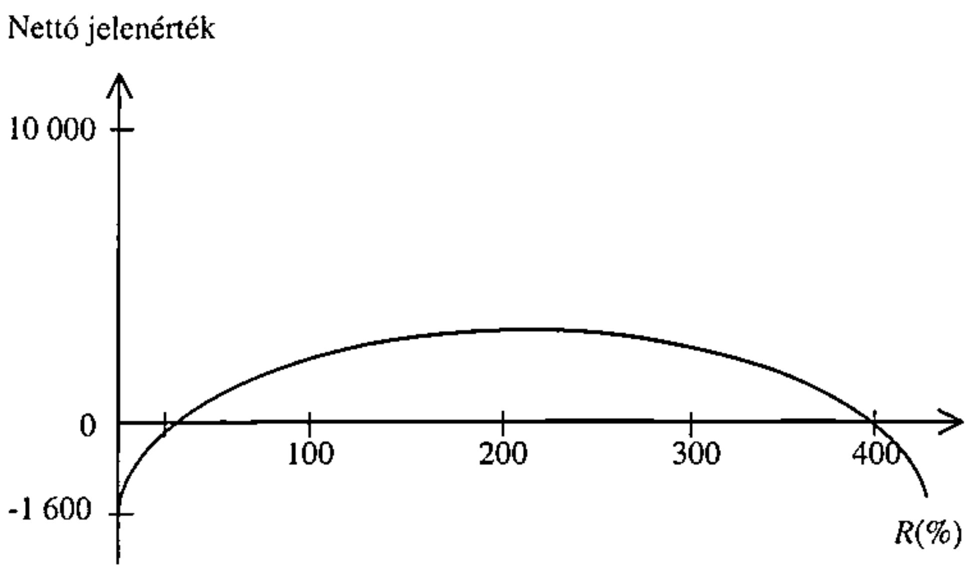
A negatív pénzáram a 2. periódusban az eszköz leszerelési és elszállítási költségét jelölheti. A belső megtérülési ráta kiszámításához az alábbi egyenletet megoldjuk R^*-ra:

[11] A belső megtérülési ráta többszöröződésének problémáira utal többek között Bierman, H. és Smidt, S.: Capital Budgeting and Problem of Reinvesting Cash Proceeds. Journal of Business, October 1957.

$$-1600+\frac{10\,000}{1+R^{*}}-\frac{10\,000}{\left(1+R^{*}\right)^{2}}=0$$

gyökökre 0.25 és 4.00 (25% és 400%) értéket kapunk. Mivel két gyökünk van, ezért az eljárás nem definiál egyértelműen egyetlen megtérülési rátát, azonban megjelöli azokat a pontokat, ahol a nettó jelenérték előjelet vált, amint a 20. ábrán látható:

20. ábra *Nettó jelenérték grafikon több gyök esetén*



Az ábráról látható, hogy mindaddig, amíg a megkövetelt megtérülési ráta 25 és 400% között van, a pénzáram tételeknek pozitív nettó jelenértékük lesz. Ennek megfelelően a nettó jelenérték ismérv könnyen feloldja az elfogadási problémát, a belső megtérülési ráta ismérv azonban nem. A következőkben igazoljuk, hogy a két ismérv közti különbséget a projekt által generált pénzáramok újra-befektetési feltételeinek különbözősége okozza.

2.7.3.3.4. Záró érték és újra-befektetési ráta feltételezések

A jelenértéket n periódusú értékké lehet alakítani egyszerűen úgy, hogy az összes tag jelenértékét megszorozzuk $(1+R)^n$−nel, ahol R a megkövetelt megtérülési ráta. Így tehát a pozitív nettó jelenértékkel rendelkező befektetési lehetőségek elfogadása megegyezik a pozitív nettó záróértékű projektek elfogadásával. A záróérték megközelítést olyan esetekben is használjuk, amikor a nettó jelenérték illetve belső megtérülési ráta ismérvet alkalmazó elfogadási-elutasítási döntések ütköznek egymással. Amint azt a záróérték megközelítés mutatja, ezek az ellentmondások az újra-befektetési rátákhoz kapcsolódó eltérő feltételezésekből adódnak. Ennek illusztrálására tekintsük ismét az előző példát R^0 feltételezett újra-befektetési rátával és a záróérték számítás felhasználásával; a záróérték összeadása megadja a projekt végső kimenetelét.

1. tábla *A pénzáram tételek időbeli alakulása*

	0	**1**	**2** (záróérték)
I_0	-1 600	$-1\,600\,(1+R^0)$	$-1\,600\,(1+R^0)^2$
C_1	-	10 000	$10\,000\,(1+R^0)$
C_2	-		-10 000

Számítással igazolható, hogy a záróérték összege negatív, ha 10%-os rátát alkalmazunk, nulla az érték 25%-os megtérülési rátánál, magasabb ráták mellett viszont pozitív (pl. 50%-os megtérülési rátánál 1 400 dollár).

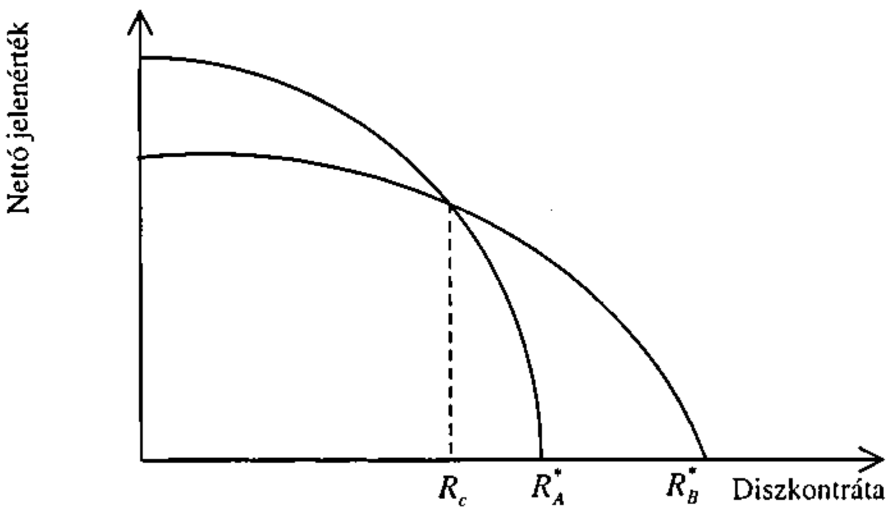
Mivel R^0 egyértelműen az újra-befektetési ráta szerepét játssza, ezért a példa azt bizonyítja, hogy a belső megtérülési ráta-számítások a belső megtérüléssel azonos újra-befektetési rátát tételeznek fel. Ugyanakkor a nettó jelenérték számításban a piaci kamatrátát feltételezik újra-befektetési rátaként.

A nettó jelenérték módszer újra-befektetési feltételeinek teljes bizonyosság és tökéletes tőkepiac feltételezése mellett van értelme. *Ilyen feltételek mellett ugyanis minden olyan projektet el kell fogadni, amely a piaci kamatrátát meghaladó megtérülést biztosít.* Az a tény azonban, hogy egy projekt a piaci rátát meghaladó hozamot biztosít, nem igazolja azt a feltételezést, miszerint a projekt által termelt profitot e magasabb ráta mellett lehetne újra befektetni. *Tökéletes piacon, ha a vállalat az összes megvalósítható projektet elfogadja, akkor az újra befektetett pénzáramok csak a piaci megtérülési rátát eredményezik.* Mivel a belső megtérülési ráta módszer feltételezi, hogy a projekt összes nettó pénzáramát a projekt belső megtérülési rátája mellett lehet újra befektetni, így e kritérium alkalmazása megegyezik azzal, ha a projekt belső megtérülési rátáját diszkonttényezőként használjuk. Ez viszont megegyezik ama feltevéssel, hogy nem létezik másik olyan befektetés, amely ugyanezt a rátát generálná. Amint azonban már hangsúlyoztuk: ha a vállalat egyszer elfogadta az összes megvalósítható projektet, akkor már nem áll rendelkezésre több olyan befektetés, melynek megtérülési aránya meghaladja a piaci rátát.

2.7.3.3.5. Egymást kölcsönösen kizáró befektetési lehetőségek

Az egymást kölcsönösen kizáró lehetőségeket esetenként különböző módon értékeli a jelenérték ismérv. Ennek az ellentmondásnak az okát mutatja grafikusan a 21. ábra, amely felrajzolja két – feltételezés szerint – egymást kölcsönösen kizáró projekt jelenérték profilját.

21. ábra *Egymást kölcsönösen kizáró projektek jelenértéke*



Az ábra azt mutatja, hogy R_c-nél kisebb diszkontráta esetén az A projektnek magasabb a nettó jelenértéke, míg R_c-nél nagyobb ráta esetén *B* projektnek nagyobb a nettó jelenértéke. Ezzel egyidejűleg az A projekt alacsonyabb belső megtérülési rátával rendelkezik $\left(R_A^*\right)$, mint a *B* változat $\left(R_B^*\right)$. Mivel már tudjuk, hogy ezek az ellentmondások abból erednek, hogy az újra-befektetési ráta feltételezések eltérőek, illetve, hogy ezt az ellentmondást úgy lehet feloldani, hogy megfelelő újra-befektetési ráta feltételezéssel élünk. Ha például a tőkeköltség kisebb mint R_c, akkor az A projektet kell választani; ha pedig nagyobb mint R_B^*, akkor egyik projekt sem elfogadható. Mindenesetre míg a nettó jelenérték számítás mindig helyesen oldja fel a problémát, addig a belső megtérülési ráta ismérv téves irányba orientálja a döntéshozókat.

3. KOCKÁZAT ÉS BIZONYTALANSÁG

3.1. Bizonyosság, kockázat és bizonytalanság: a döntéshozatal környezeti tényezői

A gazdálkodást érintő számítási eljárások a leggyakrabban azon az egyszerűsítő feltevésen alapulnak, hogy a vállalati döntéshozóknak pontos ismeretei vannak a termelésről, a keresletről, a tényezőköltségekről és a többi érvényes változóról. A legegyszerűbb input-output modellek például a következő feltételezésekre támaszkodnak:

- A releváns változók értéke teljes bizonyossággal ismert
- Tökéletes tőkepiac működik, amely rögzített kamatláb mellett tesz lehetővé kölcsönvételt és kölcsönadást
- Az áru- és munkapiacon tökéletes verseny van, amely meghatározza a béreket és árakat

- A vállalati termelési függvény a munka és az idő tekintetében csökkenő hozammal jellemezhető
- A vállalati cél a várható jövőbeli profit jelenlegi értékének maximalizálása.

A teljes bizonyosságot sugalló feltevésekkel szembeállíthatók a bizonytalan helyzet jellemző tulajdonságai, a következők szerint:

- Egyetlen kimenet helyett két vagy több cselekvési irány létezik, amely döntési lehetőségek sorozatát hozza létre
- A döntéshozó két vagy több cselekvési változatot vehet figyelembe, s érdekében áll az összes lehetséges döntési alternatíva feltárása
- A döntéshozó elhatározása nyomán két vagy több lehetséges kimenetre számíthatnak, a cselekvés objektív és szubjektív megfontoláson egyaránt alapulhat
- Létezik preferencia függvény, amely egyrészt parciálisan rendezi a lehetséges kimenetek sorozatát, másrészt származtatja az egyes kimenetekből származó hasznosságot. E szubjektív hasznosság ordinális és kardinális értelemben egyaránt megadható
- A döntéshozó az adott probléma lehetséges kimeneteit illetően bizonyos mérvű informáltsággal jellemezhető. Ha ez utóbbi teljes lenne, akkor a működés teljes bizonyosság mellett folyna, s minden alternatívának egyetlen kimenete volna. Amennyiben a döntéshozó infor-

máltsága elégtelen, akkor a működés bizonytalan körülmények között folyik s ilyenkor egy-egy alternatívának két vagy több kimenete van.

Ez utóbbi tulajdonság megnyitja az utat a bizonyosság, a kockázat és a bizonytalanság kapcsolatainak vizsgálata előtt. A bizonyosság úgy jellemezhető, hogy minden cselekvési alternatívával kapcsolatban tökéletes az informáltság, s előre tudjuk, hogy mindegyik alternatívának egyetlen kimenete van. Másik oldalról mind a kockázat, mind a bizonytalanság az egyes alternatívákkal kapcsolatos tökéletlen tudással jellemezhető, s várakozás szerint minden változatnak két vagy több lehetséges kimenete van.

Hogyan különböztethetjük meg a kockázatot a bizonytalanságtól? Az irodalomban két alapvető elhatárolás ismert: a tradicionális megkülönböztetés Knight[12] nevéhez fűződik, s ennek ma is vannak követői, a Sharpe[13] által alkalmazott distinctio azonban jelenleg inkább elfogadott. Knight szerint a kockázatot az objektív, a bizonytalanságot viszont a szubjektív valószínűségi eloszlásra kell alapozni. Ő az elsőbe a priori valószínűségeket sorol, ahol a lehetőségek általános elv alapján és statisztikai megfigyelésre alapozva számíthatók, s ahol az eshetőségeket a hasonló múltbeli események kimeneteinek empirikusan regisztrált gyakorisági eloszlásai mutatják. *Eszerint a döntési helyzet csak akkor jellemezhető kockázatosként, ha a döntéshozó ismeri a lehetséges kimenetek valószínűségét.* Ahhoz, hogy adott eseményt kockázatosnak minősíthessünk, annak ismétlődőnek kell lenni, s rendelkezni gyakorisági eloszlással. Knight szerint a

---

[12] Knight, F.H.: Risk, Uncertainty and Profit. Houghton Mifflin Company, New York 1965.

[13] Sharpe, W.F.: Portfolio Analysis and Capital Markets. McGraw-Hill, New York 1970.

szubjektív valószínűség s a bizonytalanság is a megítélésen alapuló becsléshez kapcsolódik, ahol is nincs objektív bázis az események osztályozásához. E megkülönböztetésnek ma is vannak követői. Van Horne[14] szerint a kockázat és bizonytalanság közötti különbség abban áll, hogy a kockázatot magukban foglaló szituációk bekövetkező eseményeinek valószínűsége ismert, bizonytalanság esetén viszont az előfordulás esélye nem ismert.

A Knight-féle megkülönböztetésnek van egy lényeges problémája[15]. Éppen az ismétlődő döntések esetében, ahol a döntéshozót irányíthatják a hasonló múltbeli akciók kimenetei, a statisztikai valószínűség csak akkor alkalmazható, ha a döntéshozó tudja: a döntés kimenetét befolyásoló jelenlegi és jövőbeli körülmények ugyanolyanok, mint a múltban végrehajtott hasonló döntések esetén érvényesülők. Amennyiben ez a tudás egyáltalán nem áll rendelkezésre, akkor az ilyen gyakorisági eloszlásra alapozott döntésekhez kapcsolt kimeneti valószínűségek maguk is olyan ítélkezés vagy szubjektív becslés függvényei lesznek, amelyek arra mutatnak, hogy a releváns állapotú összes esemény bekövetkezésének esélye a jövőben ugyanolyan lesz, mint a múltban volt. Így Knight megkülönböztetésével kapcsolatban az a probléma, hogy az objektív valószínűségi eloszlás nem alkalmazható a szokásos üzleti döntésekhez. A Knight-féle distinctio elfogadása lényegében eliminálja a „kockázat" szó használatát az üzleti döntésekkel összefüggésben.

---

[14] Van Horne, J.C.: Financial Management and Policy, Second Edition. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1970

[15] A két megkülönböztetés kritikai vizsgálatát adja, s a szintézis lehetőségét keresi Hoskins, C.G.: Distinctions between risk and uncertainty. Journal of Business Finance 1973/1

Sharpe szerint kockázatos helyzetről akkor beszélhetünk, ha az egyén hajlandó tetteit valószínűségi eloszlásra alapozni, egyébként bizonyosságról vagy bizonytalanságról lehet szó. Ő ebben a kontextusban nem tesz különbséget objektív és szubjektív valószínűségi eloszlás között, mivel úgy véli, hogy az üzleti döntésekre vonatkozó összes releváns valószínűségi eloszlás szükségképpen szubjektív. A Sharpe-féle bizonytalanságnak alávetett döntés esetében a döntéshozó szükségképpen képtelen lesz bármilyen becslést tenni a lehetséges kimenetek méretéről és azok valószínűségéről, vagy nem lesz képes a másokkal valamilyen módon összehasonlítható szituációk osztályozására. Természetesen a döntéshozó elvileg képes lehet a szubjektív valószínűségi eloszlás becslésére, mégsem lesz „hajlandó" megtenni azt. Ha ő erre nem hajlandó, akkor ez rendszerint arra mutat, hogy nem készült fel a racionális döntés szigorú kívánalmainak teljesítésére. Ez alól az lehet az egyetlen kivétel, ha az információgyűjtésből származó várható előnyök, s a valószínűségi eloszlás formálásához szükséges becslések megtételének jelenértéke kisebbnek mutatkozik, mint e feladatok teljesítésének költsége.

Mivel az üzleti döntések a Knight által értelmezett kockázat helyett az ő bizonytalanság fogalmának engedelmeskednek, így e megkülönböztetéssel a kockázat effektíve kizáratik az elemzésből. A másik oldalon a Sharpe-féle distinctio olyan definíciót tartalmaz, amely ténylegesen kizárja a „bizonytalanság" fogalmát a racionális döntéshozatalból. Mivel a két kategória egyaránt jelentéstartalommal bír, így egyik vagy másik kizárása nyilvánvalóan elfogadhatatlan. Ennek alapján nyilvánvaló az igény olyan alternatív megkülönböztetés iránt, amely a kockázatra és bizonytalanságra egyaránt használható jelentést ad a racionális üzleti döntéshozatal kontextusában.

A döntéshozók ritkán vannak olyan helyzetben, hogy pontos képük legyen adott vállalkozás jövőbeli profitját illetően. *A legjobb az, ha a jövőbeli költségek és előnyök lehetséges változataira becslés készül, s meghatározzák a beruházás magas vagy alacsony profitjának bekövetkezési valószínűségét.*

Bizonyosságról akkor beszélünk, ha a várakozások egyetlen bekövetkezés feltevésében öltenek testet. A döntéshozó ekkor a jövőbeli profitot egyetlen értékkel, s nem alternatív kimenetek sorozatával határozza meg.

A kockázat olyan választást ír le, amelyben a profit teljes bizonyossággal nem látható előre, ugyanakkor az alternatív bekövetkezések a hozzárendelt valószínűséggel együtt ismertek. Más szavakkal kifejezve: kockázatos az a beruházás, amelynek profit eloszlása ismert. Mivel az eloszlás egyaránt becsülhető az objektív vagy a szubjektív valószínűség bázisán, így az utóbbi bevezetése jelentősen csökkenti a kockázat és bizonytalanság közötti megkülönböztetés jelentőségét. Szubjektív valószínűség hozzárendelése döntési problémához megengedi egy bensőleg bizonytalan szituáció kockázatos választássá transzformálását.

A köznapi szóhasználatban a kockázat egyet jelent a hazardírozással, a veszteség keletkezésének veszélyével, s általában a balszerencsét vagy a „kárnak kitettséget" jelöli. A *risicum* szóval jelölt latin eredeti mindazonáltal bizonyos pozitív konnotációkat is hordoz, hiszen eredeti alakjában a szerencse esélyére utalt, a jóra és rosszra egyaránt. Ha megmaradunk a kockázat tradicionális jelentésénél, akkor azonosítjuk azt a megtérülés szóródásával, azaz a várható megtérüléstől való pozitív és negatív eltérésekkel. A másik értékelési mód szerint kockázatnak a nem kívánatos vagy hátrányos kimeneteket tekintjük. A veszteség lehetőségével vagy hátrányos bekövetkezéssel azonosított kockázatot az irodalomban „downside risk" elnevezéssel illetik, amely közelíthető a veszteség valószínűségével, várható értékével és az ún. félvarianciával (semi-variance)[16].

A bizonytalanság viszont közvetlenül nem vonatkozik a veszteség bekövetkezésének esélyére, hanem egyszerűen azt fejezi ki, hogy egy esemény kimenete nem bizonyos, azaz nem biztos, hogy megtörténik. Ezzel kongruens módon a bizonytalanságot úgy definiálhatjuk, mint ami akkor érvényesül, ha több lehetséges kimenet van, függetlenül azok hátrányos vagy kívánatos voltától. Előfeltevés szerint a bizonytalanság foka a kimenetek számának tükröződése, továbbá kifejezi a kimenetek szóródási sávját és az azokhoz tartozó valószínűségeket. A szórás, amit rendszerint a Sharpe-féle kockázat mértékeként alkalmaznak, valójában egészen jó mértéke az ilyen bizonytalanságnak.

[16] A kockázat mérőszámainak részletező vizsgálatát szemléletesen mutatja be Stephen Lumby: Investment Appraisal and Financing Decisions. Chapman and Hall 1991.

3.2. A bizonytalanság melletti döntés kritériumai[17]

Abban az esetben, ha a döntéshozó egyedi szituációval áll szemben, akkor bármilyen kritérium alkalmas a döntés igazolására. Több olyan kritérium is rendelkezésre áll, ami ilyen helyzetekben alkalmazható. Ezek a következők: a Wald-féle maximin, a maximax, a Hurwitz-féle optimizmus, a Savage-féle hátrány, valamint a Laplace-féle elégtelen ok-kritérium. Részletes vizsgálatukra az alábbi táblában közölt adatokra támaszkodva kerül sor.

2. tábla *Alternatív stratégiák sorolása*

adatok dollárban

	Lehetséges kimenetek		
Alternatív beruházási stratégiák	**Gyors növekedés x_1**	**Állandó növekedés x_2**	**Lassuló növekedés x_3**
Részvények, S_1	1 200 000	1 020 000	840 000
Kötvények, S_2	1 100 000	1 060 000	1 010 000

[17] A bizonytalanság melletti döntés kritériumainak áttekintését lásd Phillipatos, G.C.: Financial Management: Theory and Techniques. Holden Day 1973.

3.2.1. A Wald-féle maximin kritérium

A maximin kritérium (a minimális értékek maximuma), amelyet Abraham Wald fejlesztett ki, konzervatív döntési szabálynak tekinthető, mivel a döntéshozó bizonytalan kimeneteket tapasztalva magát alacsony aspirációs szintre állítja be. E kritériumnak megfelelően a döntéshozó azt az alternatívát választja, amely a minimális várható megtérülési értékek közül a maximális értéket adja. A példában az S_1 kifizetési stratégia minimális értéke 840 000 dollár, az S_2 stratégia értéke pedig 1 010 000 dollár. Ennek alapján a döntéshozó az S_2 változatot, a kötvénybe irányuló befektetést választja, mert a minimális értékek közül ez a megtérülés a maximális.

A maximin elv felhasználható minimalizáló döntésekhez is. Például alkalmazható veszteség minimalizálás céljára. Ebben az esetben azt a stratégiát választjuk, amely a lehetséges maximumok közül a minimális értéket adja. Ilyetén alkalmazás esetén a maximin kritérium minimax (a maximális értékek minimuma) döntési elvvé válik. *A maximin és a minimax kritérium alkalmazás a döntéshozatalban nagyfokú kockázati tartózkodásra utal. Az ilyen döntéshozók a legrosszabbra számítanak, s túlélési szándékuk védelmet igényel a leggyengébb teljesítménnyel szemben. Pesszimizmusuk a lehetséges legrosszabb kimenetek közüli legjobb választásra indítja őket.*

3.2.1.1. A maximax kritérium

A maximax kritérium (a maximális értékek maximuma) alkalmazása a döntéshozót igen optimistának, csaknem eufórikusnak mutatja. E szabály alapján a döntéshozó azt a stratégiát választja, amely a maximális lehetséges kimenetek közül a maximálisat adja. A példában az S_1 stratégia maximális értéke 1 200 000 dollár, az S_2 stratégiáé pedig 1 100 000 dollár. Eszerint a döntéshozó a maximax kritérium alapján az S_1 részvénybe irányuló beruházási változatot választja.

Ehhez kapcsolódó kritérium a *dominancia elve*, amit nagyszámú alternatíva közüli választásra használnak, a döntéshozó preferenciájának figyelembe vételével. *Egy alternatív cselekvési módot akkor tekintünk dominánsnak, ha úgy preferáljuk egy másikkal szemben, hogy nem vagyunk tekintettel a kimenetre. E folyamat révén a döntéshozó a kifizetési mátrix valamennyi dominált elemét elvetheti.* Mivel a megmaradó stratégiák jobbak az elvetetteknél, így a dominancia elv maximalizáló folyamatként fogható fel. Mindazonáltal ez az elv nem alkalmas egyetlen stratégia kiválasztására, így szükségképpen ki kell egészíteni más kritériumokkal.

3.2.2. Hurwitz optimizmus kritériuma

A maximax optimista és a maximin pesszimista kritériumának szélsősége késztette Leonid Hurwitz-ot a kettő közötti mérsékelt szabály megalkotására. Hurwitz javaslata alapján a racionalitás megjeleníthető a döntési folyamatban olyan α optimizmus koefficienssel, amely a döntéshozó optimizmusát 0 és 1 közötti skálán méri. Az $\alpha = 1$ érték az abszolút optimizmus, míg az $\alpha = 0$ érték az abszolút pesszimizmus mutatószáma. Amenynyiben a maximális kifizetést α, a minimális kifizetést $1 - \alpha$ tényezővel szorozzuk és a kapott eredményeket összegezzük, akkor létrejön a Hurwitz kritérium.

Számításokra alapozva a maximális összeget mint a legjobb cselekvési változatot választjuk ki. A Hurwitz kritérium kialakítását példákon keresztül mutatjuk be. Az S_1 stratégiában a maximális kifizetés 1 200 000 dollár, a minimális 840 000 dollár. Az S_2 cselekvési változatban a maximális kifizetés 1 100 000 dollár, a minimális pedig 1 010 000. Most feltételezzük, hogy a döntéshozó $\alpha = 0.8$ és 1- $\alpha = 0.2$ koefficienseket alkalmaz. Milyen döntést hoz a Hurwitz kritérium alapján? A válasz a következő számítással adható meg:

$$E(S_1) = 1\,200\,000\,(0.8) + 840\,000\,(0.2) = 1\,128\,000$$

$$E(S_2) = 1\,100\,000\,(0.8) + 1\,010\,000\,(0.2) = 1\,082\,000$$

Ennek alapján kiderül, hogy a Hurwitz kritérium szerint az S_1 stratégiát, azaz a részvénybe irányuló beruházást célszerű választani. Egyértelmű az, hogy az α és 1-α szélső értékeinek behelyettesítésével újra megkapnánk a maximax és a maximin kritériumot. Ha viszont közbülső értékeket használnánk, akkor az S_1 és S_2 stratégiát összekapcsoló közömbösségi görbéket (bizonyossági egyenértékesek) kapnánk.

3.2.3. Savage hátrány kritériuma

A Savage által megfogalmazott hátrány kritérium azon a magatartási feltételezésen alapul, hogy a döntéshozó az összes lehetséges kimenet értékelésekor a legkielégítőbbet preferálja s hátrányt tapasztal, ha ez a kimenet nem materializálódik. A döntéshozó kénytelen kiszámítani a különbséget a lehetséges maximális kifizetés valamint a között, ami a valóságban materializálódhatna.

Savage elvének megfelelően meg kell kísérelnünk a differencia minimalizálását. Savage hátrány mátrixának megszerkesztése érdekében meg kell keresnünk a kifizetési differenciákat a legnagyobb és az összes többi kifizetés között. Például az S_1 stratégia esetében a legnagyobb kifizetési érték az x_1 kimenethez tartozik. Ha kivonjuk a maximális értékből az x_2 és x_3 kimenet kifizetési értékét ugyanazon stratégiára vonatkozóan, akkor megkapjuk a hátrány mátrix első sorának elemeit. Ugyanilyen módon határozhatók meg a második sor elemei is. A mátrixot az alábbi tábla tartalmazza.

3. tábla *A Savage kritérium illusztrálása*

Alternatív beruházási stratégiák	Lehetséges kimenetek		
	Gyors növekedés x_1	**Állandó növekedés x_2**	**Lassuló növekedés x_3**
Részvények, S_1	0	180 000	360 000
Kötvények, S_2	0	40 000	190 000

A hátrány mátrix megszerkesztése után Savage javaslata szerint, a döntéshozó a minimax kritériumot fogja alkalmazni a maximális lehetséges hátrány minimalizálása érdekében. Az S_1 stratégiában a maximális hátrány 360 000 dollár, míg az S_2 stratégiában 190 000 dollár. A minimax szabály alapján ahhoz, hogy a döntéshozó hátránya minimális legyen, az S_2 stratégia választása – a kötvény beruházás választása célszerű.

3.2.4. A Laplace-féle elégtelen ok kritérium

A Laplace kritérium azon a megfontoláson alapul, hogy mivel bizonytalanság esetén nem ismerjük a jövőbeli kimenetek valószínűségét, ezért minden kimenetet azonos valószínűségűnek kell tekintenünk. Tekintettel arra, hogy példánkban három lehetséges kimenet van, ezért mindegyiket 1/3 valószínűségűnek kell feltételeznünk. A két stratégia várható értéke a Laplace kritérium alapján a következők szerint számítható:

$$E(S_1) = 1\,200\,000\,(1/3) + 1\,020\,000\,(1/3) + 840\,000\,(1/3) = 1\,020\,000$$

$$E(S_2) = 1\,100\,000\,(1/3) + 1\,060\,000\,(1/3) + 1\,010\,000\,(1/3) = 1\,153\,332$$

Mivel a Laplace kritérium alapján az S_2 stratégia választása indokolt, így a kötvénybe célszerű beruházni.

3.2.5. A kritériumok összehasonlítása

A kifejtés elején szó volt arról, hogy a bizonytalanság körülményei között a döntési kritériumok nagy számúak és változékonyak. Bemutattuk és megvizsgáltuk az ismert kritériumokat, s azt a módot, ahogyan alkalmazhatók az alternatív cselekvési változatok sorolásában. Vizsgálódásunk eredménye nem tekinthető egyértelmű konklúziónak, ahogy azt a 4. tábla mutatja.

Az S_2 stratégiát az ötből három kritérium alapján preferálják. Ez az eredmény az egyértelműség hiányára mutat, s többé-kevésbé intuíción alapul.

4. tábla *A választási kritériumok összehasonlítása*

Kritérium	**Kiválasztott stratégia**	
	Beruházás részvénybe S_1	**Beruházás kötvénybe** S_2
Wald maximin	Nem	Igen
Maximax	Igen	Nem
Hurwitz optimizmus koefficiens ($\alpha = 0.8$)	Igen	Nem
Savage hátrány	Igen	Igen
Laplace elégtelen ok	Nem	Igen

3.2.6. Összefoglalás és áttekintés

Azok a döntési módszerek, amelyek a bizonytalanságot kockázattá formálják, a szubjektív valószínűségek becslésén alapulnak. Az üzleti döntéshozatalban azonban számos olyan eset létezik, amelyben ez az átformálás kivihetetlen, s a döntéshozó a bizonytalanság nyers formájának megragadására kényszerül. Az előzőek ilyen helyzeteket mutattak be. A kritériumok nem kompatibilisek egymással, s feloldhatatlan eltéréseket közvetítenek a döntéshozó felé. Mindezek ellenére, *ha ezeket a bizonytalansággal összefüggésben konzisztensen alkalmazzák, akkor a döntéshozó megfelelő segítséget kap a gondolkodás folyamatában, illetve a döntésekben foglalt ítélet stabilabb lehet.*

Wald maximin kritérium:

> E kritérium konzervatív döntési szabályon alapul; arra a megfigyelésre támaszkodik, hogy ha a cselekvés bizonytalanság közepette történik, akkor a döntéshozó aspirációs szintje alacsony. Ennek megfelelően, a maximalizáló szabály szerint ki kell választani azt a cselekvési módot (beruházás eszközlését), amely a minimális (legrosszabb) kimenetek közül a legjobb eredményt (maximum) ígéri. Ezzel szemben, ha minimalizálási problémaként tekintjük, akkor a döntési szabály úgy szól, hogy ama beruházásokat kell elfogadni, amelyek a maximális értékek közül a minimális értékű kimenetet ígérik.

Maximax kritérium:

> Ez a kritérium a maximin attitűd megfigyelésén alapul. Ez optimista megközelítés, amely alapján a maximális értékek közül is a legnagyobb kimenet kiválasztása történik, azaz a legjobbak közül is a legjobb kiemelése. E stratégiához kapcsolódik a dominancia elve. Egy cselekvési mód – minden egyes lehetséges állapotban – akkor tekinthető dominánsnak, ha annak kimenete preferált a többi

alternatíva kimenetével szemben. Ilyen helyzetben a jobb által domináló alternatíva eltávolítható a döntési mátrixból.

Hurwitz optimizmus elve:

Felismerve azt, hogy az optimizmus-pesszimizmus határ nem merev, a Hurwitz kritérium megengedi a döntéshozónak az érzületeit megfelelően tükröző, 0 és 1 közötti koefficiens választását. Az alternatívák maximális kifizetését azután szorozni kell e koefficienssel, a minimális kifizetést pedig e koefficiens komplementerével, majd a szorzatokat minden alternatívára vonatkozóan összegezni kell. Ezen összegek maximuma adja az optimális cselekvési módot.

Savage hátrány kritérium:

A hátrány természetéből kiindulva Savage olyan elvet javasol, amely segít minimalizálni a hátrány okozta megrázkódtatást. A hátrányokat tartalmazó mátrix a kifizetési mátrixból származtatható, amelyben a lehetséges legmagasabb megtérülési értéket adó alternatívák helyezkednek el; a hátrány meghatározásához képezni kell a legmagasabb és a többi alternatíva közötti különbséget. A legvonzóbb cselekvési irány kiválasztásához e differenciákra a maximax kritériumot kell alkalmazni.

Laplace elégtelen ok-kritériuma:

E kritérium azt mondja, hogy ha nincs ok mást feltételezni, akkor az összes lehetséges bekövetkezést azonos valószínűségűnek kell tekinteni, s ennek alapján a legmagasabb várható megtérülést biztosító alternatívát szükséges választani.

Kérdéses, hogy a fenti kritériumok egyike vagy másika tekinthető-e korrektebbnek. E kérdésre azért nem adható egyértelmű válasz, mert *az elv kiválasztása nagyban függ a döntéshozó előzetes feltevéseitől. Minden elvnek van bizonyos előnye, de hátránya is, egy vagy több jellemző szempontjából, a szubjektív döntési folyamat megvilágítására mindegyik alkalmas.*

3.3. Időbeli kimenetek ismert valószínűségekkel

Feltételezzük, hogy megfelelő információ áll rendelkezésre a jövőbeli lehetséges kimenetekről és azok relatív valószínűségéről. $S_{1..4}$ a lehetséges kimeneteket jelöli, $a_{1..4}$ az egyes alternatívákat. Az adatok 10 ezer dollárban értendők.

	S_1	S_2	S_3	S_4
a_1	18	11	11	10
a_2	16	16	16	16
a_3	17	20	8	17
a_4	9	12	17	16

A négy kimenethez az alábbi értékek társíthatók:

$$p(S_1) = 0.3 \qquad p(S_2) = 0.4 \qquad p(S_3) = 0.2 \qquad p(S_4) = 0.1$$

E többlet információ ismeretében vajon melyik alternatívát kellene választani? Ha a jövőt leegyszerűsítve tekintjük, akkor feltételezzük, hogy a várt jövőbeli esemény pontosan az, ami a leginkább valószínűsíthető. Így, ha az S_2 kimenetnek van a legnagyobb előfordulási valószínűsége, akkor feltételezhetjük, hogy az S_2 valójában előfordul. Ebben az esetben a 110 000 dollár költséggel járó a_l változat a legkevésbé költséges a négy rendelkezésre álló alternatíva közül. Ez az elv különösen megnyerő lenne azokban az esetekben, ahol az egyik jövőbeli kimenet sokkal inkább valószínű, mint az összes többi lehetőség.

3.3.1. A várakozások elve

Az előzőekben véletlen változó várható értékének meghatározását tárgyaltuk. Emlékeztetőül az alapvető összefüggés:

$$E(x) = \sum x \cdot P(x)$$

A várakozások elve alapján azt az alternatívát kell kiválasztani, amely minimális várható költséget (vagy maximális várható profitot/árbevételt) jelent. A példa adataival az alábbi eredményeket kapjuk:

$$E(a_1) = 0.3(18) + 0.4(11) + 0.2(11) + 0.1(10) = 13.0$$

$$E(a_2) = 0.3(16) + 0.4(16) + 0.2(16) + 0.1(16) = 16.0$$

$$E(a_3) = 0.3(17) + 0.4(20) + 0.2(8) + 0.1(17) = 16.4$$

$$E(a_4) = 0.3(9) + 0.4(12) + 0.2(17) + 0.1(16) = 12.5$$

ahol $E(a_1)$ az a_1 alternatíva várható költsége. A négy változatból az a_4 választása volna a legcélszerűbb, mivel az jár a minimális várható költséggel (125 000 dollár). Megjegyezzük, hogy a korábban tárgyalt Laplace elv annyiban a várakozások elvének egy speciális esete, hogy ott egyszerűen minden egyes lehetséges kimenet egyenlő valószínűségét feltételezik.

A várakozások elvén alapuló értéket amiatt kritizálják, hogy e megközelítés csak akkor igaz, ha a „próbálkozásokat" nagyon sokszor ismétlik. Azaz, pénzérme feldobásakor annak a relatív valószínűsége, hogy írás lesz, a 0.5-öt közelíti, amint a dobások száma egyre nő. Amennyiben a próbálkozások száma nagyon magas, akkor megalapozottan bízhatunk abban, hogy az írás relatív gyakorisága valóban 0.5 lesz. Másrészt viszont ez a bizalom nem helytálló, ha a dobások száma csekély. Bizonyos típusú döntéseknél – például vállalati expanzió finanszírozásakor – e várakozásnak kevés alapja van, mivel ilyen típusú döntést ritkán hoznak. Jóllehet, a cég nem szembesül nagy számú ismétlődő döntéssel, az elv mégis használható több, eltérő döntés esetében. Még ha a döntés egyedi is, a várakozások elve az egyedüli módja az ilyen jellegű döntések megközelítésének (a valószínűségi értékek ismeretében); azt feltételezzük tehát, hogy a döntés ismétlődő, s erre alapozva minimalizálható a várható költség, vagy maximalizálható a várható árbevétel vagy profit.

3.3.2. Várakozás-variancia

Ez az elv az egyes alternatívák várható értékének variabilitására összpontosít. E nézőpont szempontjából a kimenetek változékonysága a legfontosabb, s ha kivitelezhető, akkor célszerű a bizonytalanság e mértékének minimalizálása. A várakozás-variancia-elv szerint – ha két alternatívának ugyanaz a várható költsége és megtérülése – azt kell választani, amelyiknek a legkisebb a várható költsége vagy a legnagyobb a várható megtérülése.

A továbbiakban bemutatjuk a variancia meghatározását. *VAR(x)* varianciája a következők szerint számítható:

$$VAR(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

ahol

$$E(x^2) = \sum_x x^2 p(x)$$

és

$$[E(x)]^2 = \left[\sum_x x p(x)\right]^2$$

A példa adatait felhasználva a véletlen változó (költség) az egyes alternatívákra a következőként írható fel:

$$VAR(a_1) = [0.3(18)^2 + 0.4(11)^2 + 0.2(11)^2 + 0.1(10)^2] - (13)^2$$
$$= 179.8 - 169 = 10.8 \text{ vagy } 108\,000 \text{ dollár}$$

$$VAR(a_2) = [0.3(16)^2 + 0.4(16)^2 + 0.2(16)^2 + 0.1(16)^2] - (16)^2$$
$$= 256 - 256 = 0$$

$$VAR(a_3) = [0.3(17)^2 + 0.4(20)^2 + 0.2(8)^2 + 0.1(17)^2] - (16.4)^2$$
$$= 288.4 - 269 = 19.4 \text{ vagy } 194\,000 \text{ dollár}$$

$$VAR(a_4) = [0.3(9)^2 + 0.4(12)^2 + 0.2(17)^2 + 0.1(16)^2] - (12.5)^2$$
$$= 165.3 - 156.3 = 9.0 \text{ vagy } 90\,000 \text{ dollár}$$

Az eredményekből látható, hogy a variabilitás akkor minimális, ha az a_2 változatra esik a választás, mivel annál a lehetséges bekövetkezések szórása nulla. Ezzel szemben az a_2 várható költsége (160 000 dollár) lényegesen nagyobb, mint az a_1 változaté (130 000 dollár), vagy az a_4 alternatíváé (125 000 dollár), s így az a_2 kiválasztása a célszerű, hacsak nem társítanak nagyobb beleértett költséget a lehetséges jövőbeli események variabilitásához.

Mivel a várható érték és a variancia ritkán egyezik meg a két vagy három alternatíva esetében, így a vázolt elv valójában a várakozás-variancia függvény maximalizálását célozza. Illusztrálásképpen nézzük meg az a_2 és a_4 alternatívát!

$$E(a_2) = 160\,000 \qquad VAR(a_2) = 0$$
$$E(a_4) = 125\,000 \qquad VAR(a_4) = 90\,000$$

Hogy meghatározzuk, melyik alternatíva részesítendő előnyben, először is döntenünk kell egységnyi várható költségének a varianciához viszonyított relatív értékéről, azaz hasznosságáról. Tegyük fel például, hogy a várható költség egységnyi növekedés a variancia 0.5 egységnyi növekedésének felel meg. Ebben az esetben az a_2 és a_4 várható költségének 35 000 dolláros különbségét felülmúlja a varianciák 45 000 dolláros differenciája. Az így meghatározható burkolt költséget számítsuk ki mind a négy alternatívára!

$$C'(a_1) = 130\ 000 + 0.5(108\ 000) = 184\ 000$$

$$C'(a_2) = 160\ 000 + 0.5(0) = 160\ 000$$

$$C'(a_3) = 164\ 000 + 0.5(194\ 000) = 261\ 000$$

$$C'(a_4) = 125\ 000 + 0.5(9\ 000) = 170\ 000$$

Következésképpen, ha 2:1 arányt tételezünk fel az azonos éves költség és a variancia között, akkor a teljes költség az a_2 választása esetén minimális. Érdemes megjegyezni, hogy az értékek tartományát gyakran a variancia becsléseként használják az alábbiak szerint:

$$\text{Tartomány}\,(x) = x_{\max} - x_{\min}$$

5. tábla *Befektetési alternatívák összehasonlítása*

adatok dollárban

Alternatíva	**Maximum**	**Minimum**	**Tartomány**	**Variancia**
a_1	180 000	100 000	80 000	108 000
a_2	160 000	160 000	0	0
a_3	200 000	80 000	120 000	194 000
a_4	170 000	90 000	80 000	90 000

Bár a tartomány csak közelítő mértéke a szórásnak, mégis hasznos lehet akkor, amikor az elemző nem ismeri a variancia számítási módját. *A tartomány annál jobban közelíti a varianciát, minél nagyobb a lehetséges kimenetek száma.*

3.3.3. Aspirációs szint

Ez az elv az elfogadhatóság minimális szintjének meghatározását célozza. Ennek alapján azt az alternatívát kell kiválasztani, amely úgy maximalizálja a valószínűséget, hogy e szintnek megfelel vagy meg is haladja azt. Illusztrációs célból azt feltételezzük, hogy a döntéshozó minimalizálni kívánja annak valószínűségét, hogy az éves azonos költség meghaladja az 150 000 dollárt. Ez egyenértékű azzal a követelménnyel, amely szerint maximalizáljuk annak valószínűségét, hogy a költségek nem haladják meg a 150 000 dollárt. A valószínűségek a következők szerint számíthatók:

$$p[(a_1) > 150000] = 0.3$$

$$p[(a_2) > 150000] = 0.3 + 0.4 + 0.2 + 0.1 = 1.0$$

$$p[(a_3) > 150000] = 0.3 + 0.4 + 0.1 = 0.8$$

$$p[(a_4) > 150000] = 0.2 + 0.1 = 0.3$$

Így az aspirációs szintnek akkor tesznek eleget, ha vagy az a_1 vagy az a_4 változatot választják.

3.3.4. Az eredmények összefoglalása

Az egymást kölcsönösen kizáró alternatívák közüli választás alapkérdése az, hogy melyik elvet (kritériumot) alkalmazzák a döntéshozatalban. A példa eredményei alapján a következő eredmények adódtak:

6. tábla *Az alternatívák egybevetése*

Választott elv	**Javasolt alternatíva**
Legvalószínűbb jövőbeli esemény	a_1
Várakozás	a_2
Várakozás-variancia	a_3
Aspirációs szint	a_4

3.4. A pénzáram várható értéke és szórása

A várható pénzáram számítása úgy történik, hogy a pénzáram aktuális kimeneteit súlyozzuk a bekövetkezés valószínűségével. E számítás a következő formulával végezhető:

$$E(C) = \overline{C} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot C_i \tag{1}$$

ahol

$E(C)$ = pénzáramok várható értéke

$\overline{C}$ = várható vagy átlagos pénzáram

C_i = pénzáram lehetséges értéke

p_i = i – edik pénzáram lehetséges bekövetkezési valószínűsége

n = pénzáramok lehetséges kimenete

A fenti formulát alkalmazva kiszámíthatjuk a vállalat *A* és *B* projektjének várható pénzáramát.

7. tábla Vállalati pénzáram előrejelzés különböző üzleti kondíciók mellett

Üzleti kondíciók	**„A" projekt**		**„B" projekt**	
	Valószínűség	**Pénzáram (dollár)**	**Valószínűség**	**Pénzáram (dollár)**
Mély recesszió	0.10	4 500	0.10	3 000
Enyhe recesszió	0.20	5 250	0.25	4 500
Normális feltételek	0.40	6 000	0.30	6 000
Enyhe fellendülés	0.20	6 750	0.25	7 500
Erős fellendülés	0.10	7 500	0.10	9 000
Projekt költség		-3 000		-5 000
Projekt időtartam (év)		1		1

$$E(C_A)=\overline{C}_A=4\,500(0.10)+5\,250(0.20)+6\,000(0.40)+$$
$$6\,750(0.20)+7\,500(0.10)$$
$$=450+1\,050+2\,400+1\,350+750$$
$$=6\,000$$

$$(C_B)=\overline{C}_B=3\,000(0.10)+4\,500(0.25)+6\,000(0.30)+$$
$$7\,500(0.25)+9\,000(0.10)$$
$$=300+1\,125+1\,800+1\,875+900$$
$$=6\,000$$

Látható, hogy az ***A*** és ***B*** projekt azonos várható pénzárama – egyéb tényezőket változatlannak tekintve – egyformán érdemessé teszi azokat.

A szórás számítása a következők szerint történik:

- Mindegyik projektre képezni kell az aktuális pénzáram és a várható érték különbségét.
- Venni kell a képzett különbségek négyzetét.
- A négyzetes különbségeket súlyozni kell a vonatkozó valószínűségekkel.
- Venni kell az így kapott értékek összegét, amit varianciának neveznek.
- A variancia négyzetgyökét számítva megkapjuk a tervezett pénzáram szórását.

E műveletsor a következő formulával fejezhető ki:

$$VAR(C)=\sigma_C^2=\sum_{i=1}^{n}\left(C_i-\overline{C}\right)^2 p_i \qquad (2)$$

ahol

$$\sigma_C^2 = \text{pénzáram variancia}$$
$$\sigma_C = \text{pénzáram szórás}$$

A formula alkalmazásával kiszámítható a vállalat döntéshozói által vizsgált projektek varianciája és szórása.

$$\begin{aligned}
VAR\,(C_A)=\sigma_A^2 &= (4\,500-6\,000)^2\cdot(0.10)+(5\,250-6\,000)\cdot(0.20)+\\
&\quad(6\,000-6\,000)\cdot(0.40)+(6\,750-6\,000)\cdot(0.20)+\\
&\quad(7\,500-6\,000)^2\cdot(0.10)\\
&= 225\,000+1\,125\,000+0+1\,125\,000+2\,25\,000\\
&= 675\,000
\end{aligned}$$

$$\sigma_A=\sqrt{\sigma_A^2}=\sqrt{675\,000}$$
$$\sigma_A=822$$

$$\begin{aligned}
VAR\,(C_B)=\sigma_B^2 &= (3\,000-6\,000)^2\cdot(0.10)+(4\,500-6\,000)\cdot(0.25)+\\
&\quad(6\,000-6\,000)^2\cdot(0.30)+(7\,500-6\,000)\cdot(0.25)+\\
&\quad(9\,000-6\,000)^2\cdot(0.10)\\
&= 900\,000+5\,62\,500+0+562\,500+900\,000\\
&= 2\,925\,000
\end{aligned}$$

$$\sigma_B=\sqrt{\sigma_B^2}=\sqrt{2\,925\,000}$$
$$\sigma_B=1\,710.26$$

3.4.1. Várható nettó jelenérték

A bizonytalanság körülményei között annak ellenére, hogy tökéletes tőkepiaci viszonyokkal számolunk, az NPV módszer beruházásértékelésbeli alkalmazása nem feltétlenül vezet optimális beruházási döntéshez, vagy a részvényesek gazdagságának maximalizálásához, legfeljebb a várható gazdagság maximalizálását eredményezheti. Amikor az NPV értékelési módszer felépítését és módszerét vizsgáljuk, akkor kevés figyelmet fordítunk arra, miként történik a projekt nettó pénzáramának származtatása. A gyakorlatban kicsi annak az esélye, hogy a döntéshozók az egyes évek nettó pénzáramára egyetlen értéket becsülnének, ehelyett lehetséges értékek sorozatát valószínűsítik. Például, adott projektnek 1 000 dollár a kezdeti kiadása, élettartama 3 év, a nettó pénzáram szintje ellenben bizonytalan, s függ ama ágazat működési viszonyaitól, ahol a vállalat gazdálkodik.

Az alábbi számpélda egyszerű illusztrációt ad éves nettó pénzáram becslésére, három működési állapot – fellendülés, normális üzletmenet és visszaesés – alapul vételével. Az adatokból a projekt *NPV* értéke minden állapotra meghatározható a bekövetkezés valószínűségének becslésére támaszkodva. Eme *NPV* értékek felhasználásával megkaphatjuk a projekt várható *NPV* értékét. Az így kapott várható *NPV* [*E(NPV)*] mutató beruházási értékelési szabályként alkalmazható a döntésekben.

3.4.2. Számszerű illusztráció

A vállalat mérlegeli termelő berendezés vásárlását, aminek beszerzési költsége 1 000 dollár, s várhatóan 3 évig üzemel. Az éves nettó bevétel bizonytalan, s becslése függ az adott ágazat működési viszonyaitól. A döntéshozók a következő becslést végezték:

8. tábla *Éves nettó bevétel adatok becslése*

Működési állapot / Év	0	1	2	3
I. Fellendülés	-1 000	+500	+700	+980
II. Normális	-1 000	+500	+600	+700
III. Visszaesés	-1 000	+300	+300	+250

A vállalat általában 10%-os diszkontrátát alkalmaz a projektek értékeléséhez abban a hitben, hogy az pontosan tükrözi a projekt kockázatát. E bázisra támaszkodva a projekt *NPV* értékei az alábbiak szerint számíthatók:

9. tábla *Nettó jelenérték eredmények*

Állapot	NPV
I.	+769
II.	+477
III.	-291

A legújabb becslések szerint az ágazat működési viszonyaira az alábbi bekövetkezési valószínűségek vélelmezhetők:

10. tábla *Állapot valószínűség értékek*

Állapot	Valószínűség
Fellendülés	0.20
Normális	0.60
Visszaesés	0.20

Erre alapozva a vállalat becsülheti a projekt várható *NPV* értékét:

11. tábla *Várható nettó jelenérték eredmény*

Állapot	Valószínűség		NPV		
I.	0.20	·	+769	=	+153.8
II.	0.60	·	+477	=	+286.2
III.	0.20	·	-291	=	-52.2
				E(NPV):	+387.8

Mivel a projekt várható nettó jelenértéke pozitív, így az elfogadható. A példa alapján fontos megjegyezni, hogy a döntéshozó feladata nem merül ki a projekt éves nettó pénzáramának becslésében, hanem az egyes állapotok bekövetkezési valószínűségét is becsülnie kell[18].

3.4.3. Az E(NPV) korlátjai

A várható NPV koncepciója alkalmas a bizonytalanság körülményei közötti projekt-értékelésre, mivel az a javasolt projekt teljesítményének várható értékét adja. Ugyanakkor fontos felismerni, hogy e mutató nem veszi figyelembe a kockázatot; az összes, amit az E(NPV) számítás kifejez, az a beruházás várható teljesítményének mértéke, márpedig a kockázat annak valószínűsége, hogy az aktuális teljesítmény eltér a várhatótól. A következő példa nagyon egyszerűen illusztrálja az elmondottakat. A vizsgált esetben két – egymást kölcsönösen kizáró – projektnek azonos a várható NPV értéke. A döntéshozó az E(NPV) kritériumra alapozva közömbös lehet a két projekttel szemben, mivel mindkettő 8.5 millió dollár értékű pozitív NPV értéket generál.

A vállalat új piacra belépés céljával két lehetséges projekt-változatot vizsgál. Mindkettő 10 millió dolláros kezdeti kiadást igényel, s várható nettó jelenértékük is ugyanakkora. Az új területre történő belépés miatt a vállalat csak az egyik projektet akarja megvalósítani. Az adatok az alábbi táblában láthatók.

[18] Ezek egyértelműen szubjektív valószínűségek, mert a döntéshozók megítélésén alapulnak, s nem hasonló események múltbeli megfigyelésén.

12. tábla *Beruházási projektek várható nettó jelenérték számítása*

adatok millió dollárban

Állapot	Valószínűség	*A* projekt NPV	*B* projekt NPV
Gyors növekedés	0.20	+ 30.6	+ 13.0
Lassú növekedés	0.60	+ 8.5	+ 8.5
Visszaesés	0.20	− 13.6	+ 4.0
	***A* projekt**	0.20 · + 30.6 = + 6.12	
		0.60 · + 8.5 = + 5.10	
		0.20 · −13.6 = − 2.72	
		E(NPV) = + 8.5	
	***B* projekt**	0.20 · +13.0 = + 2.6	
		0.60 · + 8.5 = + 5.1	
		0.20 · + 4.0 = + 0.8	
		E(NPV) = + 8.5	

Csaknem bizonyos, hogy a döntéshozók nem lesznek közömbösek, ehelyett a *B* projektet preferálják. Ennek az az oka, hogy e változatot tartják kevésbé kockázatosnak. A kockázat arra a tényre utal, hogy a projekt aktuális kimenete eltérhet a várhatótól. E tekintetben a tényleges bekövetkezés lehet jobb is, de rosszabb is a várható kimenetnél. A kockázatot kereső befektető figyelme a kedvezőbb bekövetkezés felé fordul, a kockázatkerülő ellenben inkább érdekelt a várható kimenethez viszonyított, előnytelen kimenet figyelésében. Ha élünk ama – általában helytálló –

feltevéssel, hogy a befektetők nem szeretik a kockázatot, azaz kockázatkerülők, akkor a fenti példa döntéshozói a *B* projektet valószínűleg kevésbé kockázatosnak tekintik azért, mert a legkedvezőtlenebb állapotban is, várhatóan kis pozitív értéket produkál. Ezzel szemben az *A* projekt –13.6 millió dolláros, jelentősen negatív NPV értéket generál, amikor a gazdaság recessziót él át. *Ebből következően az E(NPV) mutató lényegében alkalmatlan a projekt kockázat visszatükrözésére.*

3.4.4. A normális eloszlás alkalmazása

E megközelítés abból az előfeltevésből indul ki, hogy ha egy projekt kockázata annak várható és aktuális kimenete között lehetséges változékonyságként definiálható, akkor a kockázat-kerülő döntéshozó számára a variabilitás egyik oldala – a projekt alulteljesítés kockázata – lesz fontos. Ekkor a döntéshozó számára annak valószínűsége lesz érdekes, amellyel a projekt negatív NPV értéket generál úgy, hogy a várható eredmény pozitív NPV. Ama feltevéssel, hogy a projekt lehetséges kimeneteinek sorozata normális eloszlású, így az ilyen görbe tulajdonságai felhasználhatók a szükséges valószínűség előállítására.

Az eljárás során probléma keletkezhet annak a diszkontrátának a megválasztásából, amelyet az éppen értékelt projekt lehetséges NPV értékeinek számításához alkalmaznak. A beruházási döntési javaslat így azon alapul, hogy a negatív NPV keletkezésének valószínűsége vajon meghalad-e vagy nem, valamilyen maximálisan elfogadható valószínűséget nagyrészt oly módon, ahogy a kockázati prémiumot alkalmazzák a kockázattal korrigált diszkontráta használatakor. Amennyiben a negatív NPV keletkezésének valószínűsége kielégítően alacsony, akkor a projekt elfogadható. A projekt pénzáram diszkontálásának alternatív megközelítése, megfelelő kockázattal korrigált diszkontráta alkalmazása a várható NPV számításához, majd a normális eloszlású görbe tulajdonságainak felhasználása a negatív NPV valószínűségek becsléséhez. Az utóbbi megközelítés a negatív NPV keletkezésének valószínűségét pótlólagos döntési információként kezeli, amely az érzékenységi vizsgálat koncepciójának kiterjesztéseként tekinthető.

A példa eredményéből látható, hogy ha kockázatmentes diszkontrátát alkalmazunk, akkor a döntési javaslat azon alapul, hogy vajon a kockázatmentes megtérülés szintje alatti teljesítés 13.8%-os valószínűsége elfogadható-e, a vizsgált projekt érzékelt kockázati szintjének ismeretében. A másik megközelítés arról informálja a döntéshozót, hogy a projekt várhatóan 492 dollár pozitív NPV értéket produkál, ha olyan ráta mellett diszkontálunk, amely megfelelően kifejezi a kockázat fokát. Ha viszont a projektet elfogadó döntés születik, akkor 18.4% annak a valószínűsége, hogy a döntésről kiderül annak hibás volta (azaz, hogy a projekt valóban negatív NPV értéket generál).

Az értékelésre kerülő projekt közepes kockázatúnak ítélhető. A kockázatmentes ráta 4%, a megfelelő kockázati prémium 6%-osnak tekinthető. A projekt becsült pénzáramai a következők:

Kezdeti kiadás (0. év): 1 000 dollár

13. tábla *Beruházási projekt lehetséges pénzbeáramlás értékei*

Pénzbeáramlások

Piaci kondíciók	Év			Valószínűség
	1	2	3	
Jó	+1 000	+1 000	+1 000	0.10
Közepes/Jó	+800	+800	+800	0.20
Közepes	+600	+600	+600	0.40
Közepes/Gyenge	+400	+400	+400	0.20
Gyenge	+200	+200	+200	0.10

(a) 4%-os kockázatmentes diszkontráta alkalmazásával az alábbi számítás végezhető:

14. tábla *Várható nettó jelenérték és szórás számítás*

Piaci kondíció	NPV		Valószínűség			[NPV-E(NPV)]^2	x	Valószínűség		
Jó	+1 775	x	0.10	=	+ 177.5	$(1\,775 - 665)^2$	x	0,10	=	123 210
Közepes / Jó	+1 220	x	0.20	=	+ 244.0	$(1\,220 - 665)^2$	x	0,20	=	61 605
Közepes	+ 665	x	0.40	=	+ 266.0	$(665 - 665)^2$	x	0,40	=	0
Közepes / Gyenge	+ 110	x	0.20	=	+ 22.0	$(110 - 665)^2$	x	0,20	=	61 605
Gyenge	- 445	x	0.10	=	- 45.5	(- 445 - 665)2	x	0,10	=	123 210

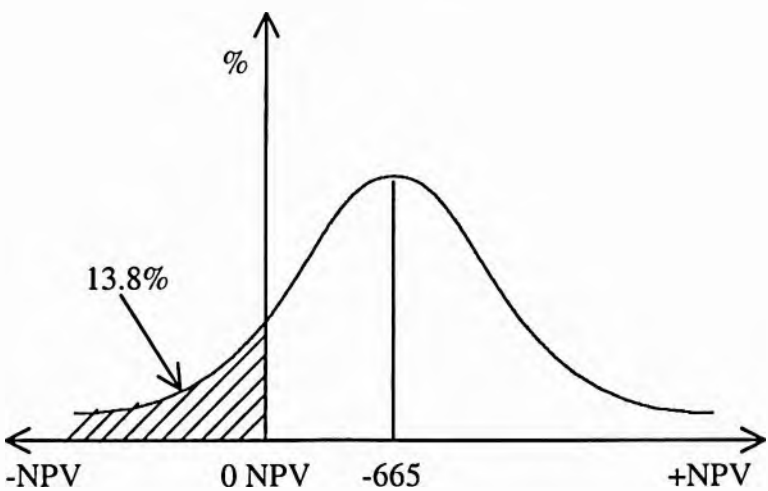
E(NPV) = +665.0 VAR = 369 630

Az $E(NPV) = +665$ dolláros értéke mellett a szórás $= \sqrt{369\ 630}$
$= 608$ NPV egység

Negatív NPV keletkezésének valószínűsége így számítható:

$$\frac{0-665}{608} = 1.094 \quad \text{szórásegység}$$

22. ábra *NPV értékek normális eloszlása*



A görbe alatti területre vonatkozó normális eloszlási táblázat a sávozott területre (-NPV) 0.1379 értéket mutat. Eszerint 13.8%-os annak a valószínűsége, hogy a projekt a 4%-os kockázatmentes megtérülésnél kisebb hozamot eredményez.

(b) Kockázattal korrigált 4% + 6% = 10%-os diszkontráta alkalmazásával az alábbi számítás végezhető:

15. tábla *Várható nettó jelenérték és szórás számítás*

Piaci kondíció	NPV	Valószínűség			[NPV-E(NPV)]^2	x Valószínűség	
Jó	+ 1487	· 0.10	=	+ 148.7	$(1487\text{-}492)^2$	· 0,10	= 99 002.4
Közepes / Jó	+ 989	· 0.20	=	+ 197.8	$(989\text{-}492)^2$	· 0,20	= 49 401.8
Közepes	+ 492	· 0.40	=	+ 196.8	$(492\text{-}492)^2$	· 0,40	= 0
Közepes / Gyenge	- 5	· 0.20	=	-1.0	$(-5\text{-}492)^2$	· 0,20	= 49 401.8
Gyenge	- 503	· 0.10	=	- 50.3	$(-503\text{-}492)^2$	· 0,10	= 99 002.4

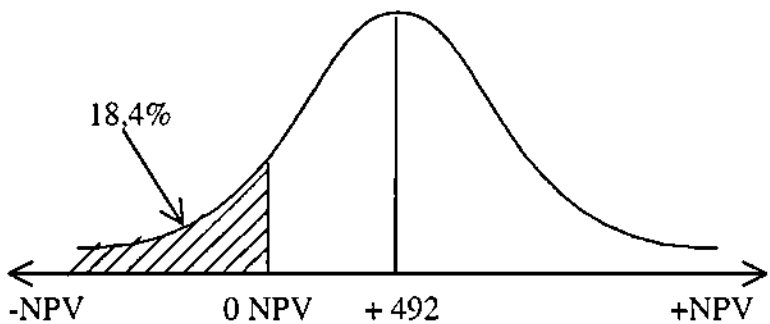
E(NPV) = + 492 VAR = 296 808.4

Az E(NPV) = +492 dolláros értéke mellett mellett a szórás $= \sqrt{296\ 808.4} = 545$ NPV

Negatív NPV keletkezésének valószínűsége így határozható meg:

$$\frac{0-492}{545} = 0.903 \quad \text{szórásegység}$$

23. ábra *NPV értékek normális eloszlása*



A normális eloszlás táblázatát felhasználva a sávozott terület (-NPV) 0.1841 értékű. Eszerint 18.4%-os annak a valószínűsége, hogy a projekt a 10%-os megkövetelt megtérülésnél kisebb hozamot eredményez.

3.4.5. Projekt értékelés a valószínűségre alapozva

A beruházásból várható pénzáram valószínűségi eloszlása általában becsülhető, s felhasználható mind a várható NPV érték, mind a kockázat számítására. Tekintsünk egy példát pénzáramok valószínűségi becslésére!

A vállalat olyan projekt megvalósítását mérlegeli, melynek kezdeti kiadása 300000 dollár, s az elkövetkező két évben a következő valószínűségekkel becsülhető pénzáramokat biztosítja.

16. tábla *Projekt pénzáram az 1. évben*

Pénzáram (dollár)	**Valószínűség**
100 000	0.25
200 000	0.50
300 000	0.25
	1.00

17. tábla *Projekt pénzáram a 2. évben*

Ha az 1. évi pénzáram (dollár)	**Valószínűsége az alábbi**	**Akkor a 2. évi pénzáram (dollár)**
100 000	0.25	n. a.
	0.50	100 000
	0.25	200 000
	1.00	
200 000	0.25	100 000
	0.50	200 000
	0.25	300 000
	1.00	
300 000	0.25	200 000
	0.50	300 000
	0.25	350 000
	1.00	

A vállalat beruházási kritériuma ilyen típusú projektek esetében 10%-os diszkontált pénzáram.

Határozzuk meg a projekt várható NPV értékét és annak valószínűségét, hogy az NPV érték negatív lesz!

Először fel kell írnunk a várható pénzáram valószínűségi eloszlását. Kezdjük a pénzáramok jelenlegi értékének számításával!

18. tábla *Várható pénzáramok jelenlegi értéke*

Év	**Pénzáram (dollár)**	**Diszkont-tényező 10%-nál**	**Jelenlegi érték (dollár)**
1	100 000	0.909	90 900
1	200 000	0.909	181 800
1	300 000	0.909	272 700
2	100 000	0.826	82 600
2	200 000	0.826	165 200
2	300 000	0.826	247 800
2	350 000	0.826	289 100

Most pedig társítsuk a lehetséges pénzáramokat saját valószínűségükkel a 19. táblában!

Mivel az NPV várható értéke pozitív, ennek alapján a projekt megvalósítható, ha a kockázat nem elfogadhatatlanul magas. Annak a valószínűsége, hogy a projekt NPV értéke negatív lesz, annak esélyével mérhető, hogy a teljes pénzáram jelenlegi értéke kisebb lesz 300 000 dollárnál. A tábla utolsó előtti oszlopából összegzéssel előállítható ez a valószínűség a következő módon:

$$0.0625 + 0.1250 + 0.\ 0625 + 0.1250 = 0.375 \text{ vagy } 37.5\%$$

Ez elfogadhatatlanul magas kockázatnak tartható.

19. tábla *Nettó jelenérték számítás kapcsolódó valószínűséggel*

1. évi pénzáram jelenértéke	Valószínűség	2. évi pénzáram jelenértéke	Valószínűség	Kapcsolódó valószínűség	Pénzáramok teljes jelenértéke	Pénzáramok jelenértékének várható értéke
(a)	(b)	(c)	(d)	(b) · (d)	(a)+(c)	
90 900	0.25	0	0.25	0.0625	90 900	5 681.3
90 900	0.25	82 600	0.50	0.1250	173 500	21 687.5
90 900	0.25	165 200	0.25	0.0625	256 100	16 006.3
181 800	0.50	82 600	0.25	0.1250	264 400	33 050.3
181 800	0.50	165 200	0.50	0.2500	347 000	86 750.3
181 800	0.50	247 800	0.25	0.1250	429 600	53 700.2
272 700	0.25	165 200	0.25	0.0625	437 900	27 368.0
272 700	0.25	247 800	0.50	0.1250	520 500	65 062.5
272 700	0.25	289 100	0.25	0.0625	561 800	35 112.5
						344 418.9
			Pénzáramok jelenértékének várható értéke ≈			344 419
			Levonva a projekt kezdeti kiadása:			300 000
			NPV várható értéke:			44 419

3.4.6. Az NPV szórása

Az NPV várható érték számításnak az a hátránya, hogy a projekt kockázat méréshez használt valószínűségi eloszlást körülményes kifejezni. Ennek elkerülésére a kockázat az NPV szórása segítségével is megkapható. Vegyünk egy példát az NPV szórás számítására!

A vállalat arra a kérdésre keresi a választ, hogy az *A* és *B*, egymást kölcsönösen kizáró projekt közül melyiket valósítsa meg. Bizonytalanság van a projektek működési költségével kapcsolatban, így az NPV valószínűségi eloszlása a következők szerint becsülhető:

***A* projekt**		***B* projekt**	
NPV (dollár)	**Valószínűség**	**NPV (dollár)**	**Valószínűség**
-20 000	0.15	5 000	0.2
10 000	0.20	15 000	0.3
20 000	0.35	20 000	0.4
40 000	0.30	25 000	0.1

A vállalat melyik projektet valósítsa meg? Ennek eldöntéséhez először számítsuk ki a két projekt várható NPV értékét!

A projekt			*B* projekt		
NPV (dollár)	**Való-színűség**	**Várható érték (dollár)**	**NPV (dollár)**	**Való-színűség**	**Várható érték (dollár)**
-20 000	0.15	-3 000	5 000	0.2	1 000
10 000	0.20	2 000	15 000	0.3	4 500
20 000	0.35	7 000	20 000	0.4	8 000
40 000	0.30	12 000	25 000	0.1	2 500
		18 000			16 000

Az A projekt várható NPV értéke nagyobb, ugyanakkor kérdéses, hogy az NPV változékonysága meghaladja a várható értéket, vagy alatta marad annak. Ez az NPV érték szórásával mérhető a következők szerint:

A projekt	*B* projekt
$\overline{E(NPV)} = 18\,000$	$E(\overline{NPV}) = 16\,000$

NPV	P	$NPV - \overline{E(NPV)}$	$P\left[NPV - \overline{E(NPV)}\right]^2$	NPV	P	$NPV - \overline{E(NPV)}$	$P\left[NPV - \overline{E(NPV)}\right]^2$
-20 000	0.15	-38 000	216 600	5 000	0.2	-11 000	24 200
10 000	0.20	-8 000	12 800	15 000	0.3	-1 000	300
20 000	0.35	+2 000	1 400	20 000	0.4	4 000	6 400
40 000	0.30	+22 000	145 200	25 000	0.1	9 000	8 100
			376 000				39 000

$$\sigma = \sqrt{376\ 000} = 19391 \qquad\qquad \sigma = \sqrt{39\ 000} = 6245$$

Habár az *A* projekt NPV várható értéke nagyobb, ugyanakkor nettó jelenértékének szórása is nagyobb, azaz magasabb kockázat kapcsolódik hozzá. Hogy végül is melyik projektet kell választani, az a vállalat kockázati attitűdjétől függ. Ha a vállalat kész az alacsonyabb NPV kockázatát vállalni a magas NPV reményében, akkor az *A* projektet választja. Amennyiben a vállalat kockázat-kerülő, akkor a kevésbé kockázatos ***B*** projektet választja.

3.5. A kockázat mérése

3.5.1. Valószínűségi eloszlás[19]

A vállalat döntéshozói által az *A* és ***B*** projektre tervezett pénzáramok vonatkozó valószínűségekkel a 24. és 25. ábrán láthatók:

Az ábrákkal kapcsolatban néhány megjegyzést szükséges tenni:

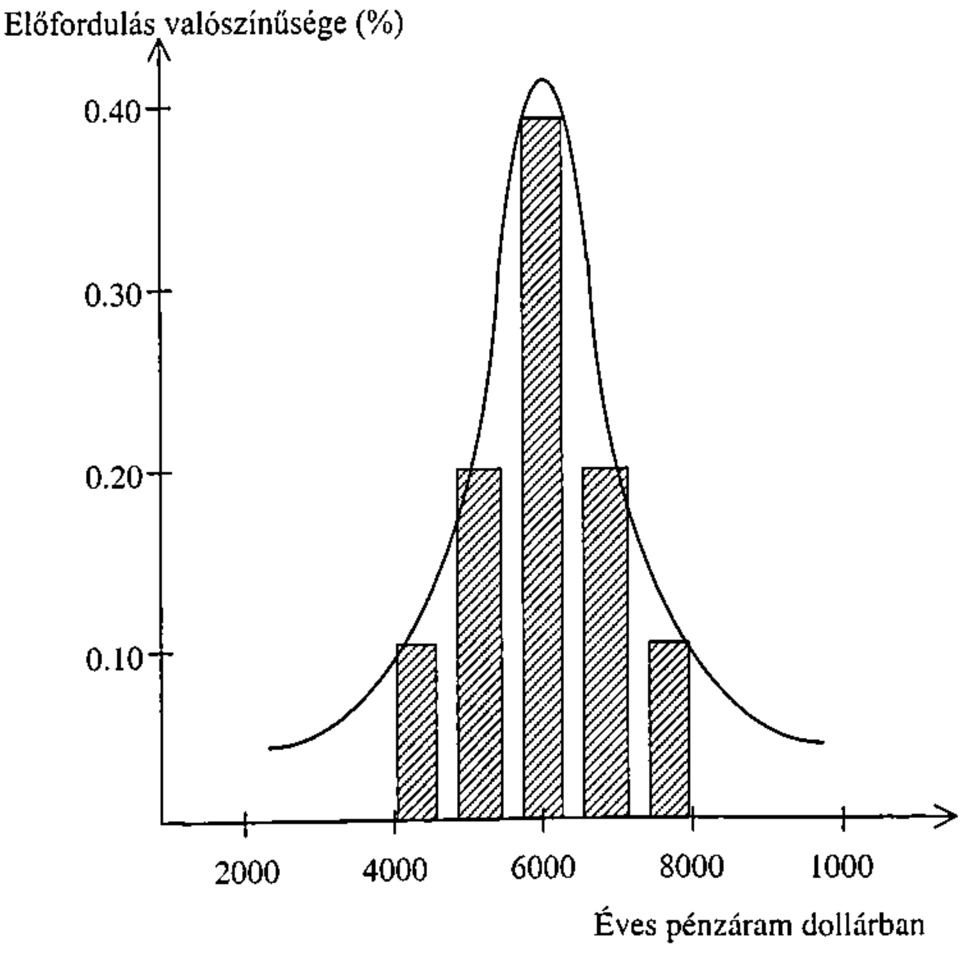
- *Először*, a sávozott oszlopok diszkrét valószínűségi eloszlást mutatnak, véges számú lehetséges kimenetre alapozva.
- *Másodszor*, a függőleges oszlopok középpontján áthaladó folytonos görbe vonal folytonos valószínűségi eloszlást mutat, végtelen számú lehetséges kimenetre alapozva.
- *Harmadszor*, az eloszlás mindkét esetben szimmetrikusnak vagy harang alakúnak látszik, utalva a változó normális eloszlására.

[19] A 3σ szabály illusztrációja beruházási projektekre megtalálható Weston, Fred-Brigham, Eugene: Managerial Finance c. munkájában. Holt, Rinehart and Winston 1979.

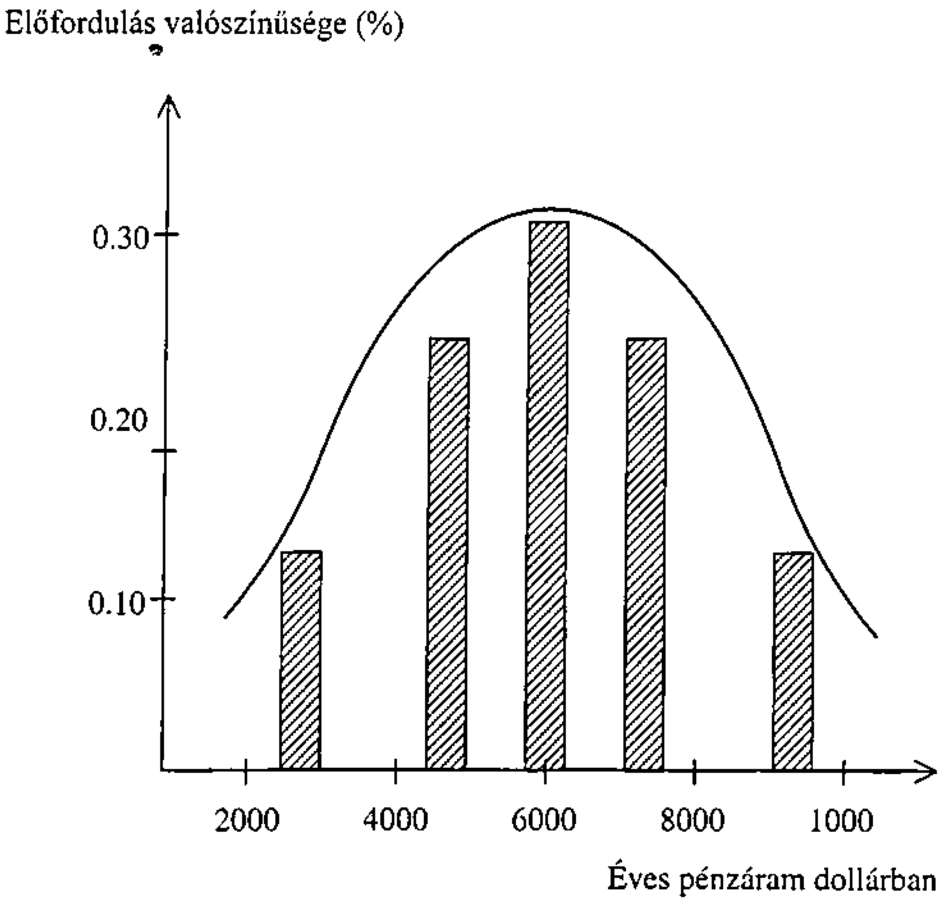
- *Negyedszer*, a két eloszlás lényegesen különbözik csúcsosságban, más szóval karcsúságban; az ***A*** projekt tervezett pénzáramának eloszlása csúcsosabb a ***B*** projektéhez viszonyítva.
- *Ötödször*, bár mindkét valószínűségi eloszlásnak ugyanakkora – 6 000 dolláros – várható értéke van, szórásuk jelentősen különbözik:

$$\sigma_A = 822 \qquad \sigma_B = 1\,710 \text{ dollár}$$

24. ábra *Az **A** projekt valószínűségi eloszlása*



25. ábra *A **B** projekt valószínűségi eloszlása*



A normális valószínűségi eloszlásra vonatkozó statisztikai tényként ismertek az alábbi relációk:

- $\pm 1\sigma$ eltérés a várható értéktől a normális eloszlású görbe alatti terület 68%-át foglalja magában.

- $\pm 2\sigma$ eltérés a várható értéktől a normális eloszlású görbe alatti terület 95%-át foglalja magában.

- $\pm 3\sigma$ eltérés a várható értéktől a normális eloszlású görbe alatti terület 99.7%-át foglalja magában.

A fenti megfogalmazások az *A* és ***B*** projektre vonatkoztatva a következőket jelentik:

1. Az *A* projekt pénzáramai valószínűleg a $6\,000 - (3 \cdot 822)$ értékű minimum és a $6\,000 + (3 \cdot 822)$ nagyságú maximum között szóródnak, azaz a 3 534 és a 8 466 dollár közötti sávban.
2. 99.7% annak a valószínűsége, hogy az *A* projektből származó aktuális pénzáram nem lesz kisebb 3 534, és nem lesz nagyobb 8 466 dollárnál.
3. Hasonló számítással a ***B*** projektre vonatkozóan kimutatható, hogy 99.7%-os valószínűséggel az aktuális pénzáram nem lesz kevesebb 870, és nem lesz több 11 130 dollárnál.

A fentiek alapján megállapítható, hogy bár a két projekt a várható pénzáram alapján egyformán elfogadható, a projekt kockázatát mérő szórás alapján azonban nem. Mivel a szórás a várható értéktől számított fluktuációt méri – azaz a kockázat mértéke -, ennek alapján megfogalmazható a következő ítélet: *bármely két, azonos várható értékű, de eltérő szórású projekt közül a kisebb szórásút kell elfogadni. Így a két projekt közül az A változat a kedvezőbb.*

3.5.2. A normális eloszlású görbe alatti terület mérése

Időnként felmerül a kérdés, mekkora a valószínűsége annak, hogy: az aktuális pénzáram nagyobb (vagy kisebb) egy előre meghatározott mértéknél. Ehhez egy kissé eltérő szórási mértéket alkalmazhatunk, amit *Z* standard normális eltérésnek nevezünk. A *Z* formula így írható fel:

$$Z = \frac{C_i - \overline{C}}{\sigma_c}$$

ahol

Z = standard mérték, amely a normális eloszlású görbe alatti területet mutatja, a várható értéktől mért, szórásegységben kifejezett távolság alapján.

$\overline{C}$ = pénzáram várható értéke

C = kiválasztott lehetséges pénzáram érték

σ_c = pénzáram szórás

A *Z* jelentésének illusztrálására vegyük az *A* projektet 6 000 dolláros várható értékkel és 822 dolláros szórással. Tegyük fel, hogy a vállalati döntéshozók annak valószínűségét szeretnék ismerni, hogy a pénzáram bekövetkezés 7 000 dolláros lesz. Ezt a *Z* meghatározásán keresztül kapjuk meg:

$$Z = \frac{7\,000 - 6\,000}{822}$$

$$Z = 1.2$$

A normális eloszlású görbe alatti terület táblájából kiolvasható, hogy $Z \approx 1.2$ értéknek 38.49% felel meg, ami azt jelenti, hogy a pénzáram várható értékétől jobbra (a nagyobb értékeknél) helyezkedik el a görbe alatti terület ekkora aránya. Eszerint 38.49%-os annak a valószínűsége, hogy az aktuális pénzáram 6 000 dollárnál nagyobb, és 7 000 dollárnál kisebb lesz.

Mivel 0.5000 – 0.3489 = 0.1151, így szintén látható, hogy a várható érték ugyanazon oldalán a *Z* értéken kívüli terület 11.51, ami azt jelenti, hogy 11.51% annak a valószínűsége, hogy az aktuális pénzáram nagyobb lesz 7 000 dollárnál.

3.5.3. A szóródási koefficiens számítása

Amikor lényegesen különböző méretű projekteket hasonlítunk össze, akkor a szórás a kockázat félrevezető mértéke lesz. Mivel a jelentős méretbeli különbség torzíthatja a szórás relatív fontosságát, ezért a kockázat e mértékét normalizálhatjuk azáltal, hogy osztjuk az eloszlás várható értékével, s megkapjuk a *CV* szóródási koefficienst. Ez így írható fel:

$$CV = \text{szóródási koefficiens} = \frac{\sigma}{\bar{C}} \tag{4}$$

A képlet alapján mondható, hogy a szóródási koefficiens kockázati mértéket a megtérülés egységére vetítve ad. A két projekt esetében ez így számítható:

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{CF_A} = \frac{822}{6\,000} = 0.137$$

$$CV_B = \frac{\sigma_B}{CF_B} = \frac{1710}{6\,000} = 0.285$$

A döntési szabály az, hogy minél nagyobb a szóródási koefficiens, annál kockázatosabb a projekt. Esetünkben láthatjuk, hogy a *B* projekt több mint kétszer kockázatosabb az *A* változatnál, amire már utalt a két projekt szórásának nagysága. Meg kell jegyezni, hogy mivel az *A* és *B* projekt várható értéke ugyanakkora, azok egyforma nagyságúak. Ezek szerint a szóródási koefficiens számítása nem ad többlet információt ahhoz, amit a projektek szórásának összehasonlítása ad.

3.6. A kockázat mérése a szóródási koefficienssel[20]

A variancia (szórás) kockázati indikátorként alkalmazása időnként félrevezető lehet. Egyértelmű, hogy minél nagyobb a hozam varianciája, annál nagyobb annak az esélye, hogy az aktuális megtérülés jelentősen eltér a várható megtérüléstől. Mindenesetre néhány esetben a projekt várható profitja olyan nagy is lehet, hogy az nagy varianciája ellenére is relatíve biztonságos.

Két képzeletbeli beruházás várható profitját és szórását a 20. tábla mutatja.

[20] Az alpontban leírtak Stephen Lumby idézett művén alapulnak.

20. tábla *Beruházási változatok kockázatának összehasonlítása*

Beruházás	**Várható profit (dollár)**	**Szórás**	**Szóródási koefficiens**
A	100	10	0.10
B	500	25	0.05

Látható, hogy a ***B*** projekt várható profitja 500 dollár, azaz lényegesen nagyobb, mint az *A* projekt 100 dolláros várható megtérülése. Állíthatjuk-e teljes bizonyossággal, hogy a ***B*** projektet preferálni kell az *A* változattal szemben? Ha megvizsgáljuk a két projekt szórását, akkor láthatjuk, hogy a kettő közül a ***B*** a profitábilisabb, ugyanakkor az a kockázatosabb is (szórása 25%-os az *A* projekt 10%-ával szemben). *Így a várható érték-variancia (vagy várható érték-szórás) szabály alapján nem tehetünk különbséget a két projekt között, s így azt sem tudjuk eldönteni, hogy melyik preferálható.* Ez az egyszerű példa jól illusztrálja a szórás (variancia) kockázati indexként alkalmazásának fő hátrányát.

Intuitív alapon feltételezhető, hogy a befektetők többsége (ha nem is mindenki) a ***B*** változatot fogja preferálni, noha a várható érték-variancia szabály nem ad egyértelmű előnyt az *A* projekttel szemben. Azt is érzékelhetjük, hogy a példa következtetései az aritmetikai megfontolások helyett az intuíción alapulnak. Az ok egyszerű, a ***B*** projekt profitabilitása elég nagy ahhoz, hogy megfelelően kompenzálja annak nagyobb kockázatát (megtérülési variabilitását). A ***B*** projekt hozama például eltérhet a szórás négyszeresével negatív irányú eloszlással (nagyon pesszimista eredmény), az *A* változat profitja pedig a szórás négyszeresével pozitív irányban (nagyon optimista eredmény), ilyenkor az egyén szintén a *B* beruházással lenne elégedettebb. Ha az eltérés itt említett igen valószínűtlen kombinációja bekövetkezik, akkor a *B* változaton nyerhető megtérülés még 400 dollár (500 - 4·25), az *A* projekt profitja viszont csak 140 dollár (100 + 4·10). Eme egyszerű számpélda is elegendő annak bemutatására, hogy bizonyos esetekben a szórás (variancia) nem szolgáltat megfelelő kockázati mértéket. Ennek kiküszöbölésére javasolható a *CV*[21] szóródási koefficiens, amely kockázati mértékként a szórást helyettesíti. Amennyiben számpéldánkban a szórást a szóródási koefficienssel helyettesítjük, akkor intuitív alapon a *B* változat egyértelműen preferálható az *A* változattal szemben. Visszatekintve az előző táblázatra láthatjuk, hogy a *B* projekt várható profitja magasabb és szóródási koefficiense alacsonyabb.

Ha tehát alkalmazzuk a várható megtérülés-szóródási koefficiens szabályt, akkor ennek alapján a befektető jobban jár, ha a *B* projektet választja az *A* változattal szemben. A kérdés ezek után az, hogy a szórás felváltása a szóródási koefficienssel vajon megoldja-e a kockázat mérés minden nehézségét? A válasz egyértelműen nemleges. Habár a szóródási koefficiens bizonyos esetekben jobb kockázati mértékként szolgál, mégsem oldja meg a kockázat jelentéséhez kapcsolódó összes problémát. Ezt illusztrálja az alábbi tábla két beruházási alternatíva releváns adatainak bemutatásával.

[21] Tudjuk, hogy a szóródási koefficiens a szórás és a profit várható értéke hányadosaként definiált.

21. tábla A megtérülés és kockázat mutatóira alapozott összehasonlítás

	A		*B*	
	Profit	**Valószínűség**	**Profit**	**Valószínűség**
	2	1	5	½
			15	½
Várható profit	2		10	
Variancia	0		25	
Szórás	0		5	
Szóródási koefficiens	0		1/2	

A és ***B*** várható értéke: $1 \cdot 2 = 2$ illetve $\frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 15 = 10$

A két változat varianciája:

$$A : 1(2-2)^2 = 0$$
$$B : \frac{1}{2}(5-10)^2 + \frac{1}{2}(5-10)^2 = 25$$

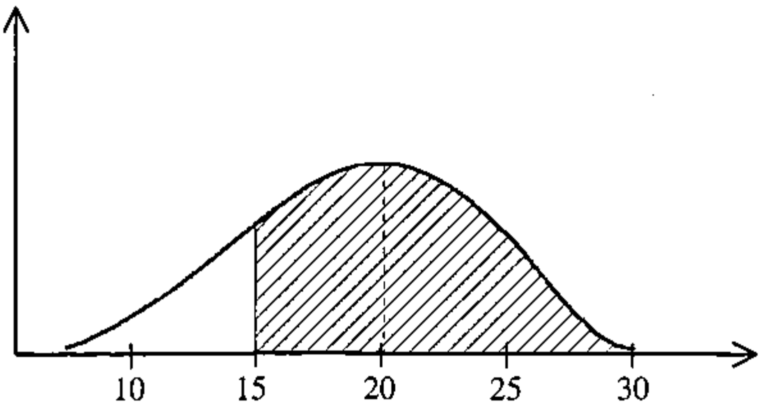
A várható érték-variancia szabály alapján megint nem dönthetünk a két változat között, mivel a ***B*** projekt a profitábilisabb, ugyanakkor a kockázatosabb is a két változat közül. Ugyanakkor a várható profit-szóródási koefficiens szabály sem oldja meg a problémát: a ***B*** projekt koefficiense nagyobb az *A* vonatkozó értékénél (1/2 és 0). Ezek szerint sem a várható profit-szórás, sem a várható profit-szóródási koefficiens kritérium alapján nem dönthetünk, a józan megítélés alapján mégis úgy tűnhet, hogy a ***B*** változatot kell preferálni az ***A*** projekttel szemben. Minden racionális döntéshozó inkább a ***B*** projektet választaná az *A* helyett, mivel a ***B*** változat lehetséges kimenetei közül a legrosszabb (5 dollár) is jobb az ***A*** által kínált profitnál (2 dollár). *A döntéshozó gondosan kell eljárjon a beruházási kockázat két közkedvelt mértékének alkalmazásakor, ha el akarja kerülni a paradox választást.*

3.7. A kockázat mérése a teljes eloszlásra alapozva

A valószínűségi változók eloszlása tekinthető egyrészt diszkrét értékek sorozataként (oszlop-diagrammal ábrázolva), másrészt folytonos függvényként (folytonos görbe vonallal reprezentálva). A két interpretáció között lényegi különbség van: az első esetben a kimenetek valószínűségét az oszlopok magassága jelöli, a második esetben ezt a görbe alatti terület mutatja. Feltételezzük, hogy a folytonos valószínűségi eloszlás a 26. ábra szerint érvényesül.

Az ábra normális eloszlású görbét mutat 20 egység várható értékkel és 5 egység szórással. Az *X* kimeneti értékek egyaránt jelölhetnek megtérülési rátát és hozam összeget. Ha tudni akarjuk annak valószínűségét, hogy a kimenet 15 és 30 egység közé esik, akkor ki kell számítanunk a két pont közötti görbe alatti területet, azaz az ábra sávozott részét. Ez a görbe eme intervallumra vonatkozó integrálásával határozható meg, s mivel az eloszlás normális, statisztikai táblák előre kiszámított adatai is mutathatják a görbe alatti területet[22].

26. ábra *Folytonos valószínűségi eloszlás*



A vizsgált eloszlás a következő formulával standardizálható:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \tag{1}$$

ahol *Z* standardizált változó, vagy a várható értéktől mért szórások száma, az x a megfigyelt kimenet, μ a várható érték, a σ az eloszlás szórása. Ha például tudni szeretnénk annak valószínűségét, hogy a kimenet 15 és 30

[22] A normál görbe egyenletének integrálása nehézkes, így egyszerűbb táblázatot használni. A normál görbe egyenlete: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$, ahol π konstans, μ a várható érték, σ a szórás, x pedig lehetséges kimenet.

egység közé esik, akkor e pontok szerint normalizálnunk kell, felhasználva az (1) egyenletet.[23]

$$Z_1 = \frac{15-20}{5} = -1.0 \qquad Z_2 = \frac{30-20}{5} = 2.0$$

22. tábla *A normális eloszlású görbe alatti terület*

Z*	**A keresett pont távolsága a várható értéktől**	**Ordináta**
0.0	0.0000	0.3989
0.5	0.1915	0.3521
1.0	0.3413	0.2420
1.5	0.4332	0.1295
2.0	0.4773	0.0540
2.5	0.4938	0.0175
3.0	0.4987	0.0044

A kapott Z értékekhez kapcsolódó területek a fenti táblában találhatók 0.3413 és 0.4773 értékkel.[24] Eszerint 0.3413 annak valószínűsége, hogy az aktuális kimenet 15 és 20 egység közé esik, s 0.4773 annak az esélye, hogy 20 és 30 egység közé. Összegezve a valószínűségeket azt kapjuk, hogy a kimenet 15 és 30 egység közé esésének valószínűsége 0.8186, azaz 81.86%.

[23] Ha a megfigyelt pont 1σ távolságra van a várható értéktől, akkor $x\text{-}\mu = \sigma$, így $z = \sigma/\sigma = 1.0$. Így, ha a $z = 1.0$, akkor a megfigyelt pont 1σ távolságra van a várható értéktől, ha $z = 2$, akkor az érték 2σ és így tovább.

[24] A negatív előjel figyelmen kívül maradhat a görbe szimmetrikussága miatt.

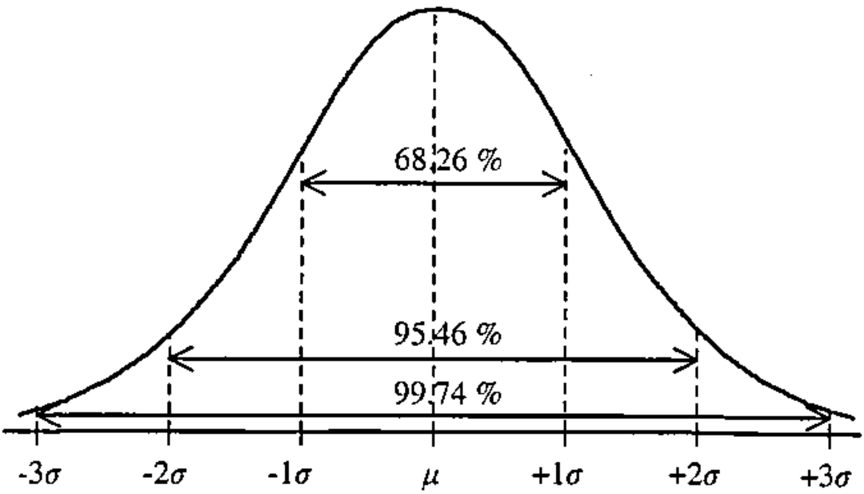
Most azt feltételezzük, hogy a 15 egységnél nagyobb aktuális kimenet valószínűségének meghatározásában vagyunk érdekeltek. Először azt vesszük, hogy a 15 és 20 egység közötti kimenet valószínűsége 0.3413, utána azt nézzük, hogy a 20 egységnyi várható értéknél nagyobb kimenet valószínüsége 0.5000, így annak esélye, hogy a kimenet 15 egységnél nagyobb:

$$0.3413 + 0.5000 = 0.8413, \text{ vagy } 84.13\%.$$

A normális valószínűségi eloszlás néhány érdekes tulajdonsága tanulmányozható a 22. tábla és a 27. ábra alapján.

Bármilyen normális eloszlás mellett a $+1\sigma$ és a -1σ szórás közé jutás valószínűsége a várható értékhez viszonyítva 0.6826, vagy 68.26%, azaz: $2 \cdot 0.3413$. Ha a várható érték szórásának kétszeresén belüli intervallumot vesszük, az ilyen előfordulás valószínűsége 95.46%, a várható érték háromszoros szórásán belül kerülés esélye pedig 99.74%. Habár az eloszlás elméletileg a mínusz végtelentől a plusz végtelenig tart, a háromszoros szóráson kívüli bekövetkezés valószínűsége elhanyagolhatóan kicsi.

27. ábra *A normális eloszlás görbéje*



3.8. A valószínűségi koncepció illusztrálása

Vegyünk alapul három lehetséges makrogazdasági állapotot: fellendülést, normális működést és visszaesést. Továbbá feltételezzük azt, hogy bekövetkezési valószínűséget társíthatunk minden állapothoz, illetve pénzmegtérülést kapcsolhatunk két projekthez, minden lehetséges működési állapotban. Eme információkra alapozva felírható az alábbi tábla. Ebben az ***A*** és ***B*** projekt várható értéke az (1) egyenlettel számítható:

$$\overline{R}_j = \sum_{s=1}^{n} R_{js} \cdot p_s \qquad s = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

a megtérülési érték szórása pedig a (2) egyenlettel határozható meg:

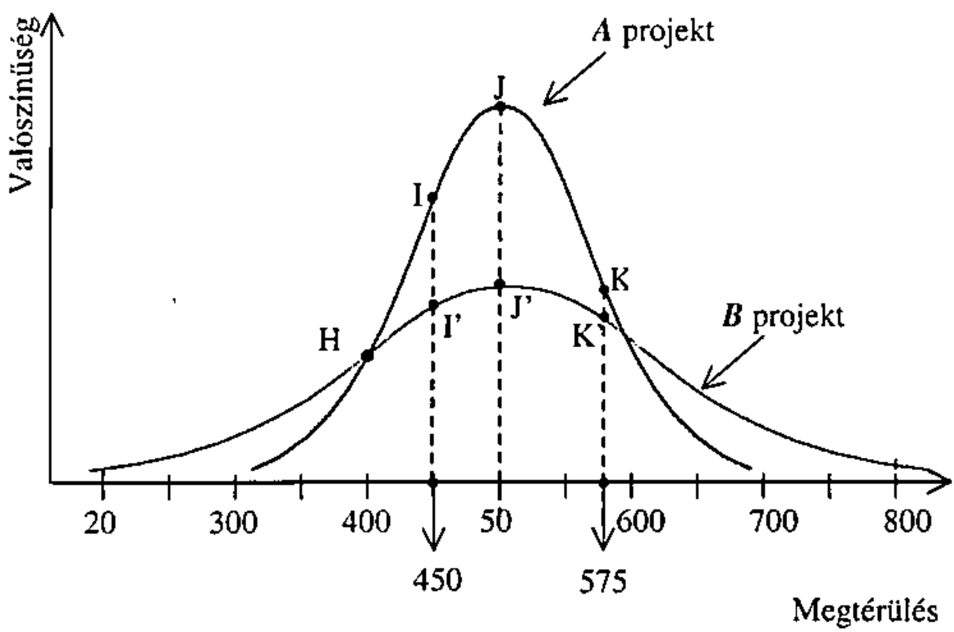
$$\sigma_j = \sqrt{\sum_{s=1}^{n} \left(R_{js} - \overline{R}_j\right)^2 \cdot P_s} \tag{2}$$

23. tábla ***A** és **B** projekt várható értéke és szórása*

Állapot	Bekövetkezés valószínűsége p_s	Megtérülés (dollár) R_{js}	$R_{js} \cdot p_s$
***A* projekt**			
Visszaesés	0.2	400	80
Normális	0.6	500	300
Fellendülés	0.2	600	120
	1.0		$\overline{R}_A = 500$
Szórás = σ_A = 63.20			
***B* projekt**			
Visszaesés	0.2	300	60
Normális	0.6	500	300
Fellendülés	0.2	700	140
	1.0		$\overline{R}_B = 500$
Szórás = σ_B = 126.50			

Annak feltételezésével, hogy az *A* és *B* projekt megtérülési értékei normális eloszlásúak, továbbá ismerve a projektek várható megtérülését és annak szórását, a 28. ábrán bemutatható a két projekt valószínűségi eloszlása.[25] Feltételezzük, hogy *A* és *B* projekt aktuális megtérülése 450 és 575 dollár közé kerülésének valószínűségét keressük. Felhasználva az (1) egyenletet és a 28. ábrát, kiszámíthatjuk a valószínűségi eloszlásokat. Az első lépésben a *Z* értékeket határozzuk meg a két projekt intervallum határaira.

28. ábra ***A* és *B* projekt valószínűségi eloszlása**



[25] A normális valószínűségi eloszlás konstruálható a várható értékek és a szórás ismeretében, az ordináta felhasználásával. Az ordinátákat tartalmazó tábla megmutatja az $f(x)$ valószínűségi függvény relatív magasságát a különböző *Z* pontokban, a görbe alatti terület helyett. Az ábrán különböző *Z* értékeknél a következő formula szerint határoztuk meg az ábrázolt pontokat: $f(x)=1/\sigma$ (*Z* érték ordinátája), ahol az ordináta értéke táblából olvasható ki.

24. tábla Befektetési projektek egybevetése relatív kockázatuk alapján

***A* projekt**	***B* projekt**
alsó $Z_1 = \dfrac{450 - 500}{63 \cdot 20} = -0.79$	alsó $Z_1 = \dfrac{450 - 500}{126.50} = -0.40$
felső $Z_2 = \dfrac{575 - 500}{63 \cdot 20} = 1.19$	felső $Z_2 = \dfrac{575 - 500}{126.50} = 0.59$

Például a várható érték $+1\sigma$ pontnak megfelelő értékét *A* és ***B*** projektre a 25. tábla szerint határozhatjuk meg.

A 25. tábla (5) oszlopa megadja a két eloszlás relatív magasságát. A *Z* értékeket tartalmazó 26. tábla segítségével megkapható a normális eloszlású görbe alatti terület mind a négy *Z* értékre.

25. tábla *Befektetési projektek összehasonlítása*

Z	Ordináta Z-nél	1/σ	f(x)	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)=(3)·(4)
A projekt				
Átlag = 500.00	0	0.3989	1/63.2	0.0063
$+1\sigma$ = 563.20	1	0.2420	1/63.2	0.0038
$+2\sigma$ = 626.20	2	0.0540	1/63.2	0.0008
B projekt				
Átlag = 500.00	0	0.3989	1/126.5	0.0032
$+1\sigma$ = 626.50	1	0.2420	1/126.5	0.0019
$+2\sigma$ = 753.00	2	0.0540	1/126.5	0.0004

Tehát körülbelül 67% annak a valószínűsége, hogy az *A* projekt aktuális pénzárama 450 és 575 dollár közé esik, s 38% annak az esélye, hogy a *B* projekt pénzárama ugyanezen intervallumba kerül. Ha visszatekintünk a 28. ábrára, akkor láthatjuk az éppen most kiszámított két területet. Az *A* változatra vonatkozó területet a *H*, *I*, *J*, *K*, *L* pontok határolják, míg az A görbe alatti terület megközelítőleg 67%. A *B* projektet érintő területet a *H*, *I'*, *J'*, *K'*, *L* pontok veszik körül, ami a teljes területnek körülbelül 38%-át jelenti.

26. tábla *Befektetések egybevetése a teljes eloszlás alapján*

	Z érték	Terület
***A* projekt**		
Alsó Z:	-0.79	0.2852
Felső Z:	1.19	0.3830
		Teljes terület: 0.6682 vagy 66.82%
***B* projekt**		
Alsó Z:	-0.40	0.1554
Felső Z:	0.59	0.22.24
		Teljes terület: 0.3778 vagy 37.78%

3.8.1. Kumulált valószínűség

Tegyük fel a következő kérdést: mekkora annak a valószínűsége, hogy az *A* projektből nyerhető pénzáram legalább 100, 150, 200 etc. dollár lesz? Nyilvánvaló, hogy nagyobb a 100, mint a 150 dollár bekövetkezésének valószínűsége, vagy annak, hogy 150 dollár lesz 200 helyett és így tovább. Általában az ilyen „legalább mennyi?" típusú kérdésekre a *kumulált valószínűségi eloszlással* adható válasz. Az *A* és *B* projektre vonatkozó ilyen eloszlások a 27. táblában és 29. ábrán láthatók.

27. tábla *Az **A** és **B** projekt kumulált valószínűségi eloszlása*

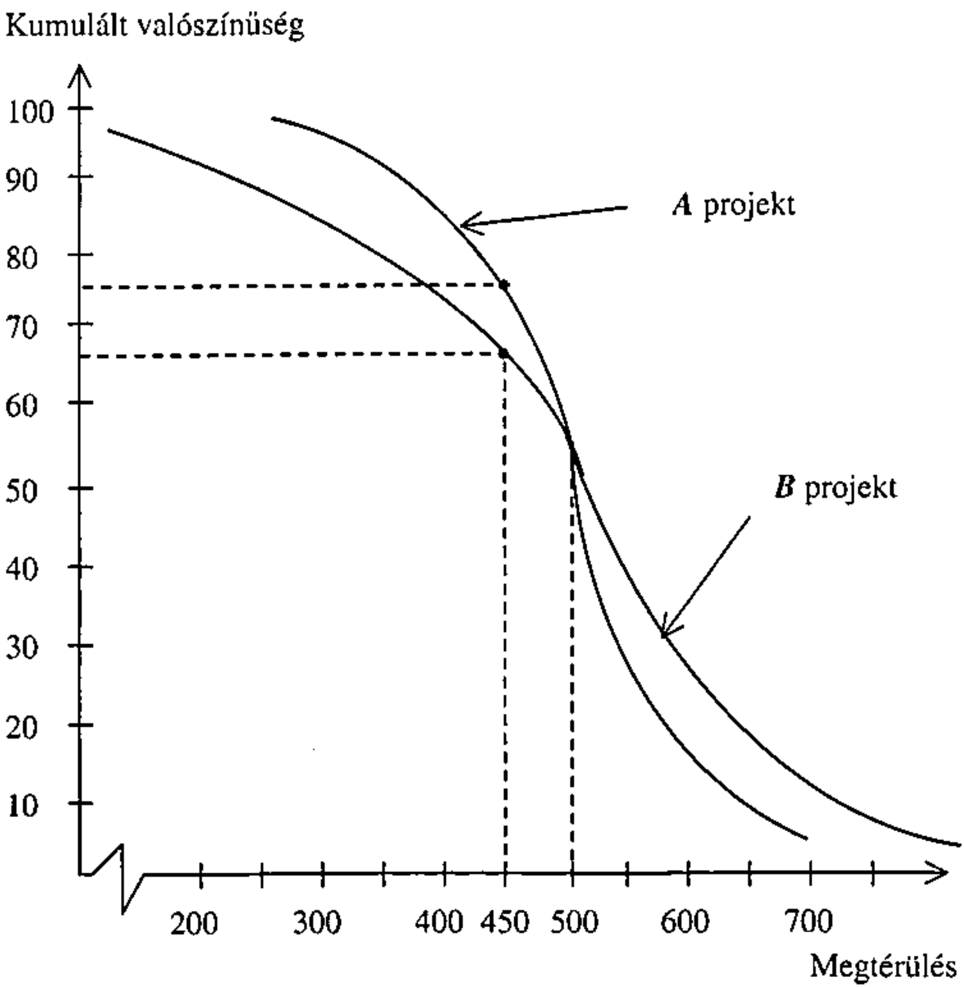
Várható megtérülés (dollár)	**Z érték**	**Kumulált valószínűség**
***A* projekt**		
300	-3.16	0.9990 *
400	-1.58	0.9429
450	-0.79	0.7855
500	0.00	0.5000 **
575	1.19	0.1170 ***
600	1.58	0.0571
700	3.16	0.0001
***B* projekt**		
200	-2.37	0.9911 *
300	-1.58	0.9429
400	-0.79	0.7855
450	-0.39	0.6517
500	0.00	0.5000 **
575	0.59	0.2776 ***
600	0.79	0.2148
700	1.58	0.0571
800	2.37	0.0089

* 0.5000 plusz a normális eloszlású görbe bal fele alatti terület. Például az *A* projektre 0.5000 + 0.4990 = 99.9%, $Z = 3.16$ esetében.

** A várható érték kumulált valószínűsége 0.5000 = 50%

*** 0.5000-ből levonva a normális eloszlású görbe jobb fele alatti terület. Például az *A* projektre 0.5000 – 0.1170 = 11.7%, $Z = 1.19$ esetében.

29. ábra *Az **A** és **B** projekt kumulált valószínűségi eloszlása*



Feltételezzük, hogy az *A* és *B* projekt költsége 450 dollár. Ha mindkét beruházás legalább 450 dollár megtérülést hoz, akkor az éppen a fedezeti pontot jelenti. Mekkora a fedezeti pontok elérésének valószínűsége az egyes projekteknél? Az ábráról látható, hogy az *A* projekt fedezeti pontjának 78%-os a valószínűsége, a kockázatosabb *B* projektének viszont csak 65%-os az esélye. Mindazonáltal előreláthatóan nincs esélye annak, hogy az *A* projekt 650 dollárnál többet hozna, míg a *B* változatnak 5%-os esélye van a 700 dolláros vagy nagyobb megtérülés elérésére.

Ezért juthatott Hillier és Hertz[26] arra a következtetésre, hogy a beruházási döntéshozatal javítható az által, ha a lehetséges kimenetek *teljes* kumulatív eloszlását vizsgálat alá vesszük. Hillier és Hertz olyan beruházási probléma vizsgálatot folytatott, amelyben az alternatív változások kumulált eloszlási görbéi nem metszették egymást. Ugyanakkor eredményeik interpretálásában nagy nehézséget okozott az, ha ez a metszés mégis bekövetkezett. A továbbiakban a beruházási alternatívák közüli választást arra az esetre vizsgáljuk, ahol a kumulált eloszlás görbéi metszik egymást.

3.8.2. Valószínűségi eloszlás és kumulatív eloszlási függvény

A valószínűségi eloszlás annak esélyéről szolgáltat információt, hogy a véletlen változó elér egy bizonyos X értéket. Ezt az ismeretet viszont felhasználhatjuk a kumulált eloszlási függvény definiálására; ez kiválasztja annak valószínűségét, hogy a véletlen változó elér az X-nél kisebb, vagy azzal egyenlő értéket, azaz $p(X \leq x)$. A kumulált eloszlásra vonatkozó elfogadott jelölés az $f(x) = p(X \leq x)$ formula. Először megvizsgáljuk a valószínűségi eloszlás e típusának jellemzőit, amit azután felhasználunk a be-

[26] Hillier, F. S.: The Deviation of Probabilistic Information for the Evaluation of Risky Investments. Management Science 1963.
Hertz, D. B.: Risk Analysis in Capital Investment. Harvard Business Review, January-February 1964.

ruházási választás problémájának vizsgálatához. Nézzük ezt egy példa segítségével!

Feltételezzük, hogy egy hipotetikus beruházási változat nettó jelenértéke a következő valószínűségi eloszlást mutatja:

NPV (dollárban) x	**Valószínűség** $p(x)$
80	0.2
90	0.2
110	0.4
120	0.2

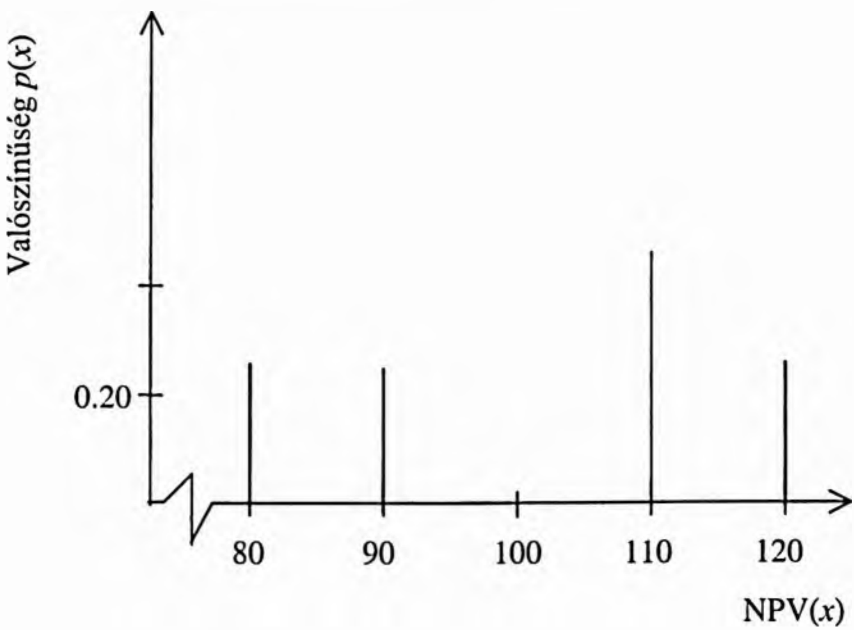
Ha meg akarjuk tudni annak valószínűségét, hogy a projekt NPV értéke „kisebb vagy egyenlő" egy adott értéknél (értékkel), akkor erre a választ a következő kumulált valószínűségi függvény adja meg:

$$f(x) = p(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 80 \\ 0.2 & 80 \leq x < 90 \\ 0.4 & 90 \leq x < 110 \\ 0.8 & 110 \leq x < 120 \\ 1 & x \geq 120 \end{cases}$$

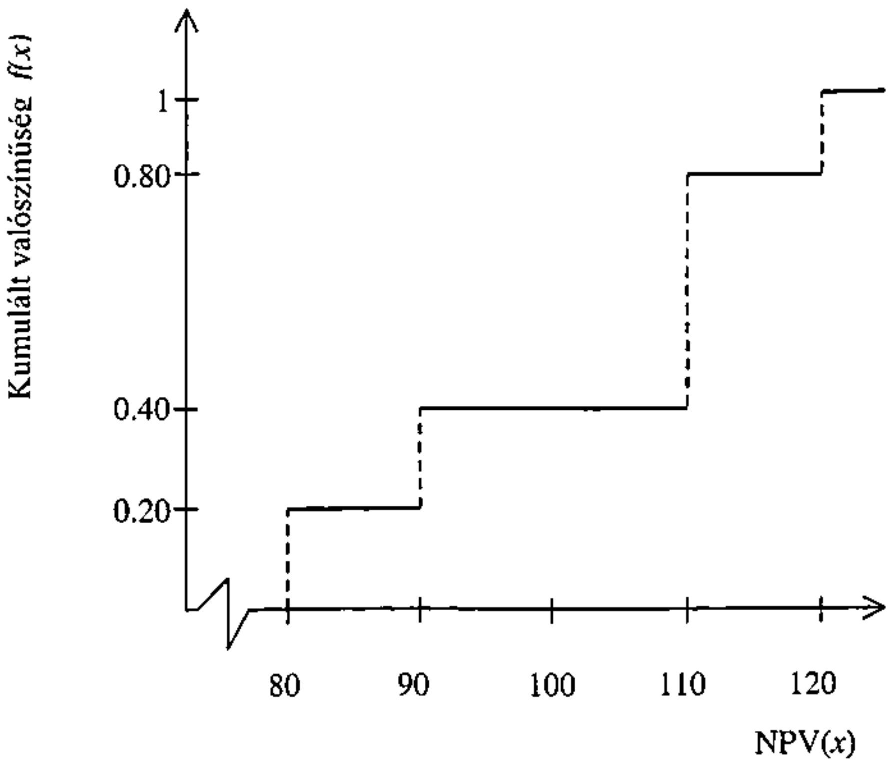
Ha például tudni akarjuk annak valószínűségét, hogy az NPV kisebb (vagy egyenlő) 112.5 dollárnál, akkor a megfelelő ($110 \leq x < 120$) intervallumot kell venni, s a válasz a 80%-os valószínűség lesz. A valószínűségi eloszlás és a kumulált valószínűségi eloszlás grafikus bemutatása a 30-1. és a 30-2. ábrákon látható.

Felismerhető, hogy a kumulált valószínűségi eloszlás grafikonja lépcsős függvény, ami azt tükrözi, hogy diszkrét valószínűségi változót veszünk alapul. Amennyiben folytonos véletlen változót vizsgálunk, akkor a normális eloszlás görbéjéhez hasonlóan a kumulált eloszlás ábrája nem lépcsősen, hanem simítva és folyamatosan emelkedik.

30-1. ábra *Valószínűségi eloszlás*



30-2. ábra *Kumulált valószínűségi eloszlás*

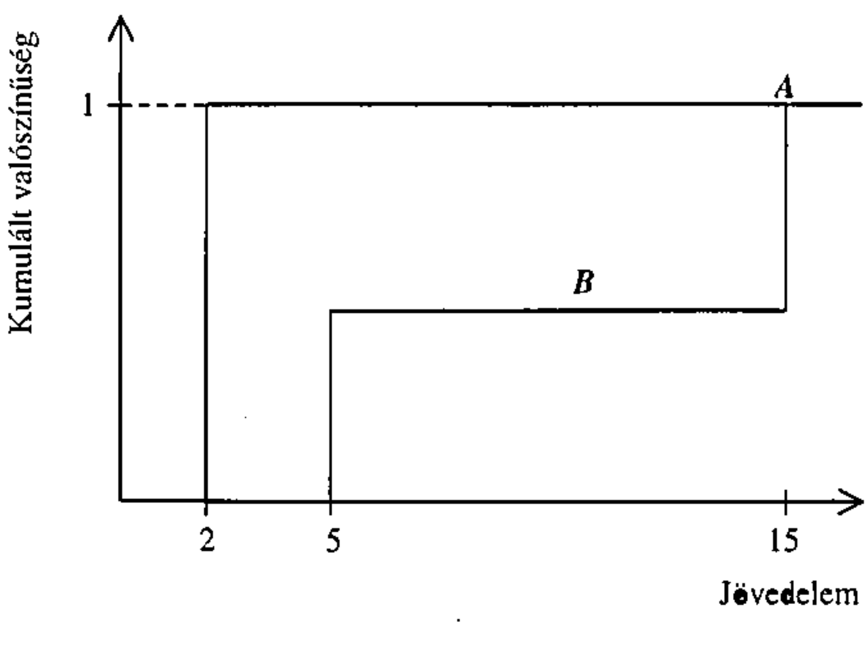


3.8.3. Eloszlásmentes beruházási analízis

Most alkalmazzuk a kumulált eloszlás koncepcióját a beruházási választás analíziséhez. Vegyük azt az egyszerű példát, amelyben *A* beruházás 2 dollár hozamot eredményez 1 valószínűséggel, míg a *B* alternatíva vagy 5 dollár profitot hoz ½, vagy 15 dollárt ½ valószínűséggel. Az alternatívák közül sem a várható érték-variancia, sem a várható érték-szóródási koefficiens szabály alapján nem tudunk választani, eltekintve attól a ténytől, hogy a *B* beruházás nyilvánvalóan preferálható az *A* változattal szemben, mivel *B* összes lehetséges kimenete meghaladja *A* hozamát. A *B* projekt elsőbbsége könnyen igazolható a két beruházás kumulált eloszlásának vizsgálatával. A 31. ábrán a ***B*** változat kumulált valószínűségi eloszlása az ***A*** beruházáséhoz viszonyítva jobbra helyezkedik el.

A bemutatott példában a kumulált eloszlás függvényei nem metszették egymást, a várható hasznosság szabállyal konzisztens döntés mindig azonosítható anélkül, hogy átformálnánk az egyén hasznossági függvényének alakját, amikor alkalmazzuk az alább megfogalmazott *elsőfokú sztochasztikus dominancia szabályt.* E kritériumot a pénzbeli kimenet, s annak valószínűsége alapján fogalmazzuk meg, nem a hasznosság alapul vételével.

31. ábra *Jövedelem értékek kumulált valószínűségi eloszlása*



*Valamely **B** beruházás akkor preferálható **A** változattal szemben, ha*

$$f_B(x) \leq f_A(x)$$

*minden x érték mellett (s szigorú egyenlőség kell érvényesüljön néhány x értékre) azaz, ha **B** kumulált valószínűségi eloszlása az **A** eloszlásától jobbra helyezkedik el.*

Ez egybevág ama követelménnyel, hogy a két kumulált valószínűségi eloszlás nem metszi egymást. E feltétel azt is jelenti, hogy adott *k* megtérülési szintnél nagyobb, vagy azzal azonos szint elérésének valószínűsége a ***B*** esetében nagyobb, mint az ***A*** beruházásnál. Mivel a magasabb hozam nyerésének esélye mindig nagyobb, így a ***B*** beruházást az összes befektető preferálni fogja.

A sztochasztikus dominancia technika egyszerűségének demonstrálására vizsgáljunk számszerű példát.

Tekintsük először az ***A*** és ***B*** jelű alternatívát a 28. táblában!

Az ***A*** és ***B*** beruházás összehasonlítása világosan mutatja, hogy az ***A*** beruházás preferálható a ***B*** változattal szemben, mivel az ***A*** azonos valószínűséggel ígéri a jövedelem megduplázódását. Ezzel szemben a várható érték-variancia szabály alapján nem tudnánk különbséget tenni a két opció között: az ***A*** beruházás várható NPV értéke és kockázata (variancia) egyaránt magasabb.

28. tábla Befektetési változatok egybevetése kumulált valószínűségük alapján

A			*B*		
NPV (x)	Valószínűség (*p*)	Kumulált valószínűség (f_A)	NPV (x)	Valószínűség (*p*)	Kumulált valószínűség (f_B)
10	1/3	1/3	5	1/3	1/3
20	1/3	2/3	10	1/3	2/3
30	1/3	1	15	1/3	1

Nézzük meg, hogy a kumulált eloszlás használata segít-e az anomália felszámolásában! A két változat kumulált valószínűségi eloszlását tartalmazza a 28. tábla, s ezeket az adatokat használtuk 29. tábla felépítéséhez, amely bemutatja a két beruházás kumulált valószínűségi függvényének összehasonlításához alkalmas értékeket.

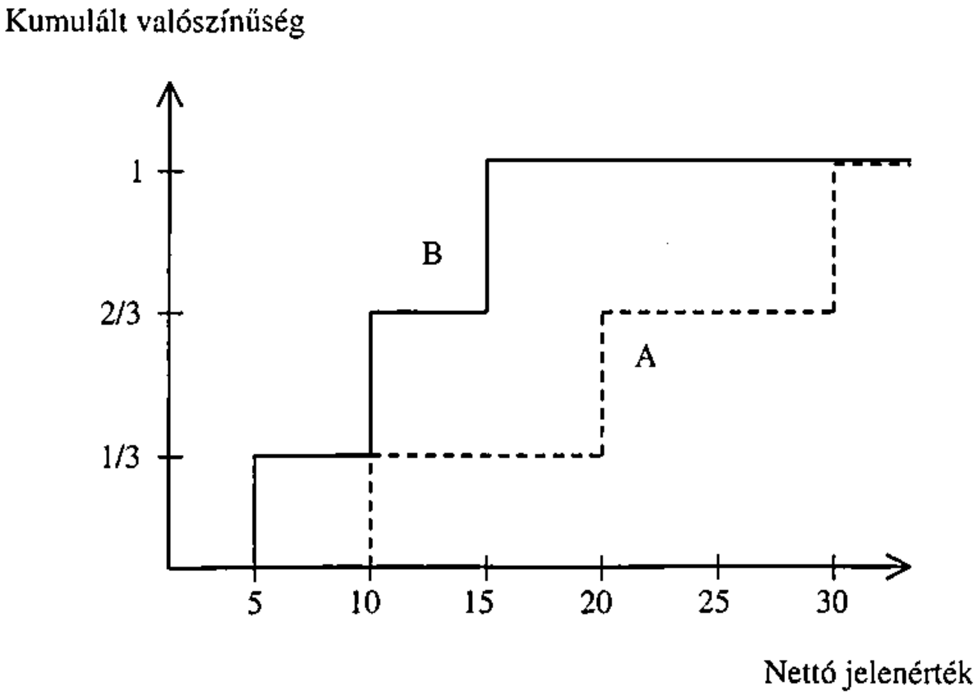
A 29. tábla első oszlopa egyrészt mutatja az ***A*** és ***B*** változatból nyerhető megtérüléseket, másrészt néhány olyan megtérülési értéket, amely egyik változat által sem elérhető. A jobb oldali oszlop mutatja, hogy $f_B(x)-f_A(x)>0$, érvényesen minden x érték mellett, s ugyanígy érvényes az $f_A(x) \leq f_B(x)$ reláció is. Ezt az eredményt illusztrálja a 32. ábra, amely bemutatja a két beruházás kumulált valószínűségi függvényét.

29. tábla *Beruházási alternatívák összehasonlítása*

Jövedelem	Kumulált valószínűség *B* beruházásra f_B	Kumulált valószínűség *A* beruházásra f_A	$f_B - f_A$
-5	0	0	0
0	0	0	0
5	1/3	0	1/3
7	1/3	0	1/3
10	2/3	1/3	1/3
12	1	1/3	1/3
15	1	1/3	2/3
17	1	1/3	2/3
20	1	2/3	1/3
22	1	2/3	1/3
25	1	2/3	1/3
28	1	2/3	1/3
30	1	1	0
35	1	1	0

Mivel az ***A*** kumulált eloszlása a ***B*** eloszlásától jobbra helyezkedik el, ezért az elsőrendű sztochasztikus dominancia kritérium érvényesül: eszerint az *A* beruházás preferálható, mivel a hasznossági függvény alakjától függetlenül uralja a ***B*** változatot. A gond az, hogy a vállalat nem mindig egyszerű váltási problémával kerül szembe, ami a kumulált eloszlási függvények egymást nem metsző pozíciójából származik.

32. ábra Nettó jelenérték kimenetetek kumulált valószínűségi eloszlása



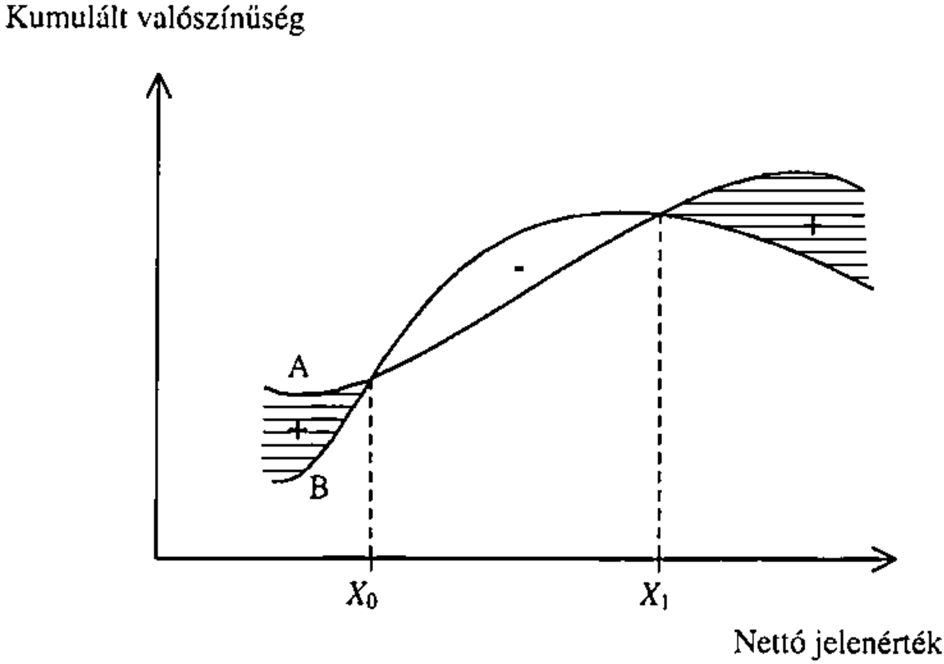
Hillier és Hertz úgy találta, hogy az eloszlási függvények egyszer vagy többször metszhetik egymást. Ilyen esetben a döntés valamivel komplikáltabb. Ha élünk a kockázati tartózkodás ismert feltevésével, akkor számos fontos esetben különbséget tehetünk projektek között még akkor is, ha az eloszlási függvények metszik egymást, azáltal hogy alkalmazzuk a másik kockázati tartózkodási kritériumot, *a másodrendű sztochasztikus dominancia szabályt.*

*A **B** beruházást preferáljuk az **A** változattal szemben az összes kockázattól tartózkodó befektető esetén, ha az f_A és f_B közötti kumulált differencia, x teljes tartományára vonatkozóan, nem negatív.*

Ha a kockázati tartózkodási kritérium teljesül, akkor a *B* projekt várható hasznossága nagyobb az *A* beruházás várható hasznosságánál (az összes tartózkodóra vonatkozóan). Eszerint úgy tudunk választani az alternatívák közül, hogy az összhangban van a várható hasznosság elméletével. Ez anélkül történhet, hogy szükséges volna ismerni a hasznossági függvény alakját, túl a kockázati tartózkodás feltételezésén. Az ilyen szabály duplán is örvendetes: egyrészt összhangban van a modern kockázati analízis alapját képező hasznossági elmélettel, ugyanakkor pedig praktikus eszközt ad a döntési analízis számára. E kritérium jelentése könnyen illusztrálható, ha az alábbi ábrán kumulált eloszlási görbéjükkel mutatjuk be *A* és *B* beruházást. A kockázati tartózkodási kritériumnak megfelelően a kumulált valószínűségi eloszlás görbéi metszhetik egymást, s az f_A és f_B közötti kumulált differencia nem negatív kell maradjon *X* teljes tartományában.

A 33. ábrán a két eloszlási függvény közötti különbség „+" előjelű ott, ahol $f_A > f_B$, és „–" előjelű ott, ahol $f_B > f_A$. Az ábrára vetett pillantás elegendő annak belátásához, hogy a megtérülési értékek teljes sorozatára a két eloszlás közötti kumulált terület mindig pozitív marad. Mivel a koc-

33. ábra *Egymást metsző kumulált valószínűségi függvények*



kázati tartózkodási kritérium teljesül, így a ***B*** beruházás uralja az ***A*** változatot az összes kockázattól tartózkodó befektető esetében. Ez azért igaz, mert az X_0 értékig az ***A*** eloszlása a ***B*** grafikon fölött halad, ezért az ***A*** alatti terület meghaladja a ***B*** alattit. Bár az igaz, hogy az X_0 és az X_1 közötti részen a ***B*** eloszlás grafikonja az ***A*** ábrája fölött halad, mégis az előző, plusz jellel ellátott, sávozott rész nagyobb, mint a mínusz jellel ellátott rész. Mivel az X_1 ponton túl az ***A*** újra a ***B*** fölött halad, a kumulált sávozott rész mindig nagyobb a mínusz jellel ábrázolt résznél, az *X* teljes sorozatát alapul véve.

Ahhoz, hogy igazoljuk ezt a beruházási szabályt, alkalmazni fogjuk az alábbi példában bemutatott számpéldára.

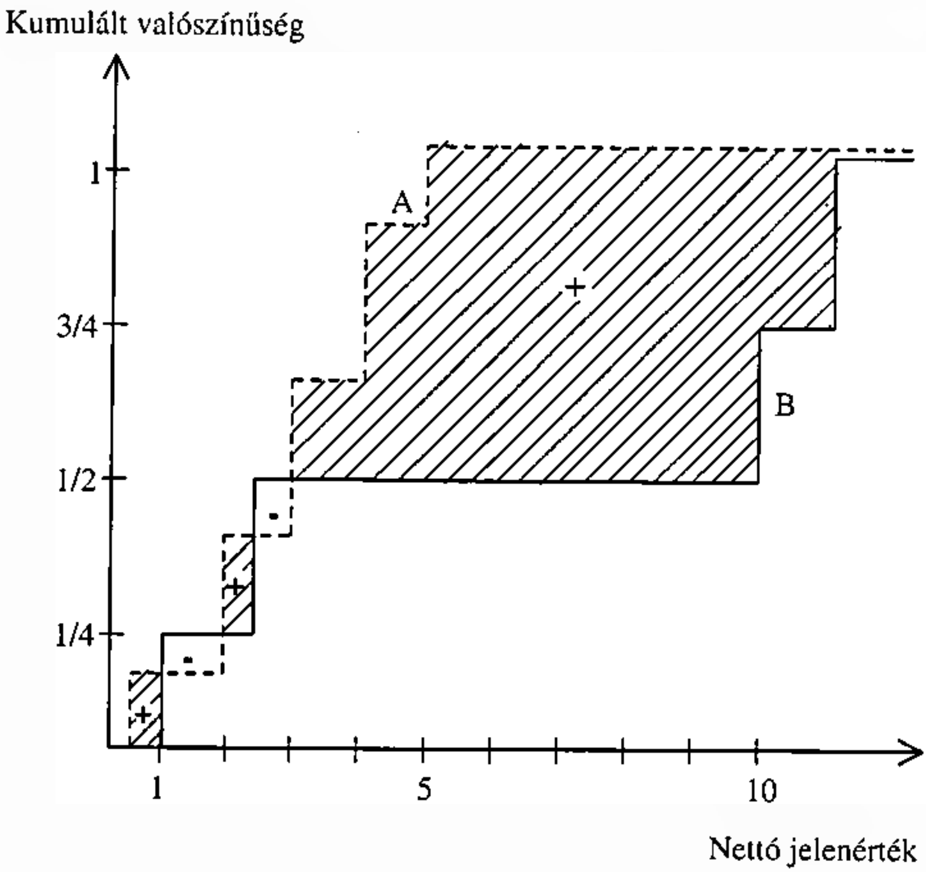
30. tábla Beruházási alternatívák egybevetése kumulált valószínűségük alapján

A beruházás			B beruházás		
NPV	Való-színűség	Kumulált valószínűség	NPV	Való-színűség	Kumulált valószínűség
1	¼	¼	½	3/16	3/16
2	¼	½	3/2	3/16	6/16
			5/2	4/16	10/16
9	¼	¾	7/2	3/16	13/16
10	¼	1	9/2	3/16	1

A tábla adataiból kumulált valószínűségi eloszlást számítottunk a két alternatívára. Eme eloszlásokat a 34. ábra mutatja.

Mivel a két eloszlás grafikonja metszi egymást, így az *A* és *B* változat nem uralja egymást az elsőrendű sztochasztikus dominancia-szabály alapján. Ha viszont a kockázati tartózkodási kritériumot vesszük alapul, akkor a *B* beruházás egyértelműen preferálható az *A* változattal szemben. Rátekintéssel is megállapítható, hogy az *A* alatti kumulált, sávozott terület mindig nagyobb a *B* alattinál. *Természetesen nem lehet mindig egyszerű ránézéssel megállapítani egyik beruházás dominanciáját egy másik fölött, különösen abban az esetben, ahol a valószínűségi eloszlás grafikonjai többször is metszik egymást.*

34. ábra *Beruházási alternatívák kumulált valószínűsége*



4. A HASZNOSSÁGI ELMÉLET ALAPJAI

4.1. Kockázat és hasznosság

Az előzőekben már igazoltuk, hogy önmagában miért elégtelen döntési kritérium a várható profit maximalizálása. Neumann és Morgenstern[27] kimutatta, hogy akkor kapunk megfelelő kritériumot, ha a pénzjövedelemből származtatott várható hasznosságot helyettesítjük a pénzbeli profit helyére. Az ilyen döntési feltételnek megvan az az előnye, hogy a profitabilitást, s a bizonytalan beruházási projektben benne rejlő kockázatot *egyidejűleg* vesszük figyelembe. A hasznosság koncepciójának bevezetéséhez tekintsük egy olyan befektető esetét, aki két alternatíva közül választhat.[28] Az illusztrációt a 31. tábla mutatja.

---

[27] John von Neumann and Oskar Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior. 2nd ed. Princeton, N.J. Princeton University Press 1953.

[28] Az egyszerűsítés érdekében feltételezzük, hogy a kiadások és hozamok egyetlen időpillanatban történnek, így nincs szükség a pénzáram diszkontálására.

31. tábla *Várható profit számítása*

A		B	
Nettó profit (dollár)	**Valószínűség**	**Nettó profit (dollár)**	**Valószínűség**
1 000	½	0	½
3 000	½	4 000	½
Várható profit:	2 000		2 000

Látható, hogy a két projekt várható profitja (2 000 dollár) ugyanakkora. A két változatra tekintve az is nyilvánvaló, hogy a *B* projekt kockázata nagyobb, mint az *A* beruházásé. A továbbiakban kimutatjuk, hogy a várható profit azonossága ellenére az *A* projekt preferálható a *B* változattal szemben. Az *A* beruházás *B*-vel szembeni előnyben részesítésének intuitív magyarázata belátható, ha megvizsgáljuk a két projekt pénzbeli kimenetének különbségét.

Feltételezzük, hogy az a befektető, aki előzetesen az *A* projektet választja, most elmozdulást kezdeményez *A* projekt felől a *B* felé. Milyen változások indukálódnak egy ilyen elmozdulással? A két projekt közötti különbségek a következők szerint összegezhetők:

Szerényebb évben a befektető 1000 dollárral kevesebbet realizál a *B* projekten, mint az *A* változaton, jobb évben viszont a *B* beruházás hoz 1 000 dollárral többet. Így, ha a befektető megváltoztatja döntését, s az *A* beruházásról a *B* változatra tér, akkor 50%-os esélye van 1 000 dollár nyerésének, s ugyancsak 50%-os az esélye 1000 dollár elvesztésének. Ennek alapján, vajon érdemes-e áttérni az *A* projektről a *B* változatra? Általában a befektetők többsége nem mozdul el *A*-ról a *B*-re, mivel a pótlólagos 1000 dollárból származó hasznosság (szubjektív megelégedettség) kisebb, mint az a hasznosság, amiről le kell mondani az 1000 dollár elvesztésekor. Eme argumentum igazolásához tekintsük azt az egyént, aki pénzét egy periódusra befekteti, s utána a kapott pénzbeli megtérülést fogyasztási javak vásárlására fordítja.

Az egyének többsége számára a fogyasztásból származó pótlólagos megelégedettség (hasznosság) a fogyasztás növekedésével csökkenő. Mondhatjuk, hogy a fogyasztó először alapvető szükségleteit elégíti ki, s ezért az első 1000 dollár elköltéséből származó hasznosság viszonylag nagy. Az alapszükségletek kielégítése után várható, hogy a második 1000 dollár elköltéséből származó hasznosság kisebb lesz, s ez így várható tovább a jövedelem pótlólagos növekményeivel. A csökkenő marginális hasznosság koncepcióját a 32. tábla illusztrálja.

Amint a táblából látható, a teljes hasznosság a jövedelem növekedésével emelkedik, azaz minél magasabb a jövedelem, annál nagyobb a jövedelemből származó megelégedettség. Ugyanakkor a marginális hasznosság csökkenő: az első 1000 dollár hasznossága 1, a második 1000 dolláré 0.8, a harmadik 1000 dolláré 0.7 és a negyediké csak 0.5.

A 31. és 32. tábla értékeit kombinálva, a 33. tábla az *A* és *B* beruházást a belőlük származó hasznosság alapján mutatja.

32. tábla *A marginális hasznosság illusztrálása*

Jövedelem (dollár)	**Hasznosság**	**Marginális hasznosság**
0	0	
1 000	1	1
2 000	1.8	0.8
3 000	2.5	0.7
4 000	3.0	0.5

33. tábla *Profit és hasznosság*

A			***B***		
p_i	**Profit**	**Hasznosság**	p_i	**Profit**	**Hasznosság**
½	1 000	1	½	0	0
½	3 000	2.5	½	4 000	3.0
Várható profit:	2 000			2 000	
$E(U)$	1.75			1.5	

A és ***B*** beruházás várható hasznossága:

$$\tfrac{1}{2} \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 2.5 = 1.75 \qquad \text{és} \qquad \tfrac{1}{2} \cdot 0 + \tfrac{1}{2} \cdot 3 = 1.5$$

A tábla adatai azt mutatják, hogy míg az *A* és *B* projekt azonos várható profittal jellemezhető, azok különböző várható hasznosságúak. Az *A* beruházásból várható hasznosság 1.75, a *B* projektből származó ugyanezen érték csak 1.5. *Amíg a várható profit kritérium nem képes különbséget tenni A és B változat között, addig a várható hasznosság kritérium alapján egyértelműen preferálható az A projekt, amiről korábban megállapítottuk, hogy kisebb kockázatú.* Az *A* projekt *B*-vel szembeni preferálása érvényes minden hasznossági függvény mellett mindaddig, amíg azok rendelkeznek a csökkenő marginális hasznosság tulajdonságával. E kijelentés igazolható az egyén kockázati attitűdjének vizsgálatával.

4.2. Alternatív kockázati attitűdök

Elemzési szempontból célszerű megkülönböztetni a befektetők két csoportját:

- egyrészt azokat, akik nem kedvelik a kockázatot, így ezeket kockázatkerülőknek nevezzük,
- másrészt azokat, akik preferálják a kockázatos kilátásokat, így azokat kockázat-keresőknek tekintjük.

Elméleti és empirikus bizonyítékok sora igazolja, hogy a tipikus befektetőt kockázat-kerülőnek kell tartanunk. Vegyük a következő hipotetikus esetet! Feltételezzük, hogy az egyén számára 10 dollár ellenében a következő beruházási lehetőségek elérhetők:

34. tábla *Befektetési kimenet és valószínűség*

Periódusvégi érték	**Valószínűség**
9	½
11	½

Egy ilyen beruházás várható periódusvégi értéke: $½·9 + ½·11=10$ azaz a várható érték megegyezik az eredeti beszerzési árral. Más szavakkal: a beruházásból várható pénzbeli profit zéróval egyenlő.[29] Vajon az egyén várhatóan élni fog-e a vásárlási lehetőséggel?

Mivel korábban elutasítottuk a várható profit kritériumot, s azt a várható hasznosság elvével helyettesítettük, így válaszunk függ az egyén kockázati attitűdjétől, azaz annak fokától, hogy mennyire kedveli, vagy nem szereti a biztonságos kilátást bizonytalannal felcserélni.

Definíció:

a konkáv hasznossági függvénnyel jellemezhető egyén kockázat-kerülőnek tekinthető. Az U(X) hasznossági függvény akkor konkáv, ha

$$U'(X) > 0 \text{ és } U''(X) < 0$$

[29] Továbbra is eltekintünk a diszkonttényező alkalmazásától, mivel nagyon rövid beruházási periódust feltételezünk.

Definíció:

a konvex hasznossági függvénnyel jellemezhető egyén kockázat-keresőnek tekinthető. Az U(X) hasznossági függvény akkor konvex, ha

$$U'(X) > 0 \textit{ és } U''(X) > 0$$

A konkáv hasznossági függvénynek az a jellegzetessége, hogy a pénz marginális hasznossága csökken az értékek teljes releváns sorozatára vonatkozóan. Így azok a befektetők, akiknek a preferenciái csökkenő marginális hasznossággal jellemezhetők, kockázat-kerülőknek tekinthetők. *Ebből következően minden kockázat-kerülő egy teljesen biztonságos beruházást preferál egy olyan befektetéssel szemben, amelynek azonos a bizonytalan várható megtérülése.* Példánknál maradva, a kockázat-kerülő egyén nem vásárolja meg a fenti opciót hasznossági alapon, mivel 1 dollár lehetséges veszteség több, mint kompenzáció 1 dollár lehetséges megnyerésével szemben. Ez a konklúzió grafikus ábrázolással is megerősíthető.

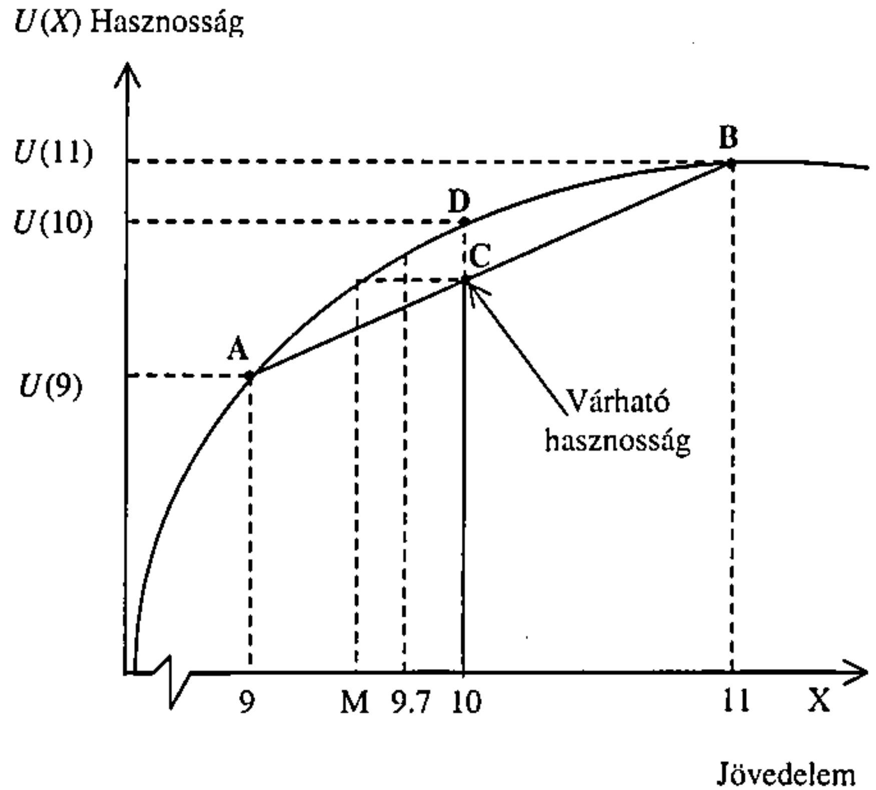
Az 35. ábra ugyanazt a beruházási problémát mutatja be: 10 dollárért vásárolni egy befektetési lehetőséget, amelynek periódusvégi értéke, azonos valószínűséggel 9 vagy 11 dollár.

A lehetséges periódusvégi értékek a vízszintes, a hasznosság a függőleges tengelyen találhatók. Az egyéni hasznossági függvény az ábrán konkáv görbeként az origóból indul, s e reláció a kockázatkerülés feltevésén alapul. A várható hasznosságot az ábrán a *C* pont mutatja; ez ott van, ahol a vízszintes tengely 10 értékén áthaladó függőleges egyenes a felezőpontnál metszi az *A* és *B* pontot összekötő húrt. A *C* pontban számított várható hasznosság az

$$\tfrac{1}{2} \cdot U(9) + \tfrac{1}{2} \cdot U(11)$$

súlyozott értékkel adható meg. Az ábráról az is kiderül, hogy a vételi ár *U*(10) hasznossága a görbe hozzá tartozó *D* pontjában nagyobb, mint a beruházási lehetőség *C* pont által mutatott várható hasznossága. *Így a kockázat-kerülő egyén azért nem vásárol olyan lehetőséget, amelynek várható értéke egyenlő annak vételi árával, mivel a hasznossági függvény konkávitása a zéró pénzbeli nyereséget hasznosságbeli veszteségbe fordítja.*

35. ábra *A várható hasznosság illusztrálása*



Most pedig feltételezzük azt, hogy az egyénnek ugyanazt a lehetőséget kínáljuk, csak alacsonyabb áron, mondjuk 9.70 dollárért. A periódusvégi várható érték 10 dollár marad, így a beruházási lehetőségnek pozitív várható megtérülése lesz (10 – 9.70 = 0.30 dollár). Vajon megvásárolja-e a kockázat-kerülő egyén a beruházási lehetőséget? Az ábra világosan mutatja, hogy nem lesz hajlandó megvásárolni, mivel a teljesen bizonyos 9.70 dolláros összeg még mindig meghaladja a *C* pontban található kockázatos lehetőség várható hasznosságát. Meddig kell az árnak esni ahhoz, hogy a kockázat-kerülő befektető hajlandó legyen azt megszerezni? A válasz megint csak könnyen leolvasható az ábráról. A maximális ár, amelyet hajlandó fizetni, az *M* ponttal reprezentálható a vízszintes tengelyen. Ennél az árnál $U(M)$ éppen egyenlő a kockázatos beruházási lehetőségből származó várható hasznossággal. A 10 és *M* közötti távolság annak a *kockázati prémiumnak* a nagysága, amely a kockázat-kerülő egyént a lehetőség megvásárlására indítja.[30]

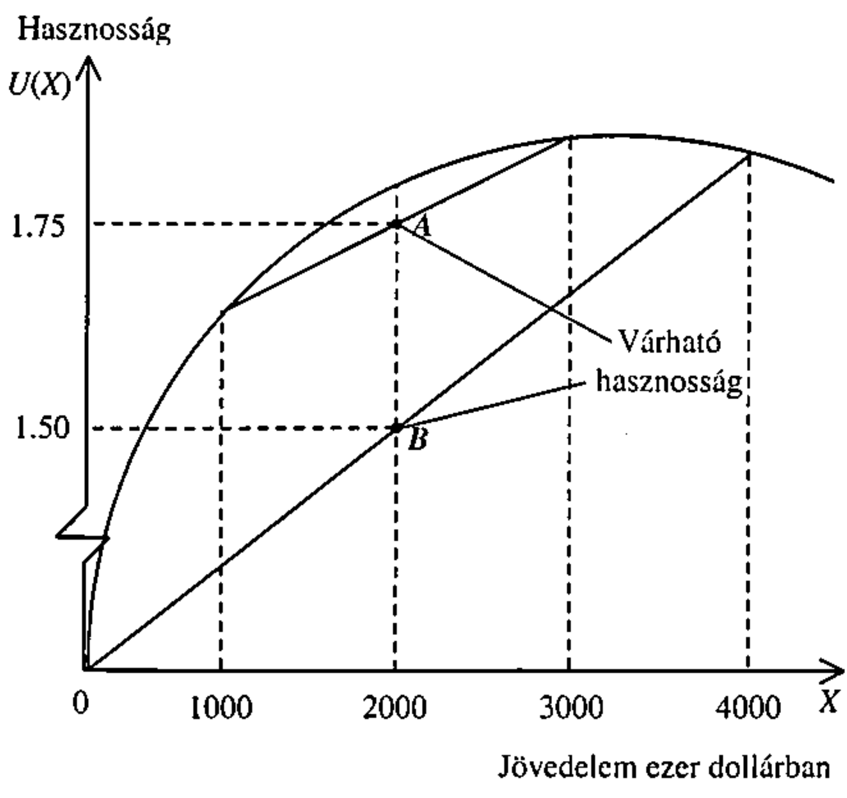
Az *M* pontnál alacsonyabb áraknál (az *M*-től balra eső pontok a vízszintes tengelyen) a beruházás vonzó, mivel hasznosságbeli nyereséget reprezentál. Másik oldalról az *M* pont fölötti áraknál – mint már láttuk – a kockázatos beruházás hasznosságbeli veszteséget jelez a kockázat-kerülő befektető számára. Az *M* érték a kockázatos lehetőség *bizonyossági egyenértékesét* reprezentálja; matematikailag *M* az az érték, amely mellett fennáll az $EU(X) = U(M)$ reláció, ha az *X* értéket véletlen változónak tekint-

[30] Az ábrán látható mértéket „Friedman-Savage" kockázati prémiumnak is nevezik. Ez az első kockázati prémium ama sok közül, amely a modern kockázati analízist jellemzi. Friedman, M.-Savage, L.I.: The Utility Analysis of Choices Involving Risk. Journal of Political Economy, August 1948.

jük. A Δ kockázati prémium a következők szerint adható meg: $\Delta = E(X) - M$.

A kockázati tartózkodás alapvető jellemzőinek birtokába kerülve vigyük keresztül a grafikus analízist a 167. és 168. oldalon közölt példánkon! Emlékeztetünk arra, hogy az összes kockázat-kerülő (azok az egyének, akik a pénz csökkenő marginális hasznosságával jellemezhetők), az ***A*** változatot preferálja a ***B*** helyett, s ez a várható profit azonossága mellett az utóbbi (***B***) projekt nagyobb szóródásának köszönhető. Mivel kockázat-kerülést feltételezünk, a hasznossági függvény az origóból induló konkáv görbe lesz, amint azt az alábbi ábra mutatja.

36. ábra *A jövedelem hasznossága*



Az *A* projekt várható hasznossága így számítható:

$$1/2U(1000)+1/2U(3000)=1/2(1)+1/2(2.5)=1.75$$

Ez az érték az ábra *A* pontjának felel meg, amely a 2000 dolláros pont fölött áthaladó függőleges vonal és a hasznossági függvény megfelelő húrjának metszésénél van. A *B* pont ugyanígy a ***B*** projektből származó várható hasznosságot mutatja. Mivel az *A* pont a *B* fölött van (s ez a reláció fennáll az összes konkáv hasznossági függvényre), ebből következően az összes kockázat-kerülő az *A* projektet preferálja ***B*** változattal szemben, függetlenül a kockázatkerülés fokától. Ennek magyarázata ugyancsak leolvasható az ábráról. Minden egyéb tényezőt változatlannak tekintve, a kockázat-kerülők nem kedvelik a kimenetek tág határok közötti szóródását. Az ábráról látható, hogy a két projektnek ugyanakkora várható profitja van, ugyanakkor a ***B*** változat kimeneteinek szóródási sávja sokkal szélesebb, mint az *A* projekté. Ezért preferálja az összes kockázat-kerülő az *A* változatot a *B*-vel szemben. A lehetséges befektetők két másik csoportja is azonosítható:

Először: vannak olyan optimisták, akik tartózkodás helyett vonzódnak a kockázathoz. Elemzésünkkel összhangban az ilyen befektető konvex hasznossági függvénnyel jellemezhető, ami azon a nem kifejezetten reális feltevésen alapul, hogy minden pótlólagos pénzegység marginális hasznossága növekvő.

Másodszor: vannak kockázat-közömbös befektetők, akik se nem kockázat-kerülők, se nem kockázat-keresők. Az ilyen egyén a pénz konstans marginális hasznosságát feltételezi, s lineáris hasznossági függvénnyel jellemezhető. A kockázat-közömbösség választóvonal a kockázatkerülés és kockázat-keresés között. A kockázat-közömbös egyén beruházási változatot egyedül a várható profit alapján választ, s figyelmen kívül hagyja a megtérülési értékek szóródását.

A várható hasznosság kritérium – a bizonytalanság körülményei között – elegáns és elméletileg megkérdőjelezhetetlen választ ad a beruházási választás problémájára.

4.2.1. A várható érték-variancia szabály

Markowitz (1952)[31] nagyon népszerű döntési szabályt fejlesztett ki a beruházások értékelésére, azok várható megtérülése és varianciája (szórása) alapján. E döntési kritérium a következők szerint definiálható: az *A* projekt preferálható *B* változattal szemben, ha a következő két kombinációból az egyik fennáll:

A várható megtérülése nagyobb (vagy egyenlő) *B* várható megtérülésénél és az *A* varianciája kisebb, mint *B* kockázata

$$E(R_A) \geq E(R_B) \text{ és } VAR(A) < VAR(B)$$

[31] Markowitz elutasítja azt a hipotézist, hogy a befektető a várható diszkontált megtérülést preferálja, ehelyett kapcsolatot illusztrál az érzület és a portfolió választás között a „várható megtérülés-variancia" szabálynak megfelelően.

A várható megtérülése nagyobb, mint ***B*** hozama és az ***A*** varianciája kisebb (vagy egyenlő), mint ***B*** varianciája

$$E(R_A) > E(R_B) \text{ és } VAR(A) \leq VAR(B)$$

Ezek alapján a várható megtérülés a projekt profitabilitás indikátora, a variancia pedig annak kockázati indexeként funkcionál. A várható érték-variancia szabály alkalmazásának illusztrálására tekintsük ama két projektet, amely profit-eloszlását a következő tábla mutatja:

35. tábla *Nettó profit és valószínűség értékek*

A		*B*	
Nettó profit (dollár)	**Valószínűség**	**Nettó profit (dollár)**	**Valószínűség**
1 000	½	0	½
3 000	½	4000	½
Várható profit:	2000		2000
Szórás:	1000		2000

Az ***A*** és ***B*** projekt várható profitja ugyanakkora:

$$E(R_A) = ½ \cdot 1000 + ½ \cdot 3000 = 2000$$

$$\mathrm{E}(R_B) = ½ \cdot 0 + ½ \cdot 4000 = 2000$$

Az *A* projekt varianciája így számítható:

$$VAR(A)=1/2(1\,000-2\,000)^2+1/2(3\,000-2\,000)^2=1\,000\,000$$

Ezért az *A* projekt szórása:

$$\sigma(A)=\sqrt{1\,000\,000}=1\,000$$

Ugyanígy számítható a *B* projekt varianciája és szórása:

$$VAR(B)=1/2(0-2\,000)^2+1/2(4\,000-2\,000)^2=4\,000\,000$$

$$\sigma(B)=\sqrt{4\,000\,000}=2\,000$$

Ha tehát alkalmazzuk Markowitz várható megtérülés-variancia szabályát, akkor megerősítjük, hogy az *A* projekt preferálható a *B* változattal szemben. Mindkettőnek ugyanakkora a várható profitja (2000 dollár), a *B* projekt azonban kockázatosabb a variancia alapján, s az eredmény összhangban van a várható hasznosság alapján kapott megoldással. *A várható megtérülés-variancia kritérium fontossága abban áll, hogy származtatható a várható hasznosság szabályból.* Ha feltételezzük a megtérülési értékek normális eloszlását, tehát a várható érték és a variancia minden lényeges információt tartalmaz az eloszlásról, akkor az összes kockázatkerülő egyén a várható megtérülés-variancia szabály alapján közelít a beruházási döntéshez. Így sok esetben e szabály helyettesíthető az elméletileg korrekt, de nem operacionális, várható hasznosság analízis helyére.

4.3. A várható hasznosság analízisének története

Régebben úgy gondolták, hogy a kockázatos alternatívák közül választó egyén a várható megtérülést maximalizáló változat mellett dönt. Habár a várható megtérülés szabály egyszerű, mégsem megfelelő a befektető mindegyik típusának.

A várható megtérülés kritériummal kapcsolatos problémák bemutathatók a Szentpétervár paradoxon példáján keresztül. Ezt a 18. században élt svájci matematikus Nicolas Bernoulli vetette fel, a jól ismert klasszikus probléma formájában. Itt a probléma adaptált változatát mutatjuk be. Feltételezzük, hogy az érmét addig dobjuk fel, amíg fejet kapunk. 1 dollárt kapunk, ha a fej az első dobásra lesz, 2 dollárt, ha a másodikra, 4 dollárt a harmadikra, 8 dollárt a negyedikre és így tovább – így a kifizetés minden újabb dobással megduplázódik. Ennek megfelelően, ha fejet kapunk az n-edik dobásra, akkor a kifizetés 2^{n-1} összegű lesz. Nyilvánvalóan remélhető, hogy az írás jelű dobások hosszabb sorozata után fej is jelentkezik. Ha fej 10 dobást követően lesz, akkor a kifizetés 512 dollár lesz. Vajon mekkora összeget volnánk hajlandók fizetni e játék lehetőségéért?

Mielőtt válaszolnánk e kérdésre, meg kell határoznunk a játék várható értékét. Ha fej első dobásra lesz, akkor ennek az eseménynek a valószínűsége 0.5, s 1 dollár kifizetést eredményez. Ahhoz, hogy 2 dollárt nyerjünk, az első dobásra írásnak, a másodikra fejnek kell lenni. Mivel a két dobás egymástól független, ennek az eseménynek a valószínűsége $(0.5)\cdot(0.5)=0.25$. A 4 dolláros nyeréshez két írást követő egy fej dobásra van szükség. E bekövetkezés valószínűsége $(0.5)\cdot(0.5)\cdot(0.5)=0.125$. Eszerint adott eredmény valószínűsége $1/2^n$, ahol n a dobások száma. A Szentpétervár játék várható értéke ennek alapján, a következők szerint írható fel:

$$0.5(1)+0.25(2)+0.125(4)+0.0625(8)+0.03125(16)+\ldots = 0.50+0.50+\ldots= \infty$$

Más szavakkal kifejezve, a Szentpétervár játék várható értéke meghatározatlan. Míg a valószínűségek mértani csökkenést mutatnak (½, ¼, ⅛, ...), addig a kifizetések növekedése ugyancsak mértani sorozat irányzatú (1, 2, 4, 8 ...), így mindegyik dobás várható értéke konstans, nevezetesen 0.50 dollár. Ha az egyén a várható megtérülés kritériumot veszi alapul, akkor hihetetlenül nagy összeget (mondjuk 1 millió dollárt) lenne hajlandó fizetni a játék lehetőségének elnyeréséért. Vajon tényleg hajlandó lenne e nagy összeget kifizetni a játékért? Valószínűleg nem. Az egyének többsége csupán néhány dollárt volna hajlandó fizetni a játékban való részvételért. S ez lenne a paradoxon: az egyének többsége legfeljebb néhány dollárt volna hajlandó fizetni egy olyan játékban való részvételért, amelynek kifizetése végtelen nagy összegű.

A várható megtérülés kritérium alkalmazása helyett Daniel Bernoulli[32] és Gabriel Cramer a Szentpétervár paradoxont a várható hasznosság alapján próbálta megoldani. Elsősorban annak demonstrálására törekedtek, hogy igazolják a várható hasznosság megközelítés várható megtérülés kritérium feletti magasabbrendűségét. Bernoulli és Cramer kimutatta, hogy az egyének többsége csupán néhány dollárt hajlandó fizetni a játékban való részvételért, mivel annak rendkívül nagy kockázata van.

---

[32] D. Bernoulli (1954) bemutatja a Szentpétervár paradoxonra épülő szcenárió szerinti hasznosság maximalizálás eredeti intuitív logikai alapját.

Más szavakkal kifejezve, az az összeg, amit a kockázattól tartózkodó egyén hajlandó fizetni kisebb, mint a játék várható értéke, mivel a kockázat a hasznosság ellentettjének forrása. Bernoulli és Cramer rámutatott, hogy az egyének csupán akkora összeget hajlandók fizetni, ami közömbössé teszi őket a bizonyossággal kapható dollár összegből származó hasznosság, s a kockázatos játék lehetőségéből adódó, várható hasznosság közötti választás tekintetében. A várható hasznosság megközelítést *Neumann és Morgenstern újrafogalmazta*[33]*, kiterjesztve Bernoulli és Cramer analízisét a bizonytalanság melletti döntéshozatal általános problémájára. Neumann és Morgenstern szigorú axiomatikus megközelítés alkalmazásával igazolta a várható hasznosság kritérium felsőbbrendűségét nem csupán a várható megtérülés kritérium, hanem minden más egyéb döntési módszer felett.* A hasznossági analízist ma már sok területen alkalmazzák, így a közgazdaságtanban, a finanszírozásban, a pszichológiában a bizonytalanság melletti döntéshozatal céljára.

4.3.1. Hasznossági elmélet és a bizonytalanság melletti választás

A valószínűségi elmélet képes kvantifikálni a véletlen események lehetséges kimenetéhez kapcsolódó bizonytalanság fokát, nem képes azonban mérni a döntéshozó szubjektív érzületét eme bizonytalan kimenetekkel összefüggésben. Ennek illusztrálására vegyük azt az embert, akinek lehetősége van 9 500 dollárt fizetni egy darab földterületért, amelyről úgy hiszi, hogy 0.5 valószínűséggel rövidesen új űrkutatási központ területéül

[33] Neumann, I.-Morgenstern, O.: The Theory and Games of Economic Behaviour. Princeton University Press 1947.

szemelik ki. Amennyiben elgondolása helyes, akkor ez az opció 100000 dollárt ér, ha viszont nem, akkor a területet továbbra is legelőnek használják, s így az opció értéktelennek bizonyul. Mi lesz az általa hozott legvalószínűbb döntés?

A befektetői döntés ebben az esetben nagy mértékben függ a kockázatos kimeneteket érintő, szubjektív érzületeitől. Ha a döntéshozó gazdag, s számára a 9500 dollár viszonylag jelentéktelen összeg, akkor feltehetően megvásárolja az opciót. Minden bizonnyal élni fog a beruházási lehetőséggel, mivel a lehetséges kimenetek várható értéke jóval meghaladja az opció költségét. Másik oldalról viszont, ha a 9500 dollár egész életének megtakarítását reprezentálja, akkor valószínűleg visszautasítja az ajánlatot annak ellenére, hogy a nettó hozadék várható értéke egyértelműen előnyére lenne. Ez a példa azt illusztrálja, hogy *ha a befektetőre kockázati tartózkodás jellemző, akkor számára a kockázatos beruházás attraktivitása pontosan nem mérhető a lehetséges megtérülési kimenetek várható pénzbeli értékével. Amennyiben ilyen helyzet áll elő, akkor a várható pénzbeli érték helyett a várható hasznosság lesz a racionális cselekvés számára irányadó.*

4.3.2. Mi a hasznosság?

A hasznosság John von Neumann és Oskar Morgenstern által felépített hasznossági elméletében a döntéshozó által alkalmazott érték, amely a bizonytalanság változó foka mellett mutatja a kifizetések értékét. Amikor az alternatív cselekvésekhez kapcsolódó kifizetések bizonyossága 100 százaléknál kisebb, akkor a döntéshozó saját, legmagasabb preferencia-értékét a várható hasznosságot maximalizáló cselekvéssel érheti el.

A Neumann-Morgenstern hasznossági indexet meg kell különböztetni az Alfred Marshall által felállított kardinális hasznosság koncepciótól, illetve R. G. D. Allen és John Hicks által képviselt ordinális hasznossági megközelítéstől.[34] Marshall és a többi, kardinális hasznosságot alapul vevő, gondolkodó számára a hasznosság ugyanolyan megfigyelhető és kvantifikálható fizikai mérték volt, mint a test hőmérséklete vagy súlya, ami pontosan mérhető. Így az egyénről feltételezhető, hogy képes érzés alapján eldönteni, hogy egy banán elfogyasztása számára x egység megelégedettséget okoz és minden további banán elfogyasztása egyre kisebb megelégedettséget biztosít. Marshall a fogyasztói keresleti görbe negatív meredekségét a csökkenő marginális hasznosság törvényéből származtatta. A hasznosság eme kardinális, hedonista interpretációja a 30-as évek közepén utat nyitott a hasznosság ordinális, behaviorista interpretációja számára. Allen és Hicks 1934-ben anélkül építette fel a fogyasztói viselkedés elméletét, hogy abban a hasznosságot mérhető mennyiségként feltételezte volna. Elméletüket arra a feltevésre alapozták, hogy a fogyasztó preferencia skálával rendelkezik, amely mentén a javak különféle kollekciói előnyösségük szerint rangsorolhatók. A hasznosság a fogyasztó számára olyasvalami, ami inkább a rangsorolás, mint a pontos mérés alapja. Robert Strotz művéből kölcsönözve a kifejezést, az ordinális megközelí-

[34] Alfred Marshall: Principles of Economics. London MacMillan and Co. Ltd 1920, Book III. Ch.3.
John Hicks and R.G.D. Allen: A Reconsideration of the Theory of Value. Economica, February 1934. pp 52-76, and May 1934. pp. 190-219.

tésben a hasznosság „a fogyasztói viselkedést leíró függvény explicit leírására alkalmas jel”.[35]

A hasznosság modern elméletét Neumann és Morgenstern dolgozta ki a racionális magatartás elméletének felépítésére tett kísérletük eredményeként. *Miközben erőfeszítéseket tettek a döntéshozatal bizonytalansági feltételek közötti megértésére, felismerték, hogy a kockázatos tranzakciók attraktivitása úgy értékelhető, hogy ahhoz hozzárendelik bizonyossági egyenértékesük hasznosságát.* Eme bizonyossági egyenértékes hasznossága úgy számítható, hogy vesszük a különböző lehetséges kimenetekből származó hasznossági értékek súlyozott átlagát, ahol a valószínűségek szolgálnak súlyként. Amikor a döntéshozó bizonytalan kimenetek sorozatát ígérő cselekvési lehetőségek közül választ, akkor a saját várható hasznosságát maximalizáló cselekvési változatot kell választania.

Még specifikusabban kifejezve: Neumann és Morgenstern kimutatta, hogy bizonyos plauzibilis feltételek mellett az egyénnek az alábbi tulajdonságokkal jellemezhető hasznossági függvénye van.

1. Ha az A kimenetet preferálják B változattal szemben, akkor az A $U(A)$ hasznossága nagyobb a B kimenet $U(B)$ hasznosságánál. Ennek a fordítottja is ugyanígy fennáll.

2. Ha az egyén L lottószelvény tulajdonosa, s a játék A kifizetést p, B kimenetet 1-p valószínűséggel ígér, akkor a játék $U(L)$ hasznossága a következő formulával számítható:

$$U(L) = p \cdot U(A) + (1\text{-}p) \cdot U(B)$$

[35] Robert Strotz: Cardinal Utility. American Economic Review, May 1993, p. 385

Az 1. tulajdonság azt mondja, hogy a hasznosság növekszik vagy csökken, amint a kimenet fokozottabban vagy kevésbé attraktívvá válik. A 2. tulajdonság szerint egy szerencsejáték hasznossága a kifizetések hasznosságának súlyozott átlagaként számítható, súlyként a valószínűségeket használva. Amikor a különböző cselekvési módok bizonytalan kimenetek különböző eredményeit ígéri, akkor az optimális megoldás azt a változatot választani, amely maximalizálja a döntéshozó várható hasznosságát.

Most már láthatjuk a Neumann-Morgenstern hasznossági elmélet és a korábbi koncepciók lényeges különbségét. Az a tény, hogy a Neumann-Morgenstern hasznosság mérhető, elválasztja az Allen és Hicks ordinális hasznosságától. Annak ellenére, hogy a Neumann-Morgenstern hasznosság mérhető, mégis mutat némi hasonlóságot Marshall kardinális hasznosságával, mivel Marshall hasznosság koncepciója az öröm, vagy a fájdalom mérésére szolgáló pszichológiai mennyiség, a Neumann-Morgenstern hasznosság a kockázatos tranzakciók értékelésére szolgáló numerikus index.

4.3.3. A Neumann-Morgenstern hasznossági függvény konstruálása

A hasznossági elmélet alkalmazásában fontos lépés a kockázatos tranzakciókhoz kapcsolódó kifizetések hasznosságának meghatározása. Megmutatjuk azt a módot, ahogyan bármely egyén a hasznossági függvény 2. tulajdonságának felhasználásával származtathatja saját pénz-hasznossági függvényét.

Vegyünk alapul egy referencia szerencsejátékot, amelynek birtokosa ***A*** kifizetést remél *p*, és ***B*** kifizetést (1-*p*) valószínűséggel. Az *A* nagyon nagy pozitív, a ***B*** nagyon nagy negatív összeget reprezentál. Rendeljünk tetszőlegesen 1 értékű hasznosságot az *A*, nagyon nagy pozitív kifizetéshez és 0 hasznosságot ***B***, nagyon nagy negatív kifizetéshez. Ez a két tetszőleges hasznossági hozzárendelés megválasztása ugyanolyan okokból szabad elhatározás tárgya, mint a hőmérséklet mérésében a zérus pont kiválasztása, illetve a mérési egység meghatározása. Ehhez hasonlóan a hasznossági analízisben bármely kifizetéshez hozzárendelhető zérus értékű hasznosság, s bármely nagyobb kifizetéshez 1 értékű hasznosság. E szabad választási lehetőség egyet jelent azzal, amit matematikailag úgy fejeznek ki, hogy a hasznossági függvényt csupán a lineáris transzformáció teszi egyedivé.

Azt követően, hogy a 0 és 1 értéket hozzárendeljük a kimenetekhez, a hasznossági függvény összes többi pontja a fentebb bemutatott tulajdonságokkal összhangban meghatározható. Feltételezésünk szerint megállapítható a döntéshozó hasznossága *X* kockázatmentes összegre vonatkozóan. A fenti referencia játékban a *p* és (1-*p*) érték megválasztása úgy volna célszerű, hogy a döntéshozó közömbös lehessen a szerencsejáték és a kockázatmentes összeg tekintetében. *Ekkor a kockázatmentes összeg a szerencsejáték bizonyossági egyenértékese lesz.* A játékszelvény hasznossága $p \cdot U(A)+(1-p) \cdot U(B)$, s ezért a kockázatmentes összeg hasznossága ugyanilyen kifejezéssel adható meg. Illusztrációként a referencia játékban legyen *A* értéke 10000, *B* értéke –5000 dollár, az $U(A)$ hasznosság 1, az $U(B)$ érték pedig 0. Ha meghatározzuk az egyén számára egy 2000 dolláros kockázatmentes összeg hasznosságát, akkor a *p* és (1-*p*) értéket úgy kell megválasztani, hogy közömbös lehessen a kockázatmentes összeg és a szerencsejáték közötti választás tekintetében. Feltevés szerint p és (1-p) értéke egyaránt 0.5. Eszerint az egyén számára a 2000 dolláros kockázatmentes összeg hasznossága ½(0) + ½(1) = 0.5 lesz. Mivel ez a számítási mód bármely kockázatmentes összeghez alkalmazható, így azt felhasználhatjuk az egyén hasznossági függvényének konstruálásához.

4.4. A hasznossági elmélet alapjai

A bizonyossági feltevés feloldása szükségessé teszi a várható megtérülés és kockázat kritérium együttes figyelembevételét a döntési alternatívák értékelésében. *A döntéshozók mindazonáltal a kockázat és megtérülés változó mértékére eltérően tekintenek, ezért divergens döntési alternatívákat választanak.* A hasznossági elmélet kísérlet a racionális döntéshozatal formalizálására, ahol is az alternatívák közötti preferenciákat adott döntéshozó specifikálja. A különböző alternatívákhoz kapcsolt hasznossági érték reprezentálja a döntés szempontjából összes lényeges aspektust. A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy alkalmazható-e a hasznossági elmélet a kockázat és megtérülés közötti átváltási kapcsolatban.

A döntéshozó az egyéni preferenciák tekintetében feltétlenül figyelembe kell hogy vegye az alábbiakat:

- Az összes releváns célok sorozatát
- A célok hierarchiáját, valamint a célok elfogadható átváltását a hierarchián belül

- A kockázat önmagában érzékelését és a kockázat-megtérülés preferenciát (azt a pótlólagosan megkövetelt várható megtérülést, ami igazolja az addicionális kockázat egység elfogadhatóságát)

- A folyó, illetve a jövőbeli fogyasztás közötti választás preferenciáját, amit befolyásol a jelenlegi gazdasági pozíció, a likviditási követelmény és sok más egyéb tényező.

Ahhoz, hogy képesek legyünk specifikálni, illetve különbséget tenni a kockázati preferenciák (vagy tartózkodások) különböző szegmensei között, definiálnunk kell a döntéshozó hasznossági függvényét a megkövetelt megtérülés és a kockázat alapján. Ez szükségessé teszi koherencia axiómák elfogadását, amelyeket az alábbiakban részletezünk.

1. Bármely két kiadás (pénzértékben vagy nem pénzben kifejezve) tekintetében a döntéshozó preferálhatja egyiket a másikkal szemben, vagy közömbös lehet a kettő viszonylatában.

2. Ha adott döntéshozó K_1 kiadást preferálja K_2, valamint K_2 változatot K_3 ellenében, akkor K_1 szükségképpen preferált lesz K_3 változattal szemben (tranzitivitás vagy a preferenciák konzisztenciája).

3. Ha a döntéshozó K_1 változatot preferálja K_2 ellenében, a K_2 variánst pedig K_3–mal szemben, akkor előfordulhat K_1 és K_3 olyan valószínűségi kombinációja, amely preferálható K_2 változattal szemben, továbbá néhány más valószínűségi kombináció K_1 és K_3 között, amely rosszabb K_2–nél, illetve K_1 és K_3 között egy olyan harmadik kombináció, amely a döntéshozót közömbösen hagyja a K_2 tekintetében.

4. Ha a döntéshozó a K_1 változatot preferálja K_2 variánssal szemben, a K_3 pedig egy másik kiadási tétel, akkor a K_1 és K_3 valószínűségi kombinációja előnyben részesül K_2 és K_3 ugyanilyen kombinációjával szemben.

5. Ha az egyén közömbös K_4 és K_5 kifizetési tétel iránt, akkor azok bármely döntési szituációban helyettesíthetik egymást.

6. Ha a döntéshozó K_1 változatot preferálja K_2 variánssal szemben, akkor K_1 és K_2 valószínűségi kombinációjában az első akkor és csak akkor preferált, ha az nagyobb K_1 arányt tartalmaz.

Amennyiben a döntéshozó elfogadja a fenti koherencia axiómákat, akkor megalapozottan feltételezhető, hogy hasznosságát is maximalizálja. Ez a rendelkezésre álló döntési alternatívák közül azok kiválasztását jelenti, amelyek a legfokozottabb megelégedettséget okozzák. Mivel a preferenciák szükségképpen szubjektívek, így a döntéshozó hasznossági függvényének pontos specifikálása kivitelezési nehézségekkel jár, továbbá az egyéni hasznossági preferenciák valószínűleg időben is változnak. A döntéshozók három átfogó csoportja mégis leírható, azok kockázati preferenciája alapján: kockázat-kerülő, kockázat-közömbös és kockázatkedvelő. A kockázat alapul vételével a döntéshozók a következők szerint osztályozhatók:

A kockázat-kerülő döntéshozó számára a növekvő gazdagságnak csökkenő marginális hasznossága van. Az ilyen egyén számára a pótlólagos gazdagság élvezetének lehetősége kevésbé vonzó, mint a gazdagság vagy jövedelem csökkenéséhez kapcsolódó kellemetlenség.

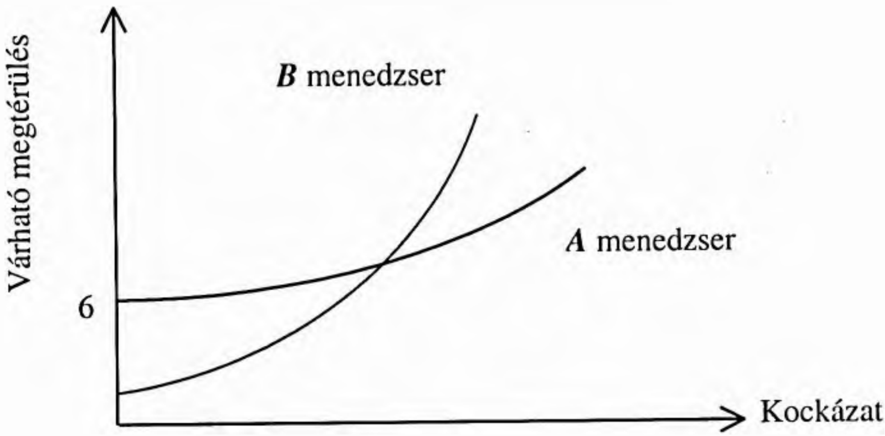
A kockázat-közömbös döntéshozók marginális hasznossága konstans, így hasznossági grafikonjuk az egyenes lesz.

A kockázat kedvelő döntéshozók számára a gazdagság nagyobb potenciális növekménye emelkedő marginális hasznossággal jár.

Mindhárom kategórián belül a döntéshozó változó mértékben demonstrál preferenciát vagy tartózkodást a kockázat viszonylatában. Így az egyedi döntéshozókra vonatkozóan eltérő hasznossági függvényeket feltételezhetünk. Továbbá, minden egyes döntéshozó egymást nem metsző hasznossági görbe-sorozattal rendelkezik; e görbék a megelégedettség egyre magasabb fokát mutatják. A várható hasznosság maximalizálása érdekében a döntéshozó a lehetséges alternatívák közül (és korlátok mellett) a legmagasabb fekvésűt törekszik elérni. *A tőkeberuházási döntéshozatal világában a tapasztalatok azt mutatják, hogy a menedzserek túlnyomó többsége kockázat-kerülő, bár a kockázati tartózkodás specifikus mértéke széles sávban változhat.* A 37. ábra két menedzserre vonatkozóan kockázat-megtérülés hasznossági függvényeket (közömbösségi görbéket) mutat be.

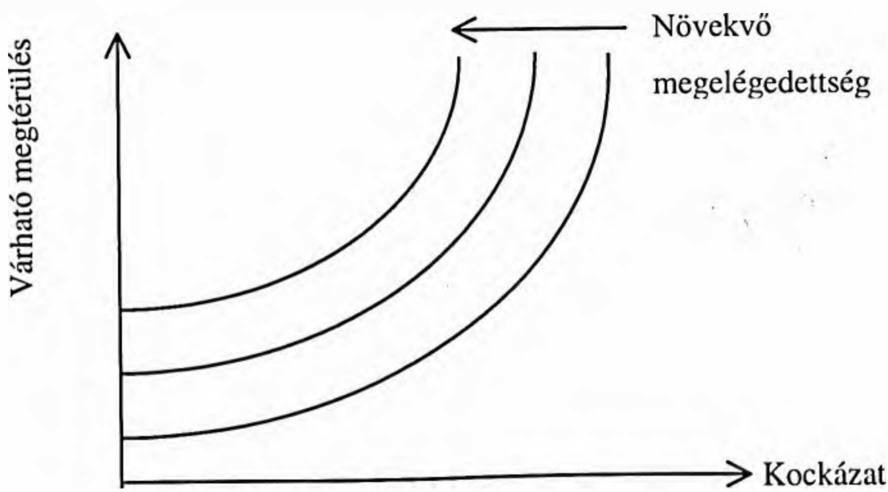
Az ábráról látható, hogy ***A*** menedzser kevésbé kockázat-kerülő, mint ***B***. Mindkét döntéshozó hajlandó elfogadni 6%-os kockázatmentes rátát, bár a ***B*** menedzser növekvő mértékben követel pótlólagos megtérülést a kockázat növekedésének kompenzálására. Az ábra két menedzser kockázat-megtérülés preferenciáit mutatja egy bizonyos időpontban.

37. ábra *Kockázat-megtérülés közömbösségi görbék*



Mint az előbb említettük, mindegyik menedzser közömbösségi görbék olyan sorozatával rendelkezik, amelynek egyes grafikonjai a megelégedettség különböző szintjét mutatják.

38. ábra *Adott menedzser közömbösségi görbe sorozata*



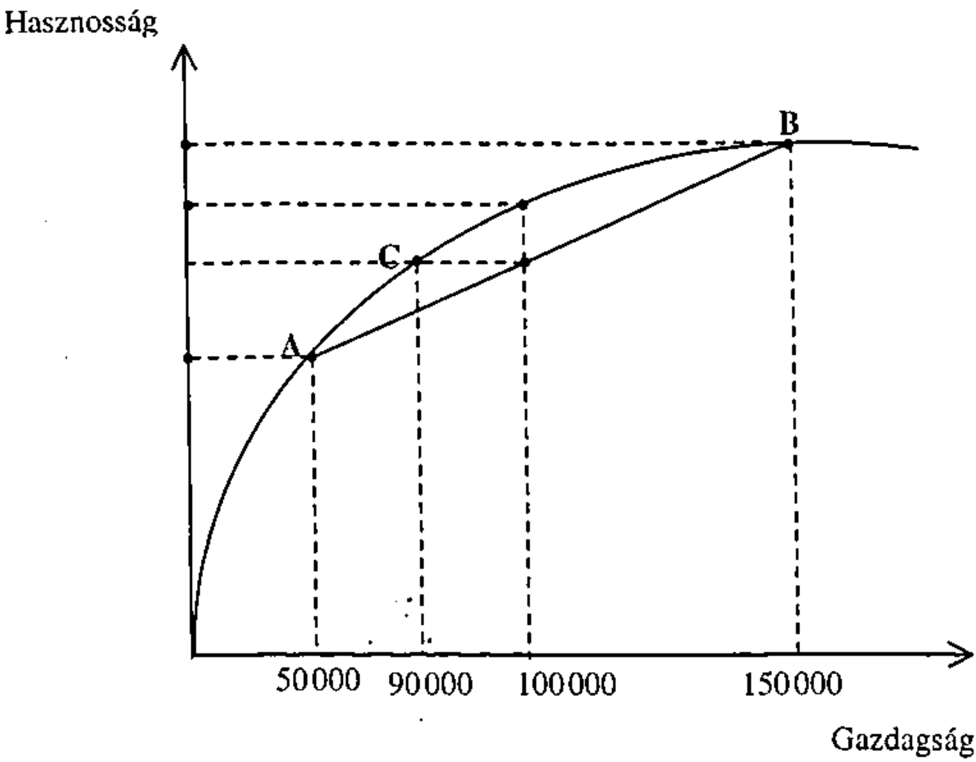
Görbék ilyen sorozatát mutatja a 38. ábra. Ahogy haladunk ÉNY irányban felfelé, a görbék a megelégedettség egyre magasabb szintjét mutatják.

Adott kockázat-megtérülés preferenciák mellett abban a helyzetben vagyunk, hogy tanulmányozhatjuk a kockázat kompenzálásának módozatait a tőkeberuházási folyamatban.

4.4.1. A hasznosság a megelégedettség mértéke

A hasznosság javak, szolgáltatások, természeti szépségek és hasonlók fogyasztásának forrása, továbbá alapja a pénzbeli gazdagság fogyasztássá transzformálásának. Mivel a beruházások kimeneteiből származó hasznosságot vizsgáljuk, így ezek gazdagságunkra gyakorolt hatását kell felmérnünk. A következő három ábra különböző befektetőkre vonatkozó gazdagság-hasznosság relációt mutat. A 39. ábrán a befektető hasznossága a gazdagság növekedésével emelkedik, méghozzá csökkenő ütemben. Ahogy a gazdagság 50000 dollárról, 100000 majd 150000 dollárra nő, a hasznossági többlet mindkét növekedésből származóan pozitív, bár a második növekedés többlete kisebb, mint az elsőé. Az ilyen befektető számára a gazdagságnak *csökkenő marginális hasznossága* van. E hasznossági mérlegelés grafikus ábrázolása a 39. ábrán látható.

39. ábra *Kockázat-kerülő befektető hasznossági görbéje*



Nézzük meg, hogy miként reagál a csökkenő marginális hasznosságú befektető a bizonytalan, illetve a biztonságos kimenetre. A bizonytalan kimenet azonos az 50000 vagy 150000 dolláros gazdagsági szint egyenlő esélyű elérésével. A bizonytalan kimenet várható dollár értéke:

$$0.50 \cdot 50000 + 0.50 \cdot 150000 = 100\,000$$

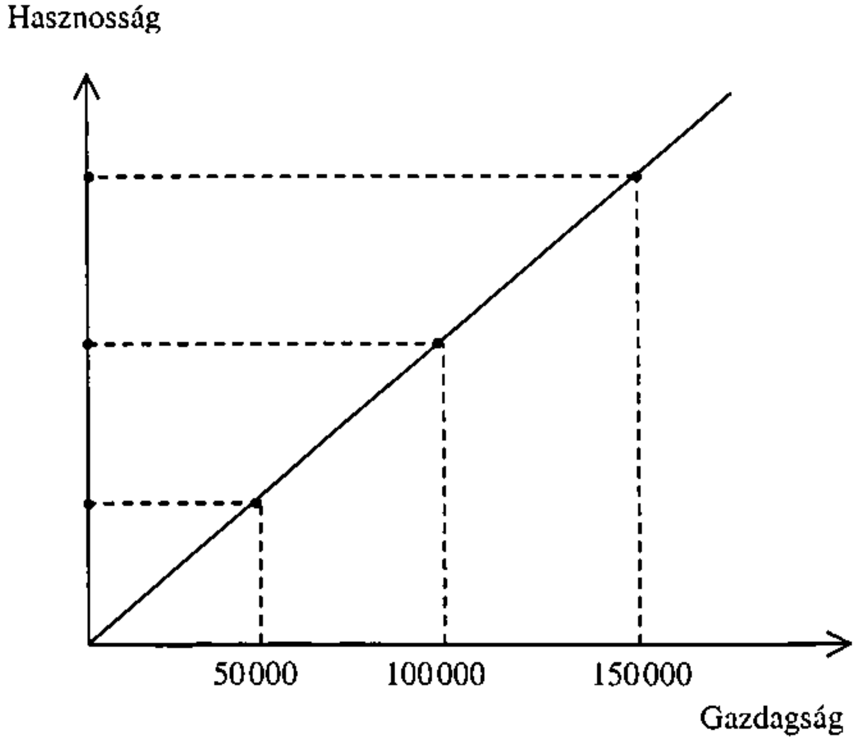
Az egyes kimenetek hasznossága a függőleges tengelyen található. A kimenetek várható hasznossága

$$[0.50 \cdot U(50\,000) + 0.5 \cdot U(150\,000)]$$

számítással határozható meg, s az *A* és *B* hasznossági pontokat összekötő egyenes felezőpontjában található. Látható, hogy a befektető számára a 100 000 dolláros várható kimenetű beruházás várható hasznossága kisebb, mint a biztonságos 100 000 dolláros kimenethez kapcsolódó hasznosság. Úgyszintén meghatározható a biztonságos kimenet ama összege, amelynél a befektető nem lát differenciát a bizonytalan és a bizonyos összeg között. Ezt az összeget *bizonyossági egyenértékesnek* nevezzük, amit úgy kaphatunk meg, ha egyenest húzunk a befektetés várható hasznossági pontjából a hasznossági görbe felé, s ahol az a *C* pontban azt metszi, onnan függőleges egyenest engedünk a vízszintes tengelyig. Az előző ábrán bemutatott befektető számára nincs különbség a bizonytalan 100 000 dolláros kimenet és a 90 000 dolláros biztonságos kimenet elnyerése között. Az ilyen befektetők számára a bizonytalan kimenetű beruházás bizonyossági egyenértékese 90 000 dollár. Vegyük észre, hogy a bizonyossági egyenértékes nagysága a befektetés várható értékével összefüggésben egyaránt kapcsolatban van a beruházás, illetve a befektető hasznossági görbéje természetével. *A csökkenő marginális hasznosságot érzékelő befektetők számára a bizonytalan beruházás bizonyossági egyenértékese kisebb, mint annak várható értéke, ezért az ilyen befektetőket kockázatkerülőnek nevezzük.*

A 40. ábrán látható hasznossági függvény a gazdagság alapján lineáris. E szerint a hasznosság növekménye a gazdagság minden egyes pótlólagos emelkedése mellett állandó. Az ilyen befektető számára a gazdagság marginális hasznossága konstans. Ilyen döntéshozók esetében a bizonytalan kimenetű beruházás bizonyossági egyenértékese azonos annak várható értékével. E hasznossági attitűd grafikusan így ábrázolható:

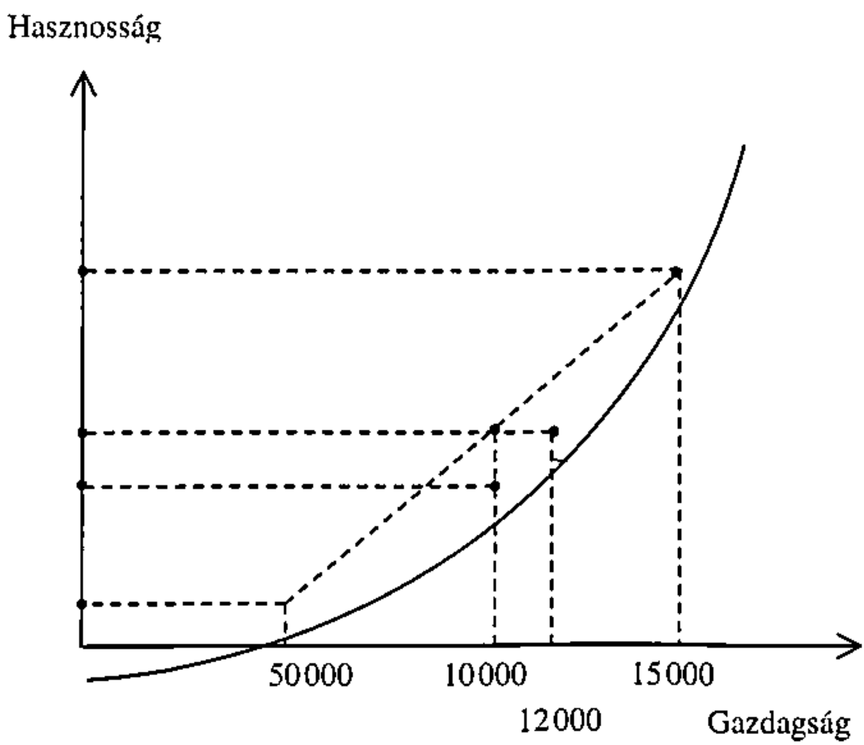
40. ábra *Kockázat-közömbös befektető hasznossági görbéje*



További jellemző, hogy ebben az esetben nem lényeges a lehetséges kimenetek szóródása. Az ilyen befektetők közömbösek a bizonytalan beruházás kockázata iránt, s így ezek kockázat-közömbösnek tekinthetők.

A 41. ábra hasznossági függvénye növekvő arányban emelkedő irányzatú. Itt a gazdagság minden egymást követő növekménye a korábbiakhoz képest egyre nagyobb növekedést idéz elő a megelégedettségben. Az ilyen befektetők számára a gazdaságnak növekvő marginális hasznossága van. Ezek hajlandók prémiumot fizetni a kockázatos akcióban történő puszta részvételért. Számukra a bizonytalan befektetés bizonyossági egyenértékese 120000 dollár, ami 20000 dollárral magasabb annak várható értékénél. Továbbá minél nagyobb a kockázat, annál nagyobb prémiumot hajlandók fizetni érte, ezért nevezzük az ilyen befektetőt kockázatkedvelőnek. Az eset grafikus ábrázolása alább látható.

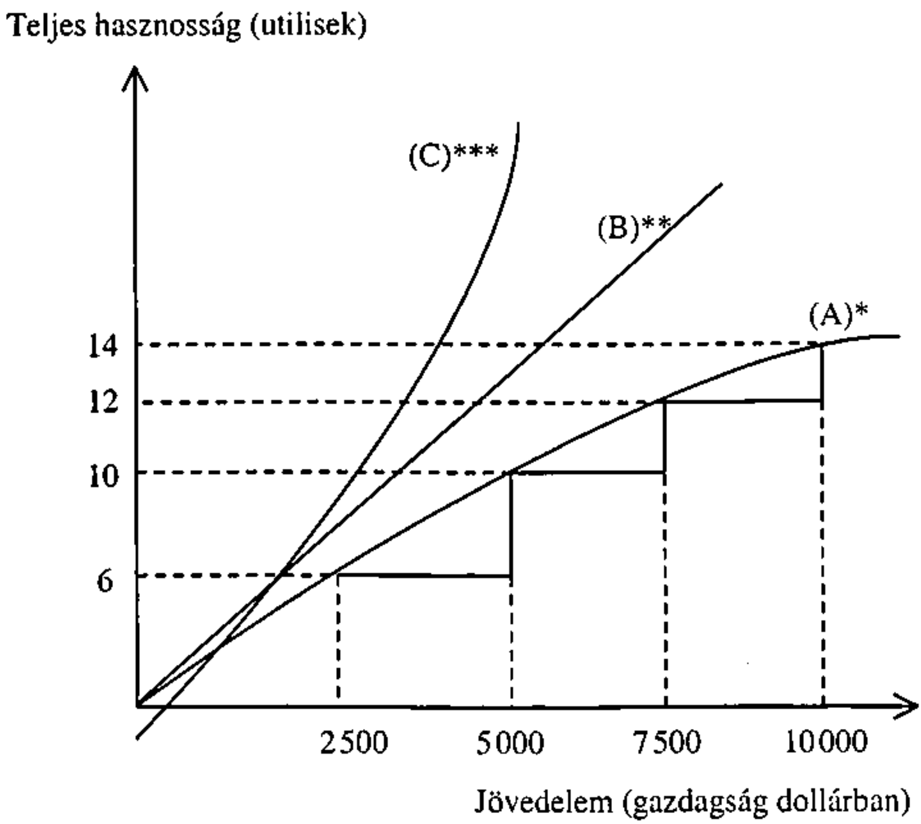
41. ábra Kockázat-kereső befektető hasznossági görbéje



4.4.2. A hasznosság szerepe a befektetési változatok közüli választásban

A hasznossági elmélet középpontjában a pénz csökkenő marginális hasznosságának tétele áll. Ha olyan egyén kap 100 dollárt, akinek egyáltalán nincs pénze, az ebből kielégítheti legégetőbb szükségleteit. Ha ezt követően kap újabb 100 dollárt, akkor azt is elkölthetné – bár e második 100 dollár nem lenne ugyanannyira szükséges számára, mint az első 100 dollár volt. E szerint a második, vagy marginális 100 dollár „hasznossága" kisebb, mint az első 100 dolláré, s ez igaz a pénz további pótlólagos adagjaira is. Ezért mondhatjuk azt, hogy a pénz marginális hasznossága csökkenő.

42. ábra *Kapcsolat a pénz és annak hasznossága között*



Jelmagyarázat:

* A pénz csökkenő marginális hasznossága, kockázati tartózkodó (A)

** A pénz állandó marginális hasznossága, kockázat közömbösség (B)

*** A pénz növekvő marginális hasznossága, kockázat kereső (C)

A 42. ábra kapcsolatot mutat ki a jövedelem (gazdagság) és annak hasznossága között. Az ábrán a hasznosság egységét *utilisnek* nevezzük.

Az (*A*) görbe azok számára bír elsődleges jelentőséggel, akiknek a pénz marginális hasznossága csökkenő. Ha valakinek van 5000 dollárja, akkor ez 10 utilisnek megfelelő megelégedettséget okoz számára; ha ehhez kap 2500 dollár pótlólagos összeget, akkor hasznossága 12 utilisre emelkedne, tehát a növekedés 2 egységnyi. Ha viszont veszítene 2500 dollárt, akkor a hasznosság 6 utilisre esne, azaz 4 egységgel csökkenne. A legtöbb befektető számára a pénznek csökkenő marginális hasznossága van, s ez közvetlenül befolyásolja azok kockázattal szembeni attitűdjét. Kockázati mérőszámaink becslik annak valószínűségét, hogy adott megtérülésről kiderül: alatta, vagy felette van-e a várható megtérülésnek?

Aki számára a pénz konstans marginális hasznosságú, az bármely 1 dollárnyi „extra" megtérülést ugyanakkorára értékel, mint bármely 1 dollárnyi „veszteséget" a megtérülésben. Másik oldalról, aki számára a pénznek csökkenő marginális hasznossága van, annak nagyobb „fájdalom" 1 dollár elvesztése, mint amekkora „öröm" 1 dollár nyerése. Ez utóbbi – saját hasznossági függvényét alapul véve – erőteljesen ellenezni fogja a kockázatot, s nagyon magas megtérülést fog követelni minden olyan beruházástól, amely jelentős kockázatnak van kitéve.

Az ábra (*A*) görbéjéről például látható, hogy az 5000 dolláros bázisról kiinduló 2500 dolláros növekmény 2 utilis megelégedettséget okoz, ugyanakkor 2500 dolláros csökkenés 4 utilisnek megfelelő veszteséget idéz elő. Ezért az ilyen hasznossági függvénnyel rendelkező egyén az 5000 dolláros összeg birtokában nem lesz hajlandó 50-50%-os esélyűnek elfogadni 2500 dollár elnyerését vagy elvesztését. A kockázat-közömbös egyén – a (*B*) görbe tanúsága szerint indifferens a választást illetően, a kockázat-kereső viszont vágyik az ilyen választásra.

A csökkenő marginális hasznosság közvetlenül vezet kockázati tartózkodáshoz, s ez utóbbi abban a tőkésítési rátában is tükröződik, amit a befektetők a vállalat értékének meghatározásához használnak. Ennek világossá tételéhez feltételezzük azt, hogy a kormányzati kötvények kockázatmentes értékpapírok, s az ilyen befektetések jelenleg 5%-os megtérülési rátát ígérnek. Így, ha valaki vásárol 5000 dollár értékű kormányzati kötvényt, egy évig megtartja, akkor ezt követően 5250 dollár értékkel zár, amiből 250 dollár a profit. Továbbá feltételezzük, hogy alternatív beruházási lehetőségként 5000 dollárral beszállhat egy dologi tőkebefektetésbe. Ha ez utóbbi vállalkozás sikeresnek bizonyul, akkor a beruházás értéke az év végén 7500 dollár lesz. Amennyiben sikertelen lenne, akkor a befektető felszámolná érdekeltségét és visszatérülne számára 2500 dollár. A projekt sikerének 60%-os, kudarcának 40%-os a valószínűsége. A kérdés az, hogy ha csak 5000 dollár befektetni való forrása van, akkor a kockázatmentes kormányzati kötvényt, vagy a kockázatos projektet érdemes-e választania.

Először számítsuk ki a két beruházás várható pénzbeli értékét!

36. tábla *A két befektetési változat várható megtérülése*

adatok dollárban

	Dologi projekt			**Kormányzati kötvény**		
Állapot	**Való-színűség**	**Kimenet**	**(1)·(2)**	**Való-színűség**	**Kimenet**	**(1)·(2)**
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
Siker	0.6	7500	4500	1.0	5250	5250
Kudarc	0.4	2500	1000			
	Várható érték =		5500			5250

A dologi projekt kalkulációja azt mutatja, hogy e vállalkozás várható értéke 5500 dollár, ami magasabb a kötvény vonatkozó értékénél. (másként kifejezve a dologi projekt várható megtérülése, 500 dollár, osztva az 5000 dolláros kiadással 10%-os rátát ad, szemben a kötvény 5%-os megtérülésével. Vajon ez azt jelenti-e, hogy a befektető pénzét a dologi projektbe kell beruházni? Nem szükségszerűen, mivel a döntés függ a beruházó hasznossági függvényétől is. *Amennyiben számára a pénz marginális hasznossága rohamosan csökkenő, akkor a kudarc nyomán előálló potenciális hasznosságbeli veszteséget teljességgel nem fogja ellensúlyozni a sikeres projektből származó potenciális hasznosságbeli nyereség. Ha a 42. ábra (A) görbéje érvényesül, akkor az éppen ezt az esetet mutatja.*

Ennek illusztrálásához úgy módosítjuk a várható pénzbeli érték kalkulációt, hogy az tükrözze a hasznossági megfontolásokat. Az ábra (*A*) görbéjéről leolvasható, hogy e bizonyos kockázat-kerülő befektető megközelítőleg 12 utilishez jut a dologi projekt sikeres megvalósulása, 6 utilishez pedig a dologi befektetés kudarca esetén, s végül 10.5 utilis hasznossághoz teljes bizonyossággal, ha a kormányzati kötvényt választja. Ezt az információt felhasználjuk az alábbi táblában a dologi tőkeberuházás várható hasznosságának kiszámításához.

37. tábla *Dologi tőkeprojekt várható hasznossága*

adatok dollárban

Állapot	**Valószínűség**	**Pénzbeli kimenet**	**Kapcsolódó hasznosság**	**(1)·(3)**
	(1)	(2)	(3)	(4)
Siker	0.6	7500	12.0	7.2
Kudarc	0.4	2500	6.0	2.4
			Várható hasznosság =	9.6 utilis

A kormányzati kötvényhez nincs szükség számításra, mivel tudjuk, hogy annak a vállalkozás sikerének kimenetétől függetlenül 10.5 utilis a hasznossága. Mivel a dologi tőkeprojektből származó várható hasznosság csak 9.6 utilis, a kormányzati kötvényből származó 10.5 utilissel szemben, így e befektető számára láthatóan a kormányzati kötvény lesz a preferált beruházás. Így annak ellenére, hogy a dologi projekt várható pénzbeli értéke magasabb, mégis a kötvény várható hasznossága nagyobb. A kockázati megfontolások ezért a biztonságosabb kormányzati kötvény választására indítanak.

4.4.3. A bizonytalanság és hasznossági elmélet kapcsolata

A portfolió elmélet az egyén gazdagságának különböző lehetséges befektetések közötti megosztásával (allokációjával) foglalkozik. A portfolió felépítésének első fázisa a követendő cél specifikálása, ami történhet az egyéni hasznossági függvény segítségével. A hasznossági elmélet elvi megalapozása így a portfolió szelekció kontextusában vizsgálható. Mivel adott eszköz jövőbeli értéke jelenleg ismeretlen, így a bizonytalanság körülményei között ez lesz a fő döntési probléma.

A fogyasztói magatartás hagyományos elmélete nem tartalmaz utalásokat a bizonytalansági helyzet analízisére vonatkozóan: ott az egyén kockázatmentes alternatívák közül választhat. *Kockázatos szituációban a befektető számára a rendelkezésre álló alternatív választási lehetőségek csak valószínűségi formában ismertek, s a modern hasznossági elmélet az ilyen helyzetek kezelésére született.* Amint a hagyományos elméletben az egyén maximalizálja a hasznosságot, úgy a modern elméletben az ennek megfelelő kritérium szerint, a bizonytalanság körülményei között működő racionális egyén a várható hasznosságot maximalizálja. A „racionális" magatartás biztosításához szigorú axiómának kell érvényesülni. Ez után a várható hasznosság kalkulációja – kockázatot magában hordozó helyzetben - felhasználható a fogyasztói magatartás meghatározására. Az egyén általában a gazdagság csökkenő marginális hasznosságával szembesül. E szerint a felhalmozott gazdagság minden addicionális egységéből egyre kisebb pótlólagos hasznosság származik. Ez azt jelenti, hogy *az egyének többsége kockázat-kerülő, s ennek alátámasztására szükség van annak feltételezésére, hogy az egyénnek kvadratikus hasznossági függvénye van.*

Ez általában helyénvaló megközelítésnek látszik, ezért felírható a következő összefüggés:

$$U(W) = a + bW - cW^2 \tag{1}$$

ahol U a hasznosság, W a gazdagság jele, az a, b és c önkényesen választott konstansok, amelyek egyénenként változnak, továbbá érvényesül a

$$b > 0 \text{ és } c < 0$$

reláció is.

Ha most az egyén várható hasznossága maximalizálására törekszik, akkor az (1) egyenletre szükséges alkalmazni a várható érték E operátorát, ami a következőt adja:

$$E[U(W)] = a + bE(W) - cE(W^2) \tag{2}$$

Mivel azonban ismert, hogy

$$\sigma^2(W) = E(W^2) - [E(W)]^2 \tag{3}$$

ahol a σ^2 a varianciát jelöli, így a (2) egyenlet a következők szerint átírható:

$$E[U(W)] = a + bE(W) - c[E(W)]^2 - c\sigma^2(W) \qquad (4)$$

E szerint a kvadratikus hasznossági függvény alkalmazása egy esemény várható hasznosságának specifikálásához csak a kimenet várható érték-variancia kontextusában történhet, ami ugyancsak kockázat-kerülő magatartást implikál.[36]

A beruházási döntések általában a végső gazdagság helyett a megtérülési ráta fogalmára alapozódnak. E szerint a (4) egyenlet átírható:

$$E[U(W)] = a + bE(R) - c[E(R)]^2 - c\sigma^2(R) \qquad (5)$$

Ennek alapján a közömbösségi görbe ama pontok sorozata, amelyeknél a várható hasznosság konstans, s amint az az (5) egyenletből látható: a pontok az $E(R)$ és σ^2 (R) különböző kombinációival állíthatók elő. A közömbösségi görbék így a várható megtérülési ráta és *a* megtérülés varianciája által meghatározott kontextusban definiálhatók.

4.4.4. A hasznossági függvények közgazdasági tulajdonságai

A hasznossági függvényre vonatkozó *első* tulajdonság szerint *a többet preferálni kell a kevesebbel szemben.* Ennek értelmében az $(x+1)$ nagyobb összeg hasznossága mindig nagyobb, mint az (x) kisebb összeg hasznossága. Így, ha két biztonságos beruházás közül akarunk választani, akkor rendszerint a nagyobb kimenettel rendelkező mellett fogunk dönteni. *Eb-*

[36] Az eseménynek nagy számú lehetséges kimenete van, hozzárendelt bekövetkezési valószínűségekkel.

ben az elemzésben a hasznossági függvényeket a periódusvégi gazdagság alapján formáljuk. E tulajdonság azt jelenti, hogy a nagyobb gazdagságot mindig preferálni kell a kisebbel szemben. Ha a hasznosság nő a gazdagság növekedésével, akkor a hasznosság gazdagság szerinti első deriváltja pozitív. Így a hasznossági függvényt érintő első jellemző a pozitív első derivált.

A hasznossági függvény *második* tulajdonsága a befektető kockázati viszonyulására vonatkozó feltevés; három változat lehetséges: a befektető kockázat-kerülő, kockázat-közömbös illetve kockázat-kedvelő. Mindhárom lehetőség az ún. fair játék alapján definiálható. Tekintsük az alábbi táblában található opciókat!

38. tábla Beruházási kimenetek és valószínűségük

Beruházni		Nem beruházni	
Kimenet	**Valószínűség**	**Kimenet**	**Valószínűség**
2	½	1	1
0	½		

A „beruházni" jelű opció várható értéke: (1/2)(2) + (1/2) (0) = 1. Feltételezzük, hogy a befektetőnek 1 dollárja van a beruházás megvalósításához és a kimenetek elnyeréséhez; így, ha a beruházás mellőzését választja, akkor az 1 dollár megmarad, s az alternatíva jele: „nem beruházni". Az akció várható értéke éppen egyenlő lesz a költséggel. A befektető pozíciója javulhat is, de romolhat is a beruházás megvalósításával, habár – feltevés szerint – nem következik be változás a pozícióban. Mivel a táblában bemutatott döntési eshetőség várható értéke azonos annak költségével, így azt „fair" játéknak nevezzük. *A kockázati tartózkodás* azt jelenti, hogy a befektető elutasítja a méltányos játékot. A tábla alapján ez azt jelenti, hogy a bizonyosan várható 1 dollárt preferálni kell az azonos esélyű 0 vagy 2 dollár kimenettel szemben. A kockázati tartózkodás implikációja alapján a hasznosság – gazdagság szerinti – második deriváltja negatív. Ha $U(W)$ a hasznossági függvény és $U''(W)$ annak második deriváltja, akkor a kockázati tartózkodás rendszerint olyan feltevés mellett érvényes, hogy $U''(W) < 0$. Vizsgáljuk meg, miért igaz ez!

Ha a befektető a beruházás mellőzését preferálja, akkor a „nem beruházni" alternatíva várható hasznossága nagyobb kell legyen a beruházás várható hasznosságánál:

$$U(1) > (1/2)U(2)+(1/2)U(0)$$

Megszorozva mindkét oldalt 2-vel és rendezve:

$$U(1)-U(0) > U(2)-U(1)$$

Vizsgáljuk meg az utóbbi relációt! E kifejezés azt jelenti, hogy egységnyi változás 0-ról 1-re értékesebb, mint egységnyi változás 1-ről 2-re. Ez utóbbi módosulás a kimenet nagyobb értékét involválja. Ama függvénynek, amelynek pótlólagos egységnyi növekménye kevésbé értékes, mint az utolsó növekmény-egységé, annak negatív a második deriváltja. *A kockázati tartózkodás feltevése azt jelenti, hogy a befektető azért utasítja el a fair játékot, mert a veszteségből származó hasznosság-hiány nagyobb, mint az egyenértékű nyereség hasznossága. Az ilyen tulajdonságot hordo-*

zó függvényeknek szükségképpen negatív a második deriváltja. Emiatt a fair játék elutasítása negatív második deriváltat implikál.

A kockázati közömbösség azt jelenti, hogy a befektető indifferens a tekintetben, hogy a fair játék megvalósul-e, vagy sem. Az előző tábla kontextusában a kockázat-közömbös befektető indifferens a beruházás megvalósulása vagy elmaradása tekintetében. *A kockázati közömbösség zéró értékű második deriváltat implikál.* Vizsgáljuk meg miért! A beruházás megvalósulása vagy elmaradása tekintetében közömbös befektető számára a két alternatíva várható hasznossága ugyanolyan kell hogy legyen, azaz:

$$U(1)=(1/2)U(2)+(1/2)U(0)$$

Megszorozva 2-vel és rendezve:

$$U(1)-U(0)=U(2)-U(1)$$

E kifejezés azt mutatja, hogy a hasznosság változása a gazdagság egységnyi módosulása hatására független attól, hogy 0-ról 1-re, vagy 1-ről 2-re mozdulunk. Ez a jellemző olyan függvényekhez kapcsolódik, amelyek második deriváltja zéró. *Így a fair játékkal szembeni közömbösség hordozza a zéró értékű második deriváltat, s a kockázat-semleges hasznossági függvénynek zéró értékű kell legyen a második deriváltja.*

A kockázat-kedvelés azt jelenti, hogy a befektető a fair játékot fogja választani. A tábla kontextusában a kockázat-kedvelő befektető a beruházás megvalósítását választja. A kockázat-kedvelő befektető hasznossági függvényének pozitív a második deriváltja; ennek magyarázó oka pontosan megegyezik az előzőekben mondottakkal. Mivel a kockázat-kereső befektető a beruházást választja, ezért a beruházás várható hasznosságának nagyobbnak kell lenni a beruházás mellőzésének várható hasznosságánál, azaz:

$$(1/2)U(2)+(1/2)U(0) > U(1)$$

Újra csak megszorozva 2-vel és rendezve:

$$U(2)-U(1) > U(1)-U(0)$$

E kifejezés azt mutatja, hogy egységnyi hasznosság-változás 1-ről 2-re nagyobb, mint a hasznosság egységnyi elmozdulása 0-ról 1-re. Ama függvények, amelyek a magasabb egység változására nagyobb értékelmozdulással reagálnak, azoknál a második derivált pozitív. Így a fair játék elfogadása pozitív előjelű második deriváltat von maga után.

Az áttekintett kondíciókat és következményeiket az alábbi táblában összegezzük.

39. tábla *Kockázati attitűd és méltányos játék*

Kondíció	**Definíció**	**Implikáció**
1. Kockázati tartózkodás	Méltányos játék elutasítása	$U''(0)<0$
2. Kockázat-közömbösség	Méltányos játékkal szembeni indifferencia	$U''(0)=0$
3. Kockázat preferálás	Méltányos játék választása	$U''(0)>0$

Ama befektetők, akik kifejezhetik viszonyulásukat a méltányos játékhoz, azok jelentősen mérsékelhetik az általuk figyelembe veendő kockázatos beruházások halmazát. Például egy kockázattól tartózkodó befektető csak a hatékony felületet kell hogy figyelembe vegye, amikor az alternatív portfoliók közül választ. *Így a hasznossági elmélet megértése nyomán egyszerűsödhet a befektetők szelekciós problémája, éppen akkor, ha nem hajlandók hasznossági függvényük specifikálására.*

A hasznossági függvény *harmadik* tulajdonsága arra vonatkozik, hogy módosul a befektető preferenciája a gazdagság változásával. A kérdés az, hogy amennyiben a befektető gazdagsága növekszik, akkor e gazdagság nagyobb vagy kisebb részét fogják-e beruházni kockázatos eszközbe. Például feltételezzük, hogy 10000 dollárral rendelkező befektető 5000 dollárt kockázatos eszközbe invesztál. Majd azt feltételezzük, hogy ugyanezen befektető gazdagsága 20000 dollárra emelkedik. A befektető vajon 5000 dollárnál többet, kevesebbet vagy éppen annyit fektet be kockázatos eszközbe? *Ha a gazdagság növelésével emeli a kockázatos eszközökbe irányuló befektetés összegét, akkor a beruházó csökkenő abszolút kockázati tartózkodásúnak mutatkozik. Ha a kockázatos eszközökbe irányuló beruházások a gazdagság növekedése ellenére változatlanok maradnak, akkor a befektető konstans abszolút kockázati tartózkodásúnak mutatkozik. Végül pedig, amennyiben a befektető kevesebbet ruház be a gazdagság növekedésekor, akkor a befektető növekvő abszolút kockázati tartózkodásúnak bizonyul.*

A kockázati tartózkodás vizsgálatával kimutatható, hogy annak lehetséges fokozatai a hasznossági függvény különböző deriváltjaihoz kapcsolódnak.[37] Ugyanilyen eredmény vonatkozik az *abszolút kockázati tartózkodásra* is. Ha $U'(W)$ és $U''(W)$ a hasznossági függvény első és második deriváltja adott W gazdagsági szint mellett, akkor igazolható, hogy

$$A(W)=\frac{-U''(W)}{U'(W)}$$

kifejezés alkalmazható a befektető abszolút kockázati tartózkodása mértékeként. Továbbmenve, $A'(W)$ az $A(W)$ gazdagság szerinti elsőrendű deriváltjaként az abszolút kockázati tartózkodás – gazdagság változás melletti viselkedésének – megfelelő mértékét adja. A 40. tábla az $A'(W)$ és a kockázati tartózkodás változása közötti fontosabb relációkat összegzi, valamint példát ad a bemutatott viselkedés-típusokat reprezentáló hasznossági függvényre.

A példák többsége arra mutat, hogy a gazdagság növekedésével a kockázatos összegekbe fektetett összeg kell hogy növekedjék, azaz a befektetők csökkenő abszolút kockázati tartózkodást mutatnak. Függetlenül attól, hogy az abszolút kockázati tartózkodás mely kondíciója írja le a legjobban a befektetők magatartását, ha ők képesek specifikálni az abszolút kockázati tartózkodással kapcsolatos érzületeiket, akkor az általuk tekintendő lehetséges opciók száma csökkenthető. Ezen túlmenően ez a feltevés korlátozza a befektetők preferenciáit leíró lehetséges hasznossági függvényeket.

[37] A kockázati tartózkodás mérése az ún. Arrow-Pratt elven alapul. Pratt, J.: Risk Aversion in the Large and the Small. Econometrica January-April 1964; Arrow, K.I.: Essays in the Theory of Risk Bearing. North Holland Press 1971.

40. tábla *Az abszolút kockázati tartózkodás változatai*

Kondíció	**Definíció**	**$A'(W)$ függvény tulajdonsága***	**Példa hasznossági függvényre**
Növekvő abszolút kockázati tartózkodás	A gazdagság növekedésével kisebb összeget fektetnek kockázatos eszközbe	$A'(W) > 0$	W^{-2w^2}
Konstans abszolút kockázati tartózkodás	A gazdagság növekedésével ugyanolyan összeget fektetnek kockázatos eszközbe	$A'(W) = 0$	$-e^{-rw}$
Csökkenő abszolút kockázati tartózkodás	A gazdagság növekedésével nagyobb összeget fektetnek kockázatos eszközbe	$A'(W) < 0$	$\ln W$

* Az $A'(W)$ az $A(W)$ gazdagság szerinti elsőrendű deriváltja

A befektető hasznossági függvényének korlátozására alkalmazott *negyedik* jellemző annak meghatározása, hogy a gazdagság változásával hogyan alakul annak *kockázatos eszközbe beruházott százalékos aránya.* Ha például a befektető 10 000 dolláros gazdagság mellett annak 50%-át fekteti kockázatos beruházásba, vajon gazdagságának akkor is ugyanilyen hányadát fekteti-e kockázatos eszközbe, amennyiben gazdagsága 20 000 dollárra növekszik? Ha ezt teszi a befektető, akkor magatartását *relatív* kockázati tartózkodásnak minősíthetjük. Amennyiben a befektető gazdagságának nagyobb hányadát invesztálja kockázatos eszközbe, akkor ő csökkenő *relatív kockázati tartózkodásúnak* mutatkozik. Ha viszont kisebb százalékos arányt fektet be, akkor *növekvő relatív kockázati tartózkodásúnak* tekinthető.

A relatív és abszolút kockázati tartózkodás szorosan kapcsolódik egymáshoz. A relatív kockázati tartózkodás utal a gazdagság-változás hatására bekövetkező kockázatos eszközökbe irányuló befektetési százalék változására. Ezzel szemben az abszolút kockázati tartózkodás jelzi a gazdagság-változás hatására a kockázatos beruházásba irányuló összegek változását. A relatív kockázati tartózkodás mértéke a következő:

$$R(W)=\frac{-WU''(W)}{U'(W)}=W\cdot A(W)$$

Ha $R'(W)$ a W első deriváltja, akkor $R'(W)<0$ azt mutatja, hogy a hasznossági függvény csökkenő relatív kockázati tartózkodást jelez. Ha $R'(W)=0$, akkor a hasznossági függvény konstans relatív kockázati tartózkodást mutat. Végül, ha $R'(W)>0$, akkor a függvény növekvő relatív kockázati tartózkodást igazol.

Ezeket összegzi a 41. tábla.

41. tábla *A relatív kockázati tartózkodás változatai*

Kondíció	Definíció	$R'(W)$ tulajdonsága	Hasznossági függvény példák
Növekvő relatív kockázati tartózkodás	A gazdagság növekedésével csökkenő kockázatos eszközbe irányuló befektetési arány	$R'(W) > 0$	$W - bW^2$
Konstans relatív kockázati tartózkodás	A gazdagság növekedésével változatlan kockázatos eszközbe irányuló befektetési arány	$R'(W) = 0$	$\ln W$
Csökkenő relatív kockázati tartózkodás	A gazdagság növekedésével növekvő kockázatos eszközbe irányuló befektetési arány	$R'(W) < 0$	$-e^{-2w^{-1/2}}$

4.4.5. A hasznosság matematikai analízise

A hasznosság gazdagsági függvénye egyaránt felírható az $U=f(W)$ vagy $U(W)$ szimbólummal. A marginális hasznosság megjelenítése valamivel összetettebb; az a gazdagság hasznossági függvényének szegmenseként tekinthető. Szavakkal kifejezve, *a gazdagság marginális hasznossága olyan pótlólagos hasznosságként definiálható, amit az egyén a gazdagság változása nyomán kap.* Matematikailag a marginális hasznosság a hasznossági függvény első deriváltja, azaz

$$dU/dW = U'(W).$$

A hasznossági függvény második deriváltjának előjele meghatározza azt, hogy a marginális hasznosság emelkedő, vagy csökkenő. A döntéshozók úgy kell cselekedjenek, hogy maximalizálják *várható hasznosságukat.* A döntésből származó várható hasznosság, mivel kockázatos cselekedetek végzésén alapul, súlyozott átlaga lesz a lehetséges kimenetekből származó utiliseknek, amit úgy számítunk ki, hogy súlyként a lehetséges kimenetek valószínűségét vesszük.

4.4.6. Marginális hasznosság

Csökkenő marginális hasznosság érvényesül akkor, ha a hasznossági függvény kevésbé meredek emelkedésű, nevezetesen ha a hasznossági függvény második deriváltja negatív, azaz

$$d^2U/dW^2<0$$

vagy ezzel ekvivalensen

$$U''(W)<0$$

Konstans marginális hasznosságról akkor van szó, ha a hasznossági függvény lineáris, s így emelkedése állandó ráta mellett történik. Konstans a marginális hasznosság akkor, ha a hasznossági függvény második deriváltja zéró, azaz

$$d^2U/dW^2=U''(W)=0.$$

Amikor a hasznossági függvény növekvő meredekséggel emelkedő, vagy ezzel ekvivalensen, a hasznossági függvény második deriváltja pozitív, azaz

$$d^2U/dW^2>0$$

akkor növekvő marginális hasznosság áll fenn.

Kockázati tartózkodás akkor érvényesül, ha a befektető gazdagságának vagy megtérülésének csökkenő a marginális hasznossága. A gazdagság és a megtérülés csökkenő marginális hasznossági függvénye egyaránt konkáv a vízszintes tengelyre. A 42. tábla összegzi ama magatartási implikációkat, amelyek a hasznossági függvény második deriváltjának előjeléből következnek.

42. tábla *A kockázatviselési attitűdök három kategóriája*

Második derivált	Magatartási implikációk	Döntés a játékról
1. $U''(W) < 0$	Kockázati tartózkodás	Méltányos játék elutasítása
2. $U''(W) = 0$	Kockázat-semleges	Közömbös a méltányos játék iránt
3. $U''(W) > 0$	Kockázat-kedvelő	Akkor is elfogadja a játékot, ha nem teljesen méltányos.

4.5. Hasznosság és kockázattal szembeni magatartás

Az alábbiakban felrajzolt hasznossági függvényekkel azt feltételezzük, hogy az egyén mindig preferálja a több pénzt a kevesebbel szemben, így a hasznossági függvény mindig emelkedik, ahogy a jövedelmek nőnek. Nyilatkoznunk kell arról is, hogy milyen az egyén reagálása a bizonytalanságra. Vegyünk egy kockázatos kimenetű befektetést!

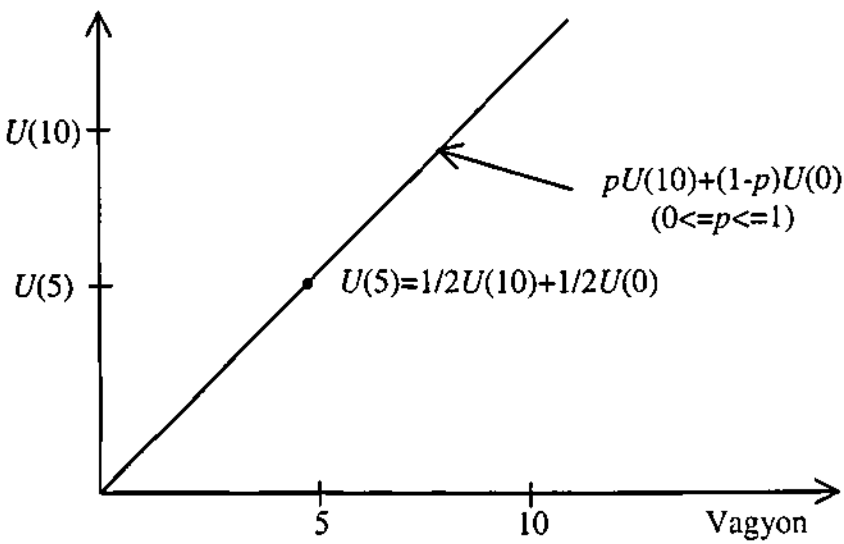
$$\tilde{X} = \begin{cases} 10 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{cases}$$

aminek várható értéke $E(X)=5$ dollár. Ha az egyén pontosan 5 dollárt fizet a befektetésért, akkor ez azt jelenti, hogy az 5 dollár biztonságos birtokosának haszna pontosan megegyezik a befektetés várható hasznával. Ennek megfelelően a közömbösséget az alábbi egyenlet írja le:

$$U(5) = \frac{1}{2}[U(10) + U(0)]$$

Az egyenlőség kifejezésének egy másik módja, ha azt állítjuk, hogy a befektetés bizonyossági egyenértékese pontosan egyenlő annak várható értékével. Ha ez az egyenlőség fennáll, akkor az egyént kockázatközömbösnek nevezzük, és hasznossági függvényét a 43. ábra mutatja.

43. ábra Egy kockázat-semleges döntéshozó hasznossági függvénye

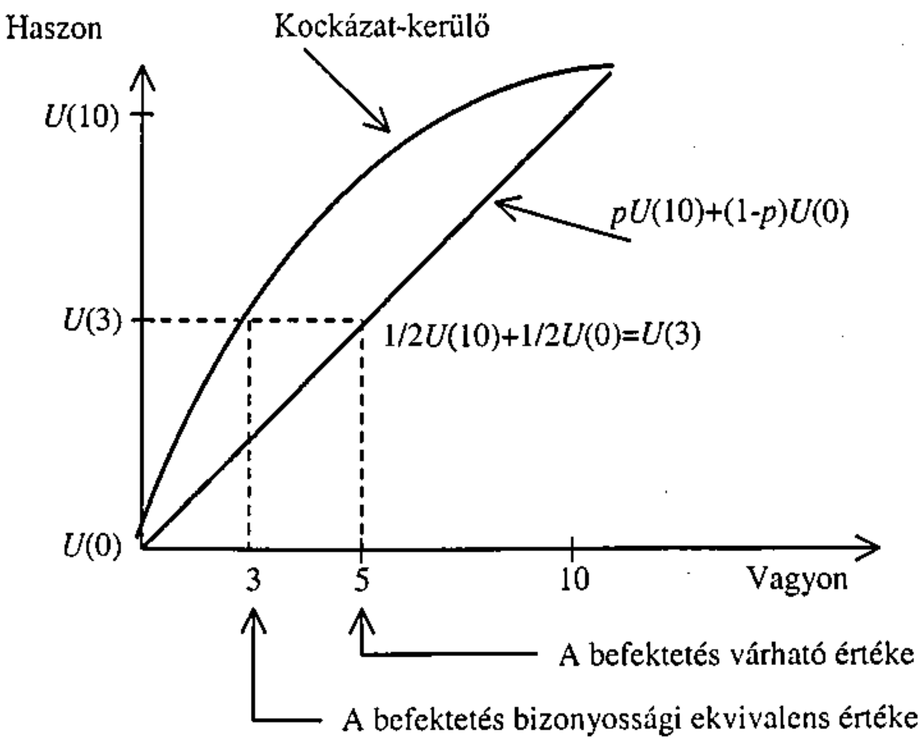


Most vegyünk egy másik egyént, aki csak 3 dollárt hajlandó fizetni ugyanazért az X befektetésért. Ez az állítás azt jelenti, hogy a második egyénnek a biztosan megkapott 3 dollár pontosan ugyanakkora megelégedettséget ad, mint a befektetésből származó elégedettség, ami így írható le:

$$U(3)=\frac{1}{2}[U(10)+U(0)]$$

Azt mondhatjuk, hogy az egyén számára a befektetés bizonyossági egyenértékese 3 dollár. Ha ez az ekvivalens kisebb, mint a befektetés várható értéke, akkor az egyén kockázat-kerülőnek tekinthető. Ilyen esetben a hasznossági függvény csökkenő meredekségű görbe, ahogy az alábbi ábra mutatja.

44. ábra Egy kockázat-kerülő döntéshozó hasznossági függvénye

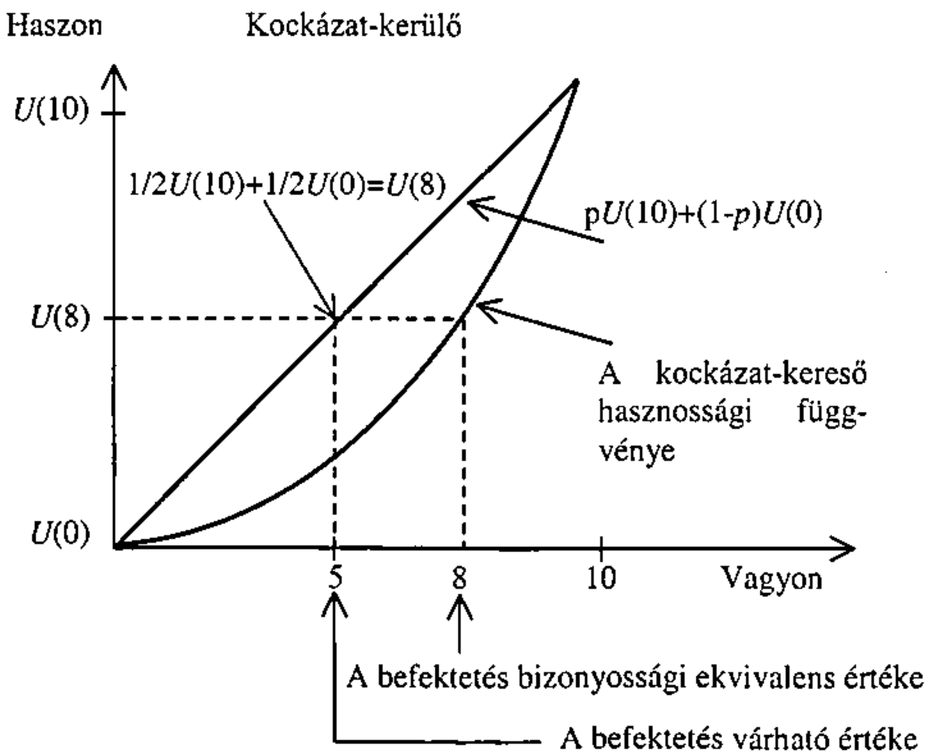


Most vegyünk egy harmadik egyént, aki 8 dollárt hajlandó fizetni X befektetésért, vagyis annak bizonyossági egyenértékese az egyén számára, meghaladja a befektetés várható értékét. Hasznossági függvénnyel kifejezve a következőt kapjuk:

$$U(8)=\frac{1}{2}[U(10)+U(0)]$$

Ebben az esetben az egyént kockázat-kerülőnek nevezzük, akinek hasznossági függvénye növekvő meredekségű, amint az alábbi ábra mutatja.

45. ábra Egy kockázat-kereső döntéshozó hasznossági függvénye



4.5.1. Kockázati prémium és a kockázatkerülés mértékei

A kockázat-kerülő magatartás jellemzésének intuitívebb módja, ha azt mondjuk, hogy az ilyen befektető fontosabbnak tartja a veszteséget ígérő kockázatot, mint az ezzel azonos esélyű sikert ígérő kockázatot. Ezért a kockázat-kerülőt kárpótolni kell ahhoz, hogy vállalja a kockázatot. Ahhoz, hogy lássuk miként mérlegel a kockázat-kerülő befektető sikert, illetve kudarcot valószínűsítő kockázatot, vegyük az alábbi eshetőséget:

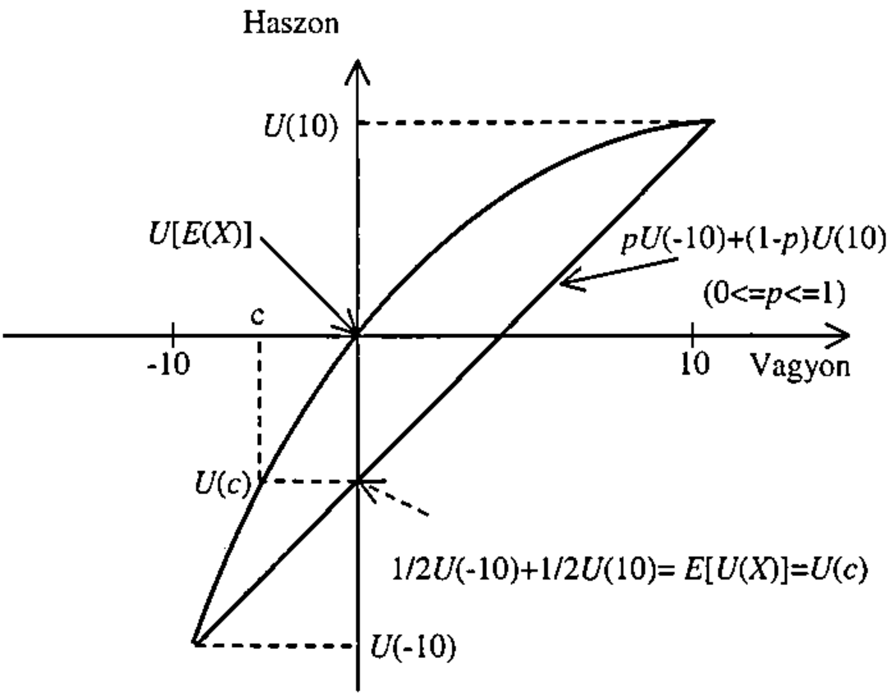
$$\tilde{X} = \begin{cases} +10 & 1/2 \\ -10 & 1/2 \end{cases}$$

Ennek a befektetésnek 0 a várható értéke és ezért a kockázat-kerülő egyén bizonyossági egyenértékese – ebben az esetben – negatív lesz. Tehát tudjuk, hogy

$$U(C) = E\left[U\left(\tilde{X}\right)\right] = 1/2\,U(10) + 1/2\,U(-10) < U(0)$$

ahol C a befektetés bizonyossági egyenértékese (ebben az esetben negatív szám). Ezt a helyzetet az alábbi ábra írja le, amely kapcsán megjegyezhető, hogy ha az egyén olyan boldogtalan lenne a kudarccal fenyegető kockázattól (0-tól a –10 felé mozogva), mint amilyen boldog lenne a sikert ígérő lehetőségtől (0-tól 10-ig mozogva), akkor a befektetés bizonyossági egyenértékese 0 lenne.

46. ábra Kockázat-kerülő egyén negatív bizonyossági egyenértékese



Egy kockázat-kerülő számára a lefelé irányuló kockázat mindig sokkal fontosabb, mint az azzal megegyező, felfelé mutató lehetőség.

Mivel azonban ez az érték valójában negatív, a kockázat-kerülők a kudarcot valószínűsítő kockázatot fontosabbnak tekintik. Ez a helyzet azt sugallja, hogy a kockázat-kerülő talán még arra is hajlandó, hogy lemondjon vagyona egy részéről annak érdekében, hogy elkerülje ezt a befektetést. Azt a maximális összeget, amelyről lemondanának, (Markowitz-féle) kockázati prémiumnak nevezik. Ez az utóbbi ábrán *E*(*X*) és *C* különbsége, nagysága pedig a hasznossági függvény lefutásától függ.[38]

[38] A kockázatkerülés pontos definícióját Arrow (1971) és Pratt (1964) munkája alapozta meg.

Ama kockázati prémium nagyságát kell meghatározni, amit a befektetéshez azért kell társítani, hogy az egyént közömbössé tegyük az akció várható értékével szemben.[39] A kockázati prémium nagysága a

$$\Delta = -\frac{1}{2}\sigma_x^2 \frac{U''(W)}{U'(W)}$$

formulával számítható, ahol a $-U''(W)/U'(W)$ függvényt az abszolút kockázatkerülés mutatójának nevezzük. Mivel a variancia mindig pozitív, a Δ kockázati prémium előjele a hányados előjelétől függ. Feltételezzük, hogy a hasznosság mindig nő a vagyon gyarapodásával, azaz $U'(W)>0$. A kockázat-kerülő befektető számára a vagyon hasznossága csökkenő mértékben nő a vagyonemelkedés eredményeként, így

$$U'(W) < 0 \text{ és ezért } U'(W)/U'(W) < 0.$$

Az ilyen egyén számára $\Delta > 0$, ahogy az várható volt.

Hasonló módon megmutathatjuk, hogy az egyén magatartása az arányos kockázattal összefüggésben kifejezhető a relatív kockázatkerülés mértékével.

$$\text{Relatív kockázatkerülés} = -W\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

Az egyén általános kockázathoz kapcsolódó magatartását az abszolút kockázatkerülés mértéke tükrözi, amint most látni fogjuk. Visszaidézzük, hogy az egyéni hasznosság eredete és mértéke meghatározható adott be-

[39] Differenciál-számítással és Taylor-sorba fejtéssel meghatározható a kockázati prémium nagysága

ruházási példa segítségével. Feltételezzük a befektetés lehetséges kimeneteit az alábbiak szerint:

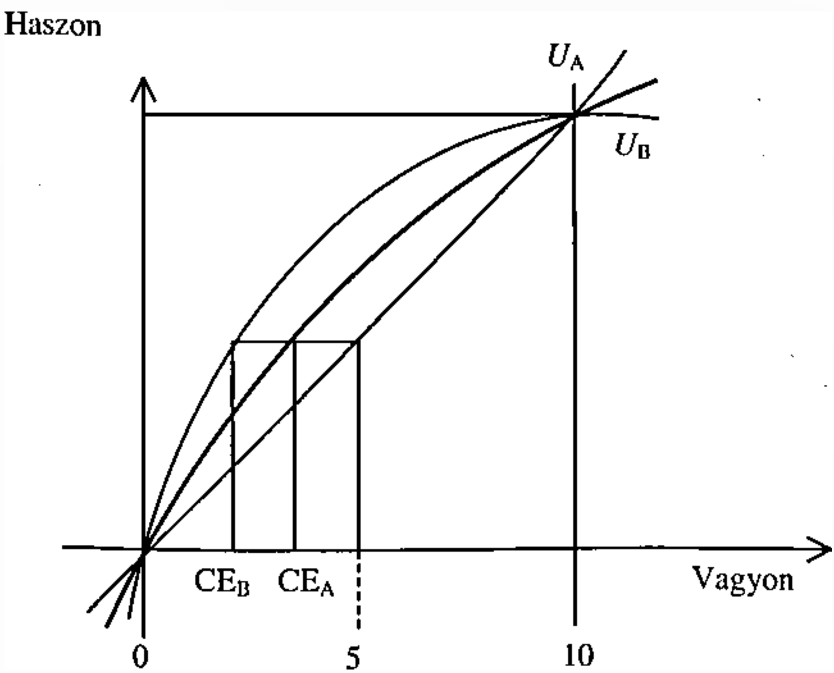
$$\tilde{X} = \begin{cases} +10 & 1/2 \\ -10 & 1/2 \end{cases}$$

továbbá, érvényesek az

$$U_A(0) = U_B(0) = 0 \text{ és } U_A(10) = U_B(10) = 1$$

relációk, ahol ***A*** és ***B*** két befektetőt jelöl. Ekkor elvégezhető a 47. ábrán látható összehasonlítás.

47. ábra Bizonyossági egyenértékesek összehasonlítása



A 47. ábrán *B* befektető CE_B bizonyossági egyenértékese X befektetésre kisebb, mint CE_A. Ezt a tényt úgy értelmezhetjük, hogy *B* nagyobb abszolút kockázat-kerülést mutat. Ezen kívül az is kimutatható, hogy a *B* befektető kockázat-kerülési mértéke – ebben az esetben – nagyobb, mint az *A* befektetőé (mert a *B* kockázati prémiuma nagyobb). Így, amikor a hasznossági értékeket arányosítják az összehasonlításhoz, az abszolút kockázat-kerülés mutatója a hasznossági görbület növekedésével emelkedik. A portfolió megtérülésre felírt másodfokú hasznossági függvényt széles körben alkalmazzák kockázat által uralt környezetben.

Írjunk fel egy jellegzetes másodfokú hasznossági függvényt!

$$U(W) = aW - bW^2$$

ahol

$$U'(W) = a - 2bW \text{ és } U''(W) \qquad (W \leq a/2b \text{ esetén})$$

Erre alapozva a megfelelő kockázatkerülési mutatók:

$$\text{Abszolút mutató} = \frac{2b}{a - 2bW}$$

$$\text{Relatív mutató} = \frac{2b}{(a/W) - 2b}$$

Mindkét mutató W növekvő függvénye, így megállapíthatjuk, hogy az ilyen döntéshozó vagyona növekedésével egyre inkább kerüli a kockázatot. Amint a fentiekben láttuk, a kockázati prémium és a kockázatkerülési mutatók definíciója hasznos eszközként szolgál az abszolút, illetve relatív kockázat-kerülés vizsgálatához, valamint a különböző lehetséges hasznossági függvények jellemzőinek elemzéséhez.

4.5.2. A várható hasznosság modellje

Az üzleti társaságok finanszírozási döntéseit a részvényesek helyett a tőkeműködtetők hozzák. A menedzserek olyan befektetési döntéseket hoznak, amelyek kimenete bizonytalan, így feltétlenül tudnunk kell, hogy az egyes részvényesek – ilyen körülmények között – milyen döntésre jutnak. Ennek érdekében olyan modellre van szükségünk, amely közvetlenül tükrözi a részvényesek kockázati attitűdjét: azaz, hogyan értékelik a kockázatot, s miként reagálnak jelenlétére. *A finanszírozási döntések elmélete normatív, amely előírja, hogy milyen döntést hozzanak a menedzserek; ezzel szemben a részvényesek kockázati attitűdjének modellje pozitív kell legyen, amely megkísérel reflektálni a részvényesek aktuális attitűdjére, ahelyett, hogy szükséges viszonyulásukat meghatározná.*

4.5.3. A befektetői magatartás axiómái

Az egyedi részvénytulajdonosok vagy befektetők a kockázatos finanszírozási döntések meghozatalakor racionálisan és konzisztensen cselekszenek. Az alábbiakban négy axiómát rögzítünk a döntéshozó befektetői magatartására vonatkozóan.

1. A befektetők képesek az alternatívák közüli választásra, sorolva azokat valamilyen jellemző alapján, azaz mindenképpen döntésre jutnak.

2. Az alternatívák bármely sodrása „tranzitív" jellegű, azaz, ha *A* változat jobb *B*-vel szemben, továbbá *B* kedvezőbb, mint *C*, akkor az *A* variánst a *C*-vel szemben is előnyben kell részesíteni.

3. A befektetők nem tesznek különbséget az azonos kockázatú alternatívák között; a döntés egyedül a benne foglalt kockázat alapján születik, s nem a létező alternatíva természetére tekintettel.

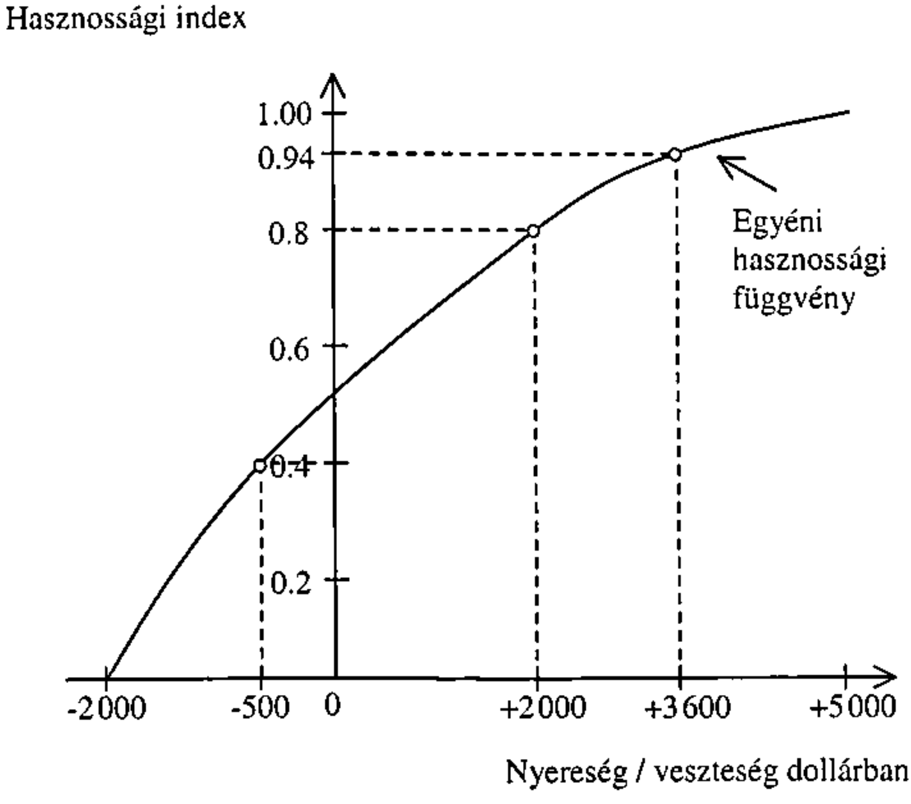
4. A befektetők képesek specifikálni bármely olyan beruházást, amelynek bizonytalan a megtérülése, illetve egy tökéletesen ekvivalens alternatívát, amely ugyanúgy preferálható; ennek megtérülése biztonságos, azaz bármely változatra vonatkozóan a befektetők képesek bizonyossági egyenértékest meghatározni.

A négy viselkedési axióma felhasználható hasznossági függvény konstruálására. Ez azután bázisként szolgál a befektetői kockázati attitűd modelljéhez; ez pedig eszközt ad a kockázatos alternatívák közüli választáshoz olyan feltevéssel, hogy az egyének saját várható hasznosságuk maximalizálására törekszenek.

4.6. A hasznossági függvény felépítése

Ha bizonyossági egyenértékesek elegendő számú hasznossági indexét összegyűjtjük, akkor ábrázolhatjuk az egyén hasznossági függvényét. Az alábbi példában bemutatott folyamat a végtelenig folytatható, mivel meghatározatlanul sok valószínűségi adat-pár létezik, ami kapcsolható a projekt két kimenetéhez.

48. ábra *Hasznossági függvény*



Példa:

Feltételezzük, hogy az egyén megvalósíthat egy projektet, s tudni szeretnénk, hogy legfeljebb mennyit hajlandó fizetni annak végrehajtásáért. A projekt eredményeként éppen két kimenet várható: az egyik 5000 dollár nyereség (+5000), a másik 2000 dollár veszteség (-2000). A hasznossági függvény felépítéséhez szükségünk van a hasznosság mértékére vagy indexére. E mérték megválasztása teljességgel önkényes, az alkalmazhatóság érdekében a +5000 kimenethez tartozó hasznossági index értéket jelöljük 1, a −2000 kimenethez tartozót pedig 0 szimbólummal.

43. tábla *Befektetési kimenet és hasznossági index*

Kimenet	**Hasznossági függvény indexe**
+5 000	1
-2 000	0

Alternatív jelöléssel a fentiek így írhatók fel:

$$U(+5000) = 1 \qquad U(-2000) = 0$$

Amennyiben a +5000 kimenet valószínűsége p, a −2000 kimeneté pedig (1-p), akkor a projekt várható hasznossága a következők szerint számítható:

$$p \cdot U(+5\,000) + (1-p)U(-2\,000)$$

Ha $U(+5000) = 1$ és $U(-2000) = 0$, akkor a projekt várható hasznossága így egyszerűsödik:

$$p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$$

A 4. axiómából tudjuk, hogy a befektető bármely kockázatos kimenetű projektre specifikálhat egyenértékű biztonságos alternatívát, amit *CE* (Certainty Equivalent) bizonyossági egyenértékesnek nevezünk. Ez azt a maximális összeget reprezentálja, amit a befektető hajlandó fizetni a kockázatos projekt végrehajtásáért. Ebben az esetben specifikálható a bizonyossági egyenértékes hasznossága:

$$U(CE) = p \cdot (+5\,000) + (1-p)U(-2\,000)$$

$$U(CE) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$$

Most már abban a helyzetben vagyunk, hogy hasznossági függvényt konstruálhatunk adott egyéni befektetőre. Mielőtt azonban ezt tennénk, fontos hangsúlyozni, hogy e hasznossági függvény kizárólag eme egyedi (elképzelt) befektetőre érvényes. A különböző befektetőknek valószínűleg eltérő hasznossági függvénye lesz, mivel azok az egyén kockázati attitűdjén alapulnak. E megközelítés alapján megkérdezzük az egyént, hogy mekkora számára az a maximális (bizonyosan ismert) ár, amit hajlandó fizetni a projekt végrehajtásáért, a két kimenethez kapcsolódó bekövetkezési valószínűségek figyelembevételével. Ha például azt mondjuk, hogy a projekt $+5\,000$ dolláros hozamának valószínűsége 0.80, a projekt -2000 dolláros veszteségének valószínűsége pedig (1–0.80)=0.20, akkor mondhatjuk, hogy maximálisan cca. 2000 dollárt volna hajlandó fizetni. Ez az összeg lenne a projekt hasznossági egyenértékese, amivel hasznossági indexe így számítható:

$$U(CE) = p \cdot (+5000) + (1-p)U(-2000)$$

$$U(+2\,000) = 0.80 \cdot 1 + 0.20 \cdot 0 = 0.80$$

Ha most azt feltételezzük, hogy a +5000 dolláros hozam bekövetkezésének valószínűsége 0.40, akkor a befektető ezt a projektet −500 dolláros bizonyossági egyenértékessel realizálhatja. Más szavakkal kifejezve a 0.40 és 0.60 valószínűség a projekt +5000 és −2000 dolláros kimenetéhez kapcsolódik, s a befektető 500 dollárt fizetne a projekt indításáért. E bizonyossági egyenértékes hasznossági indexe a következő:

$$U(-500) = 0.40 \cdot 1 + 0.60 \cdot 0 = 0.40$$

Ez az eljárás a végtelenig folytatható a valószínűségek lehetséges értékeire támaszkodva.

4.6.1. A hasznossági függvény alakja

Érdekel bennünket a hasznossági függvény általános alakja. Térjünk vissza a példában említett projekt-kimenethez kapcsolódó valószínűségi érték-párhoz, ahol 80%-os volt a +5 000 és 20%-os a –2 000 dolláros bekövetkezés esélye.

44. tábla *Befektetési kimenetek és valószínűségük*

Projekt kimenet	Valószínűség		Súlyozott kimenet
+5000	0.80	=	+4000
-2000	0.20	=	- 400
	Várható kimenet	=	+3600

A projekt várható kimenete +3600 dolláros, amely mellett a befektető csak +2000 dolláros bizonyossági egyenértékest számít. Ennek alapján a projekt várható hasznossága az egyén számára kisebb, mint a projekt várható kimenetének vagy értékének hasznossága. Ez a következő jelöléssel írható fel:

$$E\left[U(X)\right] < U\left[E(X)\right]$$

E különös esetben a projekt várható hasznossága azonos az egyén által tekintett +2000 dolláros bizonyossági egyenértékes hasznosságával, a projekt várható értékének hasznossága pedig +3600 dollár hasznosságával azonos. Felhasználva a korábban bemutatott (képzeletbeli) hasznossági függvényt, az alábbi hasznossági indexeket írhatjuk fel a vonatkozó összegekre:

$$\left.\begin{aligned} E\left[U(+2\,000)\right] &= 0.80 \\ U\left[E(+3\,600)\right] &= 0.94 \end{aligned}\right\} \quad 0.80 < 0.94$$

A másik valószínűségi érték-pár, ahol a befektető −500 dollár bizonyossági egyenértékessel számol, a következő jellemzőkkel bír:

45. tábla *Befektetési kimenetek és valószínűségük*

Projekt kimenet	**Valószínűség**		**Súlyozott kimenet**
+5 000	0.40	=	+ 2000
-2 000	0.60	=	- 1200
	Várható kimenet	=	+ 800

Újból azt látjuk, hogy a projekt 800 dolláros várható kimenete nagyobb a –500 dolláros választott bizonyossági egyenértékesnél.

Azt találjuk, hogy ez az összefüggés érvényes a befektetőnek kínált összes valószínűségi kombinációra; a befektető kijelölhetne olyan bizonyossági egyenértékest is, amely a projekt várható értéke alatt van. Ez annak köszönhető, hogy a származtatott hasznossági függvény az origóra konkáv. Ha az egyén mindig olyan bizonyossági egyenértékest jelöl meg, amely azonos a projekt várható értékével, akkor a hasznossági függvény grafikonja egyenes vonal lenne; ha viszont a projekt várható értékénél konzisztensen nagyobb bizonyossági egyenértékest választ, akkor a hasznossági függvény az origóra konvex lenne.

Példabeli befektetőnk konzisztensen olyan bizonyossági egyenértékest választ, amely kisebb a projekt megfelelő várható értékénél, mivel ő kockázat-kerülő. Más szavakkal, a befektető nem kedveli a kockázatot, s ezt azzal is mutatja, hogy csak annyit hajlandó fizetni a projekt megvalósításáért (bizonyossági egyenértékes), amely kisebb a projekt várható értékénél. A két érték közötti különbséget a befektető a projektben foglalt kockázat vállalásának kompenzációjaként tekinti. Amikor tehát a befektető jelzi, hogy maximum 2000 dollárt hajlandó fizetni a +3600 dolláros várható értékű projektért, akkor az 1600 dolláros különbség a benne foglalt kockázat várható kompenzációja miatt szükséges.

Hasonlóképpen, ha az egyén a projekt várható értékével azonos bizonyossági egyenértékest választ, akkor kockázat-semlegesnek nevezik, s ez esetben nem igényelnek kompenzációt a kockázatos projekt megvalósításáért. Ha pedig a megjelölt bizonyossági egyenértékesek nagyobbak a projekt várható értékénél, akkor a befektető kockázat-kedvelő, mivel ő hajlandó prémiumot fizetni, hogy kockázatot vállalhasson. Az előzőekből következően, minél nagyobb a tartózkodás a kockázattól, annál nagyobb a hasznossági függvény konkávitása, másik oldalról: minél fokozottabb a vonzódás a kockázathoz, annál nagyobb a függvény konvexitása.

4.6.2. Kockázatos beruházások közüli választás

Ha az egyén hasznossági függvényét ily módon építjük fel, akkor ennek segítségével megmutathatjuk: hogyan választhatna a kockázatos projekt alternatívák közül, feltételezve a lehető legnagyobb mértékű hasznosság elérését. Eszerint az egyén azt az alternatívát választja, amely a legnagyobb hasznossági indexet eredményezi. Ezt mutatja be a következő példa.

A beruházási döntéshozatal várható hasznossági modelljének gyakorlati alkalmazhatósága – a kimunkálás nehézségei miatt – csekély. Az egyéni hasznossági függvény pontos alakjának származtatása nehéz és időigényes folyamat. Az egyén kockázati attitűdje, az egyéni megítélés és a környezet módosulásával állandóan változhat, s így szükséges a függvény folyamatos újrabecslése. A modell a finanszírozási döntéshozatal normatív elméleteként tekintve más problémát is felvet. Feltételezve, hogy a vállalatnak több részvényese van, a tőkeműködtetőknek ismerni kell az összes egyén hasznossági függvényét. Feltéve hogy ez lehetséges, az egyének hasznossági függvénye várhatóan különbözni fog, s aggregálásuk sem látszik könnyűnek. Mindazonáltal a várható hasznosság modellje kiindulást jelent a kockázatkezelés problémájának analitikusabb megközelítéséhez. A legnagyobb jelentősége ama ténynek van, hogy a kockázatkerülő befektetők vélhetőleg az origóra konkáv hasznossági függvénnyel rendelkeznek. Ez az ábrán látottaknak megfelelően az $U(X)=a+bx-cx^2$ kvadratikus egyenlettel írható le.

4.6.2.1. Példa a változatok közüli választásra

Feltételezzük, hogy az egyén, akinek hasznossági függvényét a korábbi ábra mutatja, az *A* és *B* beruházási alternatíva közül készül választani. Azt is feltételeznünk kell, hogy a beruházások által generált megtérülés azonnal a kiadás teljesítése után keletkezik, így azt nem szükséges diszkontálni. A változatokból származó lehetséges megtérülés értékei, s a hozzá tartozó valószínűségek a 46. táblán láthatók, együtt a beruházásokból származtatható hasznosság kalkulációjával.

46. tábla *Nettó megtérülési értékek és valószínűségük*

A				B			
Nettó megtérülés (dollár)	·	**Valószínűség**		**Nettó megtérülés (dollár)**	·	**Valószínűség**	
-1000	·	0.30	= 300	+500	·	0.20	= +100
+2000	·	0.40	= 800	+1500	·	0.60	= +900
+5000	·	0.30	= 1500	+2500	·	0.20	= +500
Várható megtérülés			= +2700	Várható megtérülés			= +1500

$$E\left[U(A)\right]=0.30\cdot U\left(-1\ 000\right)+0.40\cdot U\left(+2\ 000\right)+0.30\cdot U\left(+5\ 000\right)$$
$$E\left[U(B)\right]=0.2\cdot U\left(+500\right)+0.60\cdot U\left(+1\ 500\right)+0.20\cdot U\left(+2\ 500\right)$$

Felhasználva az eredeti ábra hasznossági függvényét a hasznossági index értékének meghatározásához

$$E\left[U(A)\right]=\left(0.3\cdot 0.28\right)+\left(0.4\cdot 0.8\right)+\left(0.3\cdot 1\right)=0.704$$
$$E\left[U(B)\right]=\left(0.2\cdot 0.59\right)+\left(0.6\cdot 0.74\right)+\left(0.2\cdot 0.85\right)=0.732$$

Mivel $E[U(B)] > E[U(A)]$ reláció áll fenn, az egyén, saját hasznosságának maximalizálása érdekében a ***B*** projektet választja. Az elmondottakból látható, hogy bár az ***A*** beruházás várható megtérülése a nagyobb, az egyén mégis a ***B*** változatot választja, mert annak magasabb a várható hasznossága: a ***B*** hasznossági indexe 0.732 az A 0.704 értékével szemben. Másként kifejezve: a befektető a *B* változatot preferálja, mivel kockázatkerülőként úgy ítéli meg, hogy ennek jobb a kockázat-várható megtérülés kombinációja, mint az *A* változaté.

4.6.3. A vagyon hasznossága

A vagyon hasznossági függvénye olyan grafikon, amely megmutatja, hogy az egyén a vagyon különböző szintjein mekkora hasznossághoz, megelégedettséghez jut (hány utilishez). A vagyon hasznossági függvénye

$$u = U(\mathrm{W}),$$

ami azt jelenti, hogy az u utilisek (hasznosság egységek) nem specifikált függvényei a W vagyonnak. Intuitíve a vagyon hasznossági függvénye azt jelenti, hogy a pénz megelégedettséget okozó dolgokra költhető. A hasznossági elmélet alkalmas a kockázatot magában foglaló döntési folyamat vizsgálatára. Az ilyen döntés elemzése a várható hasznosság elvén alapul. Ez kimondja, hogy a befektetők várható hasznosságukat maximalizáló döntést kell hozzanak. A várható hasznosság maximalizálása nem azonos a lehetséges kimenetek várható értékének maximalizálásával. A különbség megértéséhez vegyük a várható hasznosság definícióját: a kockázat esetén hozott döntés a lehetséges kimenetek hasznosság-egységeinek súlyozott átlagán alapul, amit úgy számítunk, hogy vesszük mindegyik kimenet hasznosságát a hozzá tartozó valószínűséggel.

Vegyünk egy példát a várható hasznosság vizsgálatára! Egy kockázatos befektetésnek két lehetséges kimenete van: vagy 1 dollár nyerhető ennek révén, vagy ugyanennyi veszíthető. A két eshetőség bekövetkezése azonos valószínűségű. Az 1 dollár nyerésének hasznossága $U(+1)$, az elvesztéséből származó káré $U(-1)$. Ezek alapján a befektetés várható hasznossága szimbólumokkal:

$$\begin{aligned} E\left[U(B)\right] &= p \cdot U(+1) + (1-p) \cdot U(-1) \\ &= (0.5) \cdot U(+1) + (0.5) \cdot U(-1) \end{aligned}$$

A várható hasznossággal szemben a befektetés várható kimenetének hasznossága így számítható:

$$U\left[E(B)\right] = U\left\{\left[p \cdot 1\right] + \left[(1-p) \cdot (-1)\right]\right\}$$
$$U\left[E(X)\right] = U\left[(0.5)(+1) + (0.5)(-1)\right] = U[0]$$

A vagyon *marginális hasznossága* olyan pótlólagos hasznosságként definiálható, amit az egyén a vagyon kis mértékü változásából nyerhet. Annak eldöntésére, hogy a marginális hasznosság növekvő vagy csökkenő, meg kell vizsgálni a hasznossági függvény meredekségét.

Csökkenő marginális hasznosságról akkor van szó, ha a hasznossági függvény egyre kisebb mértékben emelkedik, azaz a görbe a vagyon egyre magasabb szintjén progresszíven lehajlik (besimul).

Növekvő marginális hasznosság akkor érvényesül, ha a hasznossági függvény növekvő meredekséggel emelkedik, azaz a görbe a vagyon egyre magasabb szintjén, egyre meredekebben felfelé hajlik.

Kockázat-kerülő magatartás akkor keletkezik, ha a befektető vagyona, vagy megtérülése csökkenő marginális hasznosságú. A vagyon vagy megtérülés csökkenő marginális hasznossága azért vezet kockázat-kerülő magatartáshoz, mivel a vagyon vagy megtérülés hasznossági függvényének bármely pontján, a kockázatos beruházás alacsonyabb várható hasznosságú, mint a biztonságos beruházás ugyanolyan várható kimenettel. Eszerint, ha egy beruházás 50-50%-os eséllyel ígéri az induló X dollár összegű vagyon növekedését vagy csökkenését, akkor a hátrányos kimenetből származó hasznosság-csökkenés nagyobb, mint a kedvező kimenetből származó hasznosságbeli nyereség, amennyiben a hasznosság mérséklődik. Szimbólumokkal kifejezve:

$$\left[0.5\,U\left(W_0 - X\right)\right] + \left[0.5\,U\left(W_0 + X\right)\right] < U\left(W_0\right)$$

Így a vagyon csökkenő hasznossága mellett az egyén inkább preferálná a W_0 tartását, ahelyett, hogy kockázatos beruházásba kezdene (W_0+X), vagy (W_0-X) azonos valószínűséggel történő elérése reményében. Mivel a biztonságos induló vagyon $U(W_0)$ hasznossága nagyobb, mint egy ugyanekkora összegű bizonytalan vagyon $E[U(W_0)]$ várható hasznossága. A kockázat-kerülő azért nem preferálja a kockázatviselést, mert $U(W_0) > E[U(W_0)]$. Az ilyen befektető egyszerűen a W_0 összegű vagyon megtartását részesíti előnyben, minthogy kockázatot vállalna e vagyon növelése érdekében. Amennyiben a kockázatos beruházásból származó előny elég nagy, akkor a kockázat-kerülő beruházó azt megfelelő kompenzációnak tarthatja a kockázat viseléséért. Így a kockázatos beruházást csak akkor fogadja el, ha az számára vonzóvá válik. Az emberek a vagyont általában csökkenő hasznosságúnak tartják, s ez kockázat-kerülővé teszi őket.

4.7. A vagyon-hasznossági és a megtérülési függvény ekvivalenciája

A hasznossági preferencia rendezés invariáns a hasznossági függvény pozitív lineáris transzformációja esetén. Grafikusan kifejezve ez azt jelenti, hogy a hasznossági görbék növelhetők vagy csökkenthetők (konstans hozzáadásával vagy levonásával), s anélkül ábrázolhatók, hogy alakjukat megváltoztatnák (azaz pozitív konstanssal szorozhatók) anélkül, hogy változna a hasznossági függvény ama képessége, hogy a beruházási lehetőségek sorozatát előnyösségük alapján rendezi. Az említett transzformációk bármelyike megváltoztathatná az adott kimenetnek tulajdonítható hasznosság egységek számát, ugyanakkor a döntéshozó preferencia rendezése invariáns lenne pozitív lineáris transzformáció esetén. Minthogy az egyperiódusú megtérülési ráta pozitív lineáris transzformációja a befektető vagyonának, ebből adódóan adott befektető megtérülés-hasznossági függvénye egyszerű lineáris transzformációja a befektető vagyon-hasznossági függvényének, s mindkettő ugyanolyan preferencia rendezést ad a beruházási lehetőségek meghatározott csoportjáról. Így a befektető – korábban bemutatott – hasznossági görbéi egymás lineáris transzformációi, s azonos preferenciákat adnak a vagyon egyperiódusú változására, vagy a vele egyenértékű egyperiódusú megtérülési rátára. A vagyon és az egyperiódusú megtérülési ráta közötti pozitív lineáris transzformáció így is kifejezhető:

$$R_t = \frac{W_t - W_{t-1}}{W_{t-1}}$$

ahol

- W_{t-1} = periódus eleji vagyon (pozitív konstans)
- W_t = periódusvégi vagyon
- R_t = egyperiódusú megtérülési ráta

E kifejezésben W_t és R_t véletlen változók, amelyek egymás lineáris transzformációi. A pozitív lineáris transzformáció melletti preferencia rendezés invariáns jellegének fontos következményei vannak a hasznossági analízisre nézve. Ez az invariancia azt jelenti, hogy ha a befektető kockázatkerülőnek (vagy kockázat kedvelőnek) mutatkozik vagyonával összefüggésben, akkor ugyanúgy kockázat-kerülő (kockázat-kedvelő) lesz, amikor a beruházások közül az egyperiódusú megtérülési ráták alapján választ.

4.7.1. Várható hasznosság és beruházási döntéshozatal[40]

A várható hasznosságot a várható megtérülés és a kockázati mérték együttesen határozza meg. Ez szimbólumokkal így fejezhető ki:

$$E(U) = f\left[E(R), \sigma\right]$$

ahol

[40] A várható hasznosság beruházási döntéshozatalbeli szerepét Francis, J.C.: Investments c. műve alapján mutatjuk be. (Francis, J.C.: Investments Analysis and Management. McGraw Hill Inc. 1991)

$E(U)$ = várható hasznosság

$E(R)$ = várható megtérülés

σ = megtérülési variabilitás

A várható megtérülés növekedése emelni fogja a befektető várható hasznosságát, ha ugyanakkor a kockázat nem növekszik. Másik oldalról, a kockázat csökkenése növelni fogja a várható hasznosságot, ha egyúttal a várható megtérülés nem mérséklődik. Mielőtt a kockázatos beruházási alternatívák hasznossági analízisét elvégzik, elő kell állítani a kimenetek valószínűségi eloszlását, valamint a hasznossági függvényt, mindegyik kimenet várható hasznosságának meghatározásához. Ugyancsak szükség van a hasznossági függvény által jelölt hasznosság egységekre, a beruházás által generálható összes lehetséges megtérülési rátához rendelten.

4.7.2. Számszerű példa a beruházások közüli választásra

Tekintsünk három (*A*, *B*, *C*) sorolásra váró beruházást, amelyek megtérülési valószínűség eloszlását az 47. tábla mutatja. Az azt követő 49., 50., és 51. ábrák kockázat-kerülő, kockázat-közömbös és kockázat kedvelő befektető hasznossági függvényét mutatják. Mivel az *A*, *B* és *C* beruházás mindegyike 3%-os megtérülést ígér, így egyértelmű az, hogy a befektetők a beruházásokat eltérően minősítik, egyszerűen azok kockázati különbségei alapján.

47. tábla Három beruházás megtérülésének valószínűségi eloszlása

	Beruházási kimenetek és valószínűségük							Jellemzők	
Beruházás	**Kimenet**	**-3%**	**0%**	**3%**	**6%**	**9%**	$\sum p_i = 1$	$E(R)$	σ
A	↑	0.5				0.5	= 1	$E(R_A)$=3%	σ_A=6%
B	Való-színűség		0.5		0.5		= 1	$E(R_B)$=3%	σ_B=3%
C	↓			1			= 1	$E(R_C)$=3%	σ_C=0%

4.7.2.1. Kockázat-kerülő befektető számítása

A kockázat-kerülő *A*, *B* és *C* beruházásból származó várható hasznosságát az alábbi egyenletekkel határozhatjuk meg, feltételezve, hogy $U = 100R - 50R^2$ hasznossági függvénnyel jellemezhető.

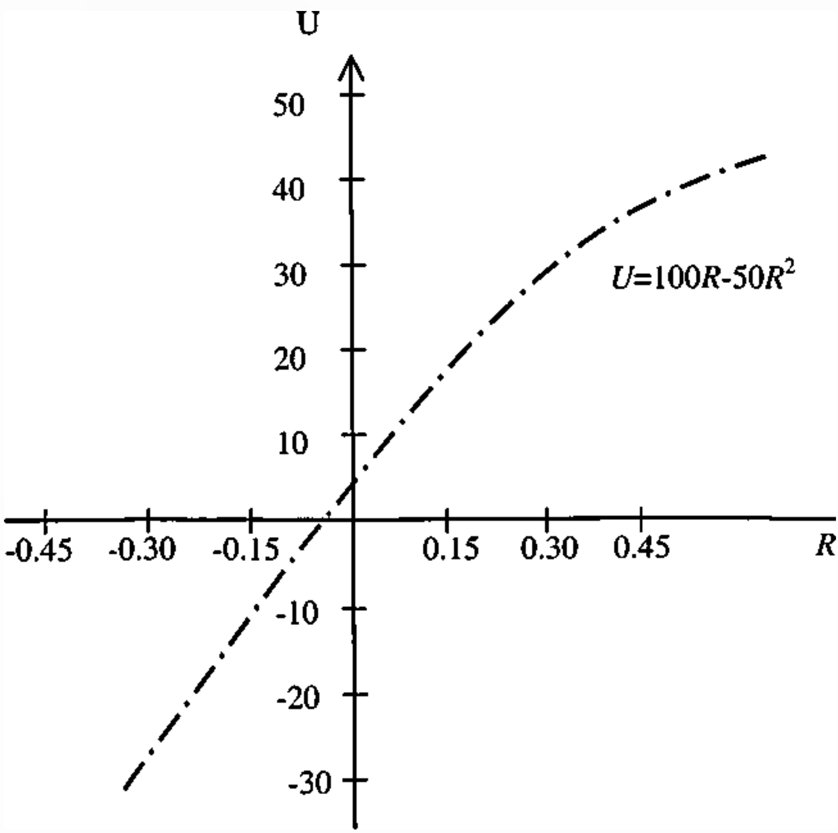
$$\begin{aligned} E[U(A)] &= \sum_{i=1}^{2} p_i [U(R_i)] \\ &= 1/2[U(-0.03)] + 1/2[U(0.09)] \\ &= 1/2(-3.045) + 1/2(8.595) \\ &= 2.785 \text{ utilis} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[U(B)] &= 1/2[U(0)] + 1/2[U(0.06)] \\ &= 0 + 1/2(5.82) \\ &= 2.91 \text{ utilis} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E[U(C)] &= 1[U(0.003)] \\
&= 1(2.955) \\
&= 2.955 \text{ utilis}
\end{aligned}
$$

A fenti számítás azt mutatja, hogy a kockázat-kerülő a legnagyobb megelégedettséget a ***C*** beruházásból nyeri, mivel annak a legkisebb a megtérülési variabilitása. A grafikus ábra az alábbi lefutást mutatja

49. ábra Kockázat-kerülő konkáv négyzetes megtérülés-hasznossági függvénye



4.7.2.2. Kockázat-közömbös befektető számítása

A kockázat-közömbös befektető várható hasznosság egységei ugyanarra a három beruházásra, az alábbi egyenletekkel számíthatók, $U = 100R$ alakú hasznossági függvényt feltételezve.

$$\begin{aligned} E[U(A)] &= 1/2[U(-0.03)] + 1/2[U(0.09)] \\ &= 1/2(-3) + 1/2(9) \\ &= 3 \text{ utilis} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[U(B)] &= 1/2[U(0)] + 1/2[U(0.06)] \\ &= 0 + 1/2(6) \\ &= 3 \text{ utilis} \end{aligned}$$

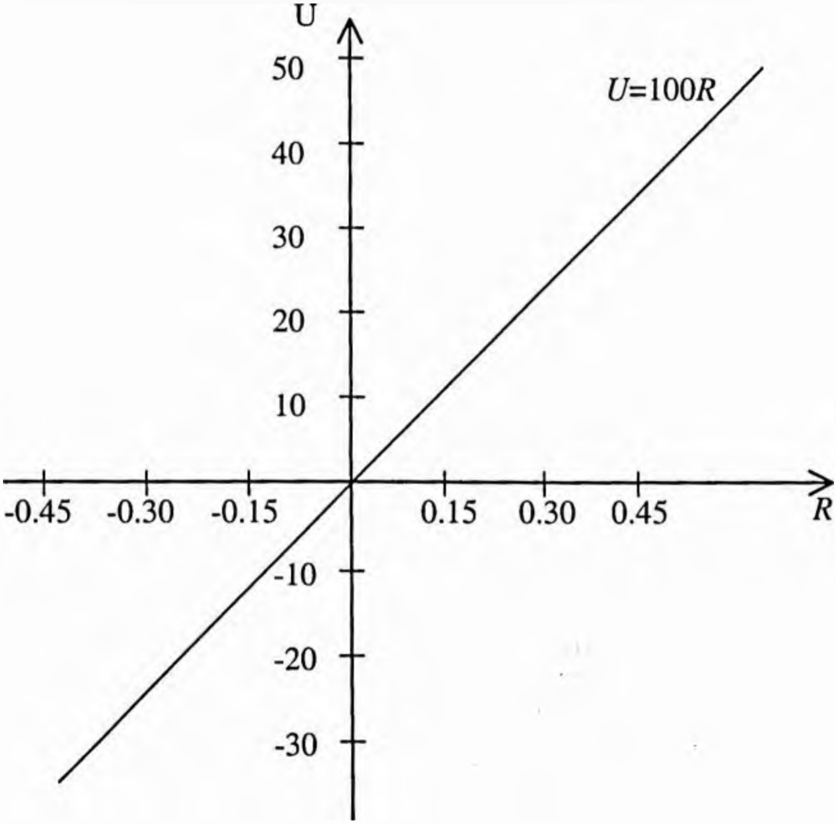
$$\begin{aligned} E[U(C)] &= 1[U(0.003)] \\ &= 1(3) \\ &= 3 \text{ utilis} \end{aligned}$$

Mivel a három (*A*, *B* és *C*) beruházás csak a kockázatban különbözik egymástól, így a kockázat-közömbös befektető mindegyiknek ugyanolyan hasznosságot tulajdonít. Szimbólumokkal kifejezve:

$$E[U(A)] = E[U(B)] = [U(C)]$$

reláció érvényesül a kockázat-közömbös befektető szempontjából. Az eset grafikus ábrája így illusztrálható:

50. ábra Kockázat-közömbös lineáris megtérülés-hasznossági függvénye



4.7.2.3. Kockázat-kedvelő befektető számítása

A kockázat kedvelő befektető hasznossági számítása az alábbi egyenletekkel mutatható be, $U = 100R + 50R^2$ hasznossági függvényt feltételezve.

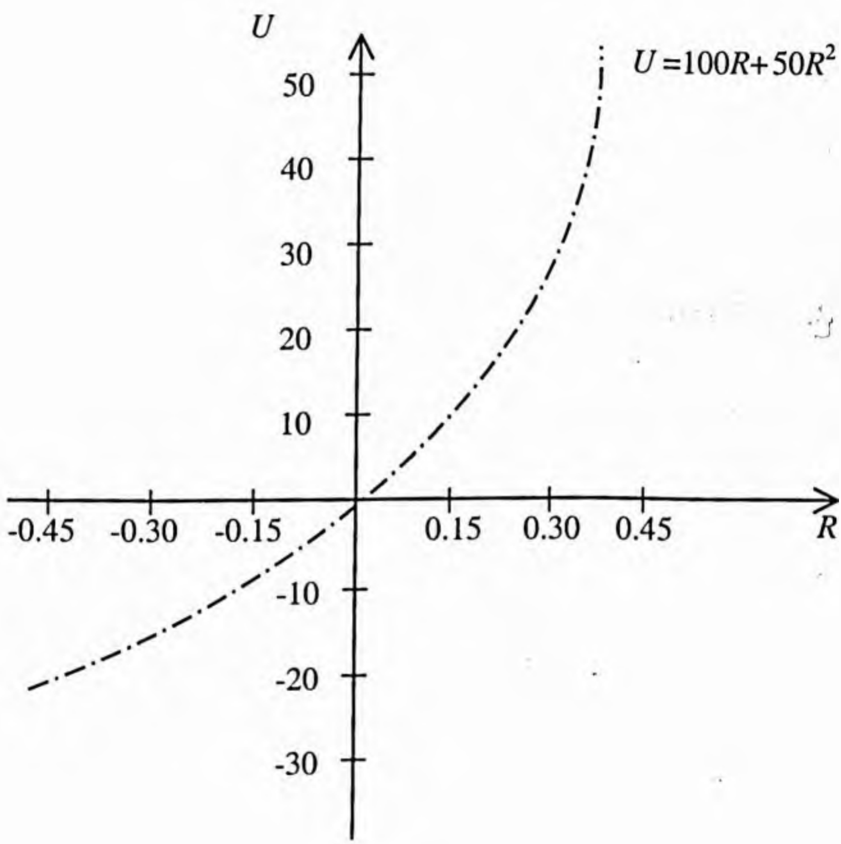
$$
\begin{aligned}
E[U(A)] &= 1/2[U(-0.03)] + 1/2[U(0.09)] \\
&= 1/2(-2.055) + 1/2(9.405) \\
&= 3.225 \text{ utilis}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[U(B)] &= 1/2[U(0)] + 1/2[U(0.06)] \\
&= 0 + 1/2(6.18) \\
&= 3.09 \text{ utilis}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[U(C)] &= 1[U(0.003)] \\
&= 1(3.045) \\
&= 3.045 \text{ utilis}
\end{aligned}
$$

A kockázat-kedvelő a legnagyobb megtérülési variabilitást mutató **A** beruházást preferálja. Grafikus ábrája az alábbiakban látható.

51. ábra Kockázat-kedvelő konvex négyzetes megtérülés-hasznossági függvénye



A befektetők várható hasznosságát az alábbi tábla összegzi:

48. tábla *Kockázatos beruházások eltérő befektetési preferenciái*

Befektető	A $E(R_A)$=3% σ_A=6%	B $E(R_B)$=3% σ_B=3%	C $E(R_C)$=3% σ_C=0%
Kockázat-kerülő	$E[U(A)] = 2.785$	$E[U(B)] = 2.90$	$E[U(C)] = 2.955$
Kockázat-közömbös	$E[U(A)] = 3$	$E[U(B)] = 3$	$E[U(C)] = 3$
Kockázat-kedvelő	$E[U(A)] = 3.225$	$E[U(B)] =3.09$	$E[U(C)] = 3.045$

Az A, B és C beruházás $E(R)$ = 3%-os várható megtérülése azonos, s csupán megtérülési variabilitásuk különböző. Az A és B beruházáshoz tartozó, alacsonyabb várható hasznosság – a kockázat-kerülő befektető szempontjából – a nagyobb variabilitástól való tartózkodásnak köszönhető. A kockázat kedvelő befektető A és B változathoz fűződő, magasabb várható hasznossága e döntéshozó kockázat-preferálását mutatja. *Jól látható, hogy a megtérülés várható értéke és varianciája egyaránt tükröződik a várható hasznosságban.* Mindegyik esetben a várható hasznosság mind az $E(R)$, mind σ hatását méri. Szimbólumokkal ezt az $E(U) = f[E(R),\sigma]$ formulával fejeztük ki. A számpélda megmutatta, hogy a racionális, kockázatkerülő, vagyongyarapító befektető beruházási változatok közüli választáskor minimalizálja a kockázatot a várható megtérülés bármely szintjén, annak érdekében, hogy bizonytalanság esetén maximalizálhassa a várható hasznosságot.

4.8. Várható hasznosság és várható nettó jelenérték

A bizonytalan kimenetekkel jellemezhető beruházási döntések realizálása általában komplikált. Az eljárás illusztrálásához önkényesen választunk esetet az alapvető fázisok világossá tételével. Feltételezzük, hogy a pénz időértéke 0.05, s hogy rendelkezünk az egyén hasznossági függvényével. A hasznosság alábbi mértékeit alkalmazzuk a következő pénzösszegekhez:

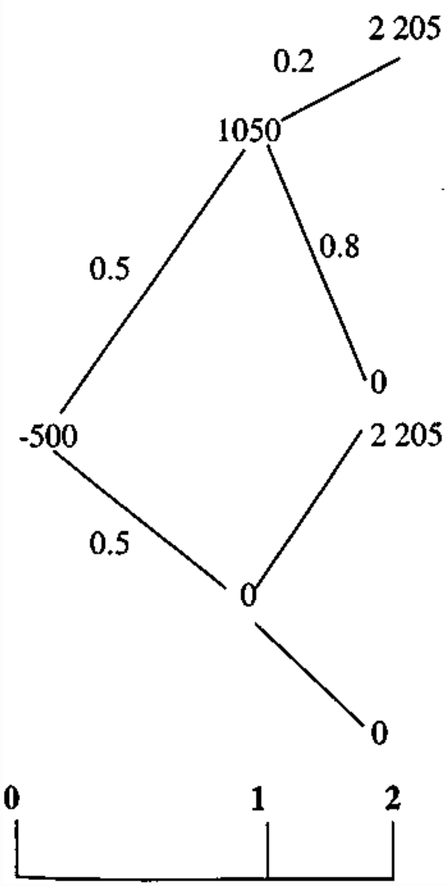
49. tábla *Befektetési kimenetek és jelenértékük*

adatok dollárban

Pénzösszegek, kimenetek	**Jelenérték**
- 500	- 1200
- 100	- 60
0	0
500	500
1500	1000
2500	1200

A beruházás kétperiódusú befektetés, 500 dolláros kezdeti kiadással. Az 1. periódus végén 0.5 a valószínűsége a 0 dolláros kimenetnek, s ugyancsak 0.5 az esélye az 1050 dolláros bekövetkezésnek. A 2. periódus végén 0.8 a valószínűsége a 0 dolláros, és 0.2 az esélye a 2205 dolláros eredménynek. Az alábbi diagram a lehetséges kimeneteket mutatja.

52. ábra *Döntési fa befektetési kimenetek ábrázolásához*



Lefutás jelenértéke	Lefutás valószínűsége
2 500	0.10
500	0.40
1 500	0.10
-500	0.40
	1.00

Az alábbi számítás szerint a várható jelenérték 400 dollár.

50. tábla *Beruházási kimenetek és hasznosságuk*

Pénzösszeg kimenet		**Kimenet hasznossága**		**Várható hasznosság**
2 500	·	0.10	=	250
500	·	0.40	=	200
1 500	·	0.10	=	150
- 500	·	0.40	=	- 200
		ENPV	=	400

A hasznossági mértékek felhasználásával kiszámítjuk a várható hasznosságot.

51. tábla *Beruházási kimenetek és hasznosságuk*

Pénzösszeg kimenet	**Kimenet hasznossága**	**Valószínűség**	**Várható hasznosság**
2500	1 200	0.1	120
500	500	0.4	200
1 500	1000	0.1	100
– 500	–1 200	0.4	– 480
	Várható hasznosság		– 60

A várható hasznosság kisebb, mint a 0 összeg hasznossága, s inkább a „semmit sem tenni" zéró hasznossággal – változatot érdemes választani a „beruházni" változattal szemben. Az 500 dolláros veszteség negatív hasznossága ellensúlyozza a többi esemény várható konzekvenciáit. A hasznossági függvény számítási eszközt nyújt ama kockázati prémium összegének meghatározására, amit a döntéshozó adott beruházáshoz kapcsol. A bemutatott példában a beruházás várható hasznossága -60 dollár, a -100 dolláros veszteség a beruházás bizonyossági egyenértékese, a beruházás várható nettó jelenértéke pedig 400 dollár. Valamely beruházás kockázati prémiuma úgy határozható meg, hogy a beruházás várható pénzértékéből levonjuk annak bizonyossági egyenértékesét. Esetünkben a kockázati prémium 500 dollár $[400-(-100)]$.

4.9. A hasznossági függvény származtatása

Az alábbiakban egyéni hasznossági függvény származtatását illusztráljuk. Az első lépésben két – önkényesen választott – hasznossági összeget rendelünk két – ugyanúgy választott – pénzjövedelemhez. Példaként 0 és 1 000 000 dollárt választunk, s ezekhez 0 és 1 000 hasznosságot rendelünk. E két pont megválasztása meghatározza egyrészt a hasznossági függvény kiterjedését, másrészt elhelyezkedését. Második lépésként játékot szervezünk, amely az első dobásnál X dollárt ér bizonyossággal, a másodiknál viszont két – önkényesen választott – összeget, 0.5-0.5 előfordulási valószínűséggel.

A dobás	*B* dobás
X dollár bizonyossággal	0 dollár 0.5 valószínűséggel
	1000000 dollár 0.5 valószínűséggel

A kérdés az, hogy a bizonyossággal várható X mekkora összege tesz közömbössé bennünket az *A* és *B* dobást illetően? Ha X 50 dollárt jelentene, akkor a legtöbben a *B* játékot részesítenék előnyben, ha viszont X 50000 dollárral volna azonos, akkor mindenki az *A* játékot választaná. Néhány kísérlet után megállapodnánk X 10000 dolláros értékénél. Ezt követően a következőt kapnánk:

$$U(A) = U(B)$$

$$U(10000) = 0.5 \cdot U(0) + 0.5 \cdot U(1000000)$$

$$U(10000) = 0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot 1000 = 500$$

Így a 10000 dollár hasznossága 500 értékben határozható meg, s ekkor három pontunk lenne a hasznossági függvényen. A művelet folytatható, ha a *B* játékban 10000 dollárt teszünk az 1000000 dollár helyére. Néhány pont kiválasztása után a nagyobb összeg hasznossága megkapható a következő két játékkal:

C dobás	*D* dobás
1 000 000 dollár bizonyossággal	0 dollár 0.5 valószínűséggel
	X dollár 0.5 valószínűséggel

Feltételezzük, hogy a két játék iránti közömbösséghez az X értékének **D** játékban 800 000 000 dollárnak kell lenni.

$$U(1\,000\,000) = 0.5 \cdot (0) + 0.5 \cdot U(800\,000\,000)$$

$$1000 = 0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot U(800\,000\,000)$$

$$U(800\,000\,000) = 2000$$

Folytathatnánk a sort még nagyobb hasznossági érték nyeréséig. A továbbiakban meg kell határozni negatív pénzösszegek hasznossági mértékét. Ezt teljesíti az **E** és **F** játék.

E dobás	**F** dobás
0 dollár bizonyossággal	10 000 dollár 0.5 valószínűséggel
	X dollár 0.5 valószínűséggel

Amennyiben X nagyobb (vagy egyenlő) 0 dollárnál, akkor az **F** játékot preferáljuk. Ahhoz tehát, hogy számunkra az **E** és **F** közömbös legyen, az X értéknek negatívnak kell lenni. Legyen például X egyenlő –200 dollárral, s ekkor a következőt kapjuk:

$$U(0) = 0.5 \cdot U(10\,000) + 0.5 \cdot U(-200)$$

$$0 = 0.5 \cdot 500 + 0.5 \cdot U(-200)$$

$$U(-200) = -500$$

Ezt így tovább folytathatnánk, s más pénzösszegekre is nyerhetnénk hasznossági egyenértékest.

4.9.1. Példa a hasznossági függvény származtatására

A hasznossági függvény úgy származtatható, hogy önkényesen definiáljuk a jövedelem két szintjének hasznosságát, majd alkalmazzuk a befektető által szolgáltatott relációt a többi jövedelemszint hasznosságának meghatározásához. Definiáljuk $U(500)=0$ és $U(4\,500)=1$ alakban az induló relációkat. Azután a várható hasznosság hipotézist alkalmazva kiszámíthatjuk a 2 500 dolláros jövedelem hasznosságát, amelynek egyenlőnek kell lenni az 500 dollár (0.4 valószínűséggel) és a 4 500 dollár (0.6 valószínűséggel) súlyozott (várható) hasznosságával. Így

(1) $$U(2\,500) = 0.4 \cdot U(500) + 0.6 \cdot U(4\,500)$$

$$U(2\,500) = 0.4 \cdot 0 + 0.6 \cdot 1 = 0.6$$

Ugyanilyen számítással:

(2) $$U(2\,500) = 0.75\ U(1\,600) + 0.25\ U(4\,500)$$

$$0.6 = 0.4 \cdot 0 + 0.6 \cdot 1 = 0.6$$

$$U(1\,600) = 0.35/0.75 = 0.467$$

(3) $$U(2\,500) = 0.55\ U(1\,600) + 0.45\ U(3\,500)$$

$$0.6 = 0.55 \cdot 0.467 + 0.45\ U(3\,500)$$

$$U(3\,500) = (0.6 - 0.55 \cdot 0.467)/0.45 = 0.763$$

(4) $$U(2\,500) = 0.75\ U(2\,000) + 0.25\ U(3\,500)$$

$$0.6 = 0.75\ U(2\,000) + 0.25 \cdot 0.763$$

$$\mathrm{U}(2\,000) = (0.6 - 0.25 \cdot 0.763)/0.75 = 0.546$$

(5) $U(2500) = 0.5\ U(2000) + 0.5\ U(3000)$

$0.6 = 0.5 \cdot 0.546 + 0.5\ U(3000)$

$U(3000) = (0.6 - 0.5 \cdot 0.546)/0.5 = 0.654$

(6) $U(2500) = 0.85\ U(2000) + 0.15\ U(4000)$

$0.6 = 0.85 \cdot 0.546 + 0.15\ U(4000)$

$U(4000) = (0.6 - 0.85 \cdot 0.546)/0.15 = 0.906$

E számítás alapján a következő hasznossági értékekkel rendelkezünk:

$U(500) = 0$

$U(1600) = 0.467$

$U(2000) = 0.546$

$U(2500) = 0.6$

$U(3000) = 0.654$

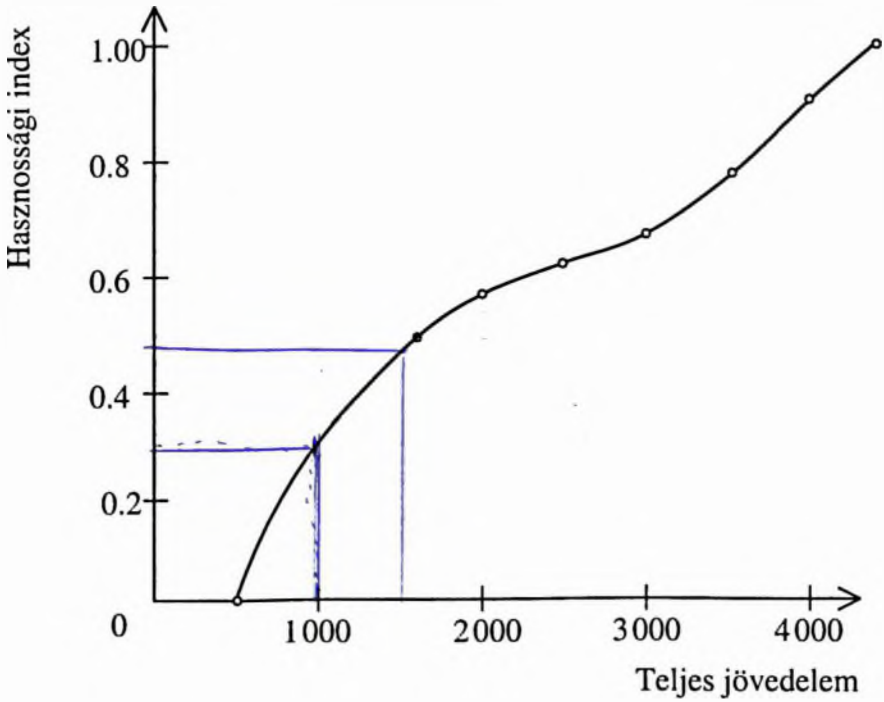
$U(3500) = 0.763$

$U(4000) = 0.906$

$U(4500) = 1.0$

Az 53. ábra mutatja a fenti adatok alapján felrajzolható hasznossági függvényt.

53. ábra *Hasznosság a jövedelem függvényében*



Ahogyan az ábráról látszik, a 0 és 2500 dollár jövedelem értékekre vonatkozóan a hasznossági függvény az origóra konkáv, ami kockázati tartózkodásra utal. Ugyanakkor a 2500 és 4000 dollár közötti jövedelem intervallumra vonatkozóan a hasznossági függvény az origóra konvex, ami arra utal, hogy a befektető kockázat-kerülővé vált.

4.9.2. Az alternatív tevékenységek addicionális jellegéről

Az a mód, ahogyan a hasznossági függvény a teljes jövedelem felhasználásával került megrajzolásra, az ugyancsak alkalmazható a különböző alternatívák kombinációjaként megadott teljes jövedelemszintek összehasonlítására.

(1) A teljes jövedelem 2500 dollár (1500+1000) 0.5 valószínűséggel, és 3000 dollár (2000+1000) 0.5 valószínűséggel.

Így a várható hasznosság:

$$0.5\,U(2500)+0.5\,U(3000) = 0.5\,(0.6+0.654) = 0.627$$

(2) Hasonlóképpen a másik esetben a teljes jövedelem 2000 és 3500 dollár, 0.5-0.5 valószínűséggel.

Így a várható hasznosság:

$$0.5U(2000)+0.5U(3500) = 0.5\,(0.546+0.763)=0.655$$

Ezek alapján a (2) esetet preferálja a befektető, mivel annak magasabb a hasznossága.

Várható értékek

(1)			(2)		
$2500 \cdot 0.5$	=	1250	$2500 \cdot 0.5$	=	1000
$3000 \cdot 0.5$	=	1500	$3500 \cdot 0.5$	=	1750
Várható érték	=	*2750*	*Várható érték*	=	*2750*

Varianciák

(1)			(2)		
$(2500-2750)^2 \cdot 0.50$	=	31250	$(2000-2750)^2 \cdot 0.50$	=	28125
$(3000-2750)^2 \cdot 0.50$	=	31250	$(3500-2750)^2 \cdot 0.50$	=	28125
Variancia	=	*62500*	*Variancia*	=	*56250*

A befektető a (2) változatot preferálja annak ellenére, hogy az (1) változaténál nagyobb a varianciája és ugyanakkora a várható értéke. A variancia a kockázatnak akkor célravezető mértéke, ha az egyén kockázat-kerülő, ámbár a példabeli befektető az (1) és (2) hasznossági intervallumán nem kockázat-kerülő.

5. A PORTFOLIÓ ELMÉLET ALAPJAI

5.1. A befektetések hozamának mérése – az egyedi befektetés esete

A kockázat figyelembevételével adódó lehetőség-halmaz vizsgálatát célszerű egyedi értékpapír megtérülésének számításával kezdeni. Nézzük először a pénzbeli megtérülést!

5.1.1. Pénzbeli megtérülés

Adott befektetésen nyert pénzbeli megtérülés a beruházás eredeti értékének növekménye vagy elszenvedett vesztesége. A pénzbeli megtérülés két komponensből áll. Az egyik jövedelem komponens az eszközből származó közvetlen pénzáramot jelöli. Erre ad példát a részvény birtoklásából származó osztalék és a kötvények tartásából adódó kamathozam. A jövedelem komponenst általában stabilnak tekinthetjük. A vállalatok általában az osztalék állandó ráta melletti folyamatos növelésére törekszenek, s a kötvények kamata is rendszerint rögzített.

A pénzbeli megtérülés másik komponense a tőkenyereség vagy –veszteség, amely az eszköz eredeti beszerzési árához viszonyított változást mutatja. Az eszközök ára folyamatosan változik, amennyiben mértékét befolyásoló új információk merülnek fel. Például, ha a vállalat váratlanul jelentős megrendeléshez jut, akkor a várható profit és a részvények ára egyaránt növekszik, a többi ismeretet változatlannak feltételezve. Ha történetesen az olajárak jelentős mértékben nőnek, akkor a légitársaságok költségei nőni fognak, a várható profit pedig csökken, előidézve a részvényárak csökkenését.

A pénzbeli megtérülés adott periódusra vonatkozóan analitikusan a következő alakban fejezhető ki:

$$\text{Pénzbeli megtérülés} = \left[D_1 + \left(P_1 - P_0\right)\right]H$$

ahol D_1 a periódus osztalék-kifizetése, P_1 a periódusvégi eszközár, P_0 az eszköz beszerzési ára, H a birtokolt eszközök darabszáma.

A pénzbeli megtérülés számításának illusztrálására feltételezzük, hogy a vállalat 100 darab részvényét egyenként 100 dolláros áron megvásároljuk abban a reményben, hogy a vállalat évente részvényenként 4 dollárt fog fizetni osztalékként. Egy év elteltével a részvény ára 110 dollár. Így a realizált tőkenyereség

$$(110 - 100)\cdot 100 \text{ darab} = 1000 \text{ dollár}$$

az osztalék pedig

$$4\cdot 100 \text{ darab} = 400 \text{ dollár}$$

lesz, a teljes pénzbeli megtérülés pedig

$$1\,000+400 = 1\,400 \text{ dollár}$$

5.1.2. Százalékos megtérülés

Az imént kapott 1400 dolláros hozamot vajon nagynak tekinthetjük-e? Ez a kezdeti befektetés nagyságának függvénye. Amennyiben a beruházás 1 millió dollár értékű, akkor ez a hozam viszonylagosan elhanyagolható, ha viszont 100 dolláros volt a befektetés, akkor ez a hozam igen tekintélyes. Ha számításba akarjuk venni a kezdeti kiadás nagyságának hatását a beruházás teljesítményére, akkor a megtérülést a kezdeti beruházási kiadás arányában kell kifejezni. Az R százalékos megtérülést úgy számítjuk ki, hogy a pénzbeli megtérülést elosztjuk a kezdeti beruházási kiadással.

$$R = \frac{D_1 + \left(P_1 - P_0\right)}{P_0}$$

A százalékos megtérülés képletét átrendezve, a megtérülési arányt felbonthatjuk egy osztalék-hozam és egy tőkenyereség-hozam komponensre.

$$R = \frac{D_1}{P_0} + \frac{\left(P_1 - P_0\right)}{P_0}$$

Példánkban az osztalék-hozam 4/100 = 4%, a tőkenyereség-hozam pedig 10/100 = 10%, a teljes (adózás előtti) megtérülés 14%-os.

5.1.3. Átlagos megtérülés

Feltételezzük, hogy adott értékpapír birtoklása révén, 50 éven keresztül jutottunk meghatározott mérvű éves hozamhoz, s tudni szeretnénk a változás átlagos mértékét. Az egyik lehetséges mérőszám az egyszerű számtani átlag, amit az 50 dollár évenkénti megtérülési érték egyszerű átlagolásával számíthatunk. Mindazonáltal a szélsőséges értékek, különösen az alacsonyabb régióban problémát okozhatnak e mutató alkalmazásakor. Például feltételezzük, hogy a beruházás három egymást követő évben 50, 100 és –100%-os hozamot eredményez. Az átlagos megtérülés módszere a beruházásról pozitív teljesítményt jelez, éves átlagos megtérülésként

$$(50\% + 100\% - 100\%) : 3 = 16.67\%$$

értékű megtérülést számítva. Ezzel szemben a periódus végére vonatkozó gazdagság zérus lesz, hiszen a harmadik időszakban –100%-os megtérülést realizálnak.

Az alapvető tendencia mérésének alternatív változata a mértani átlagon alapuló megtérülés, amely azt a növekedési rátát mutatja, amely ahhoz szükséges, hogy a kezdeti összeget a végső értékre emelje. A megtérülési értékek mértani átlaga a következő formában határozható meg:

$$R_g = \left[(1+R_1)(1+R_2).....(1+R_t)\right]^{1/t} - 1$$

ahol R_g a megtérülés mértani átlaga, az R_1 … R_t sorozat az évenkénti megtérülés, t a végső periódus. Példánkban a megtérülés geometriai átlaga zérussal egyenlő, mivel az R_3 harmadik évi megtérülés –100%.

A mértani átlagon alapuló megtérülés számításának illusztrálására feltételezzük, hogy egy értékpapír beruházáson a következő éves megtérülési értékeket realizálták:

Év	Megtérülés
1995	6%
1996	30
1997	25
1998	-15

Az átlagos megtérülés

$$(0.06 + 0.30 + 0.25 - 0.15)/4 = 11.5\%$$

Ezzel szemben a megtérülés mértani átlaga

$$[(1.06 +)(1.30)(1.25)(0.85)]^{1/4} - 1 = 10\%$$

A megtérülés számtani átlaga rendszerint meghaladja a mértani átlagot, mivel az utóbbi figyelembe veszi a kamatos kamatozást, feltételezve hogy a periódusonkénti megtérülési értékek nem konstansak.

5.2. A portfolió várható megtérülésének és kockázatának számítása

Az egyedi értékpapír várható megtérülése és kockázata egyszerűen kiszámítható. A befektetők azonban rendszerint eszközök portfolióját birtokolják. Emiatt a befektető számára nem az értékpapírok egyenkénti teljesítménye, hanem a portfolió egészéé az igazán érdekes. Nézzük meg az eszközök portfoliójának várható megtérülését és kockázatát! Erre alapozva felírható a portfolió valószínűségi eloszlása.

5.2.1. A portfolió várható megtérülése

A kételemű portfolió várható megtérülése a következők szerint írható fel:

százalékos megál.

$$E\left(R_p\right) = E\left[w_1 R_1 + w_2 R_2\right] \tag{1}$$

ahol w_1 és w_2 az 1. és 2. értékpapír portfolióbeli súlyaránya. A komponensek súlyának összege 1 kell hogy legyen, az alábbi költségvetési korlát miatt:

$$\left[H_1 \cdot P_1\right] + \left[H_2 \cdot P_2\right] = \text{Teljes portfolió érték} \tag{2}$$

(1. értékpapír száma)$\cdot(P_1)$+(2.értékpapír száma)$\cdot(P_2)$=Teljes portfolió érték

ahol P_1 és P_2 az eszközök árát jelöli. Az egyes értékpapírok portfolió súlyát úgy határozzuk meg, hogy a (2) egyenlet minden tagját elosztjuk a teljes portfolió értékkel. A súlyok összege egyet ad.

Mivel két megtérülési összeg értékének várható értéke azonos az egyes értékek várható értékének összegével, így a (2) egyenlet a következő formában is felírható:

$$E\left(R_p\right) = E\left(w_1 R_1\right) + E\left(w_2 R_2\right) \tag{3}$$

Továbbá konstans és várható érték szorzatának várható értéke azonos a konstans és a várható érték szorzatával. Így, mivel a súlyok konstanst reprezentálnak, a (3) egyenlet az alábbira egyszerűsödik:

$$E(R_p) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2)$$

Ennek alapján az N elemből álló portfolió várható megtérülése így adható meg:

$$E(R_p) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2) + ...w_N E(R_N) \tag{4}$$

Eszerint a portfolió várható megtérülése a komponens értékpapírok várható megtérülésének súlyozott átlaga. A várható megtérülés számításának illusztrálásához feltételezzük, hogy a befektető két értékpapírból álló portfoliót birtokol. A 10000 dolláros teljes forrásból 7000 dollárt fektet az 1. jelű, a maradék 3000 dollárt a 2. jelű értékpapírba. A beruházó feltételezése szerint az 1. eszköz a következő évben 18%-os, a 2. értékpapír pedig 12%-os megtérülést biztosít. Ennek alapján a portfolió várható megtérülése a következők szerint írható fel:

$$\left[\frac{7000}{10000} \cdot 18\%\right] + \left[\frac{3000}{10000} \cdot 12\%\right] = 16.2\%$$

5.2.2. Fedezetlen eladás

Az előző példában a két súlyarány pozitív volt, mivel a beruházó abban a reményben vásárolt eszközöket, hogy azokat magasabb áron értékesíti. Ez az ún. „long pozíció". Mindazonáltal a befektetőnek arra is van lehetősége, hogy egy másik stratégiát kövessen. Részvényeket vesz kölcsön brókertől, eladja azokat az éppen érvényes piaci áron, majd később visszavásárolja azokat – feltehetően alacsonyabb áron. Ilyen esetben a részvényegységre jutó profit az eladási ár és vételi ár különbözete. Ezt a stratégiát fedezetlen eladásnak, vagy másként „short pozíció"-nak nevezik. A fedezetlen eladás $w_i < 0$ negatív súlyaránnyal reprezentálható.

Térjünk vissza ahhoz a példához, amelyben a befektetőnek 10000 dollárnyi pénzalapja van, s az 1. és 2. értékpapír várható megtérülése 18% és 12%. Feltételezzük, hogy a befektető fedezetlenül elad 3000 dollár értékben 2. jelű részvényt. Ezáltal 13000 dollár áll rendelkezésre az 1. jelű részvény vásárlásához (10000 dollár eredeti tőke plusz 3000 dollár fedezetlen eladásból származó bevétel). Így az 1. részvény portfolió súlya 13000:10000=1.30. Mivel a beruházó 3 000 dollár összegben elad 2. részvényt, a súlyarány

$$-3000 : 10000 = -0.30 \text{ lesz.}$$

A portfolió súlyok 1-et adnak összegként , kielégítve a költségvetési korlát követelményét. E portfolió várható megtérülése,

$$E(R_p) = (1.30 \cdot 18\%) + (-0.30 \cdot 12\%) = 19.8\% .$$

Összegezve megállapítható, hogy a portfolió várható megtérülése a komponens eszközök várható megtérülésének súlyozott átlaga. A *long* pozíciót pozitív, a *short* eladást negatív súlyokkal reprezentálhatjuk. A súlyarányok összege feltétlenül 1 kell legyen.

5.3. A portfolió szelekció alapjai

A portfolió befektetések sorozataként vagy csomagjaként tekinthető, amely tartalmazhat részvényeket, kötvényeket és egyéb beruházásokat. A portfolió elmélet beruházások optimális sorozatának kiválasztásával, felépítésével és felülvizsgálatával foglalkozik, figyelembe véve e beruházások anticipált hozamát és annak variabilitását. Elsősorban az optimális portfoliók kiválasztásával foglalkozunk. Portfolió felépítés akkor történik, ha befektetések csomagját meghatározott időtávra hozzuk létre. Felülvizsgálat akkor szükséges, ha az értékpapírok teljesítménye változik, vagy új értékpapírok válnak bevonhatóvá, esetleg a befektetői attitűdök változnak. A portfolió elméletnek számos kapcsolódása van a kockázatos és egymással összefüggő beruházások analízisével. A kapcsolat mégsem tökéletes, mivel a portfolió elmélet egyperiódusú mérlegelésen alapul. Bár ez az időperiódus azonos lehet a befektető teljes tervezési időhorizontjával, ami viszont nem a legmegfelelőbb háttér termelő fizikai tőkeberuházások és kapacitások vizsgálatához, különösen akkor, ha ezek szabálytalan időbeli lefutású pénzáramot generálnak.

A különböző karakterű vállalkozások egyesítése (diverzifikálása) nem új keletű törekvés. Itt nagy léptékű diverzifikációt mutatunk be, ahol a befektető előnyöket remél eltérő értékpapírok nagy tömegének részvénypiaci forgalmazásából. A tőzsdei befektetést mindig kockázati tartózkodás kísérte, mindazonáltal a portfolió választás problémájának modern megközelítése Markowitz[41] munkáival kezdődött. Markowitz újdonsága az a

[41] Markowitz (1952); (1959) művei alapozták meg a portfolió elméletet.

mód volt, ahogyan a beruházáshoz kapcsolódó kockázatot kezelte, a megtérülés szórását vagy varianciáját alkalmazva a beruházási megtérülés kockázati mértékeként. Ismeretes, hogy a variancia nem tökéletes kockázati mérték, bár önmagában az a gondolat, hogy a szóródás statisztikai mértékét használjuk a kockázat mérésére, jelentős haladás volt.

A befektetőket racionálisnak feltételezzük, amennyiben a nagyobb megtérülést preferálják a kisebbel szemben, a kockázat azonos vagy kisebb mértéke mellett, továbbá a kockázattól tartózkodónak tételezzük őket. A kockázati tartózkodás ebben a kontextusban csupán annyit jelent, hogy két – azonos várható megtérülésű – beruházás közül a kisebb kockázatút preferálják. A „megtérülés" a pénzbeáramlás bármely alkalmas mértéke lehet, mint például az NPV, bár itt inkább a hozamot használjuk. Így tehát, ha a megtérülés szórását javasoljuk, akkor azon a hozam várható értéke körüli szóródást értünk.

A portfolió szelekciós probléma két fázisra bontható: az első a várható érték-variancia szabály alapján hatékony portfoliók keresése, másodszor azok közül egyetlen portfolió kiválasztása. A befektető, mielőtt elkötelezné magát beruházási változatok adott csoportja mellett, becsülnie kell a portfolió jövőbeli teljesítményét. A portfolió elmélet éppen a két említett mértéket választja ki, egyrészt az egész portfolió várható megtérülését, (azaz hozamát) $\overline{R}$-tel jelölve, másrészt a megtérülés szórását, amit σ-val jelölünk. A befektető – feltevés szerint – elvileg alkalmas kell legyen a megtérülés-szórás kombinációk rangsorolására. Amennyiben ez konzisztens módon történik, akkor a sorolás átfogó függvénnyel leírható:

$$E(U) = f(\overline{R}, \sigma)$$

ahol $E(U)$ a várható hasznosság.

E függvénnyel szemben az az egyetlen követelmény, hogy a portfoliókat ugyanúgy rangsorolja, mint a befektető, azaz minél magasabb $E(U)$ értéke, annál jobb a portfolió. Az $E(U)$ által felvett aktuális számszerű értéknek, adott $\overline{R}$ és σ mellett önmagában nincs jelentősége. Egyszerű belátni, hogy két portfolió közül a nagyobb $E(U)$ értékűt kell preferálni. Az $E(U)$ ordinális függvénynek nevezhető, aminek bármilyen növekvő transzformáltja ugyanúgy előállítható. Meg kell jegyeznünk, hogy a jelölés is mutatja: *a befektető a várható hasznossági teljesítményt kísérli meg maximalizálni, nem pedig az aktuálisan bekövetkezőt.* Amire szükség van, az egy pontos, ex ante (esemény előtti) döntés. A fenti hasznossági reláció egyetlen időperiódusra vonatkozik, habár ez lehet a befektető teljes tervezési horizontja is. Érdemes megjegyezni, hogy mit jelezne a fenti függvény kockázat hiányában (ahol $\sigma = 0$ az összes portfolióra, az $\overline{R}$ pedig az aktuális megtérülés). A bizonyosság e szituációjában ez olyan beruházási portfolió választását jelentené, amely maximalizálja az NPV (vagy hozam) értéket (alárendelten a vonatkozó mérték megfontolásainak). Lineáris környezetben, korlátlan oszthatóság és bizonyosság mellett ez egyetlen beruházás kiválasztását jelentené, azaz nem lehetne szó diverzifikációról. A befektetők számára a kockázat általában nem kívánatos, s a diverzifikációról úgy vélik, hogy az mérsékli a kockázatot. A valóságban a befektetések diverzifikációjának nem minden eljárása vezet a kockázat csökkenéséhez. Némely naiv diverzifikációs lépés éppen a kockázati szint növekedéséhez vezet. A racionalitás és a kockázati tartózkodás feltevése azt jelenti, hogy az U ugyanolyan irányban fog változni, mint ahogy $\bar{R}$ magában változik ($\partial U / \partial R > 0$), s az U ellenkező irányban változik, mint ahogy σ egyedül változna($\partial U / \partial \sigma < 0$). Ezután a cél olyan beruházási portfolió kiválasztása lesz, amely maximalizálja U értékét, bármilyen finanszírozási és egyéb korlátot is alkalmazzunk.

5.3.1. Markowitz hozzájárulása a portfolió elmélethez

Valamely befektetést jó közelítéssel úgy írhatunk le, hogy az kockázatnak van kitéve. A tradicionális portfolió gazdálkodás célját abban jelölik meg, hogy maximalizálja a befektető gazdagságát a kockázat figyelembevételével. Markowitz döntő hozzájárulása abban állt, hogy elméleti megoldást adott a portfolió kockázat kezelésére. Az ő várható érték-variancia modellje a modern portfolió elmélet alapjaként tekinthető. A későbbi kutatások rámutattak arra, hogy a teljes kockázat (variancia) a szisztematikus vagy piaci és a nem piaci vagy diverzifikálható kockázat összege. A nem piaci kockázat diverzifikációval eltüntethető, s a hatékony tőkepiac így csak a piaci kockázatért jutalmazza a befektetőket.

Erre alapozva formalizált átváltási kapcsolat mutatható ki a megtérülés és kockázat között, ahol a portfolió várható megtérülése a vállalt piaci kockázati szint függvénye. A portfoliók és egyedi értékpapírok magas, átlagos és alacsony kockázati osztályba sorolhatók. Egy értékpapír vagy portfolió kockázatossága függ annak béta koefficiensétől, ami azt mutatja meg, hogy az értékpapír vagy portfolió megtérülése mennyire szorosan mozog együtt a piaci indexen nyerhető megtérüléssel.

A hatékony piac hipotézise biztosítja, hogy a részvényárakban minden rendelkezésre álló információ visszatükröződjék, s bármely új vagy sokkszerűen jelentkező információ nagyon gyorsan beépüljön a részvényárakba. Eme egyszerű hipotézis implikációi rendkívül jelentősek. Ez azt jelenti, hogy az üzleti tényadatok tanulmányozása nem vezet jobb beruházási teljesítményhez; a múltbeli ármozgások vizsgálata nem segít a jövőbeli áringadozások előrejelzésében; egy vállalat értéke a beruházás által generált várható pénzáramok függvénye, s az értéket nem befolyásolja sem az osztalék-, sem az áttételi politika; nincsenek beruházási alkuk.

5.3.2. Markowitz várható érték-variancia formulája

A befektetők – legalábbis kvalitatív értelemben – sokáig kételkedtek az értékpapír birtoklás diverzifikációjából származó előnyök jelentkezésében. Eme előnyök első jelentős kvantitatív analízisét éppen Markowitz modellje szolgáltatta. A modellt megalapozó feltevések a következők:

- Egy beruházás hozamában adekvát módon összegződnek a beruházás kimenetei, a befektetők pedig elképzelik a megtérülési ráták valószínűségi eloszlását.
- A befektetők kockázati becslése arányban van az értékpapír vagy portfolió érzékelt megtérülési varianciájával.

- A befektetők hajlandók döntéseiket a valószínűségi eloszlás függvény két kiválasztott paraméterére: a várható megtérülésre és a varianciára alapozni.

- A befektető kinyilvánítja kockázati tartózkodását, amely szerint a várható megtérülés adott szintjén a minimális kockázatot preferálja; ugyanígy a kockázat adott szintjén a maximális várható megtérülést részesíti előnyben.

Általában lehetséges diverzifikációval csökkenteni a kockázatot annak árán, hogy bizonyos mérvű várható megtérülés ezáltal nem lesz elérhető, ennek eredményeként azonban el kell fogadni az alacsonyabb várható megtérülést. Ennek következtében olyan helyzet alakul ki, amelyben *a kockázat és megtérülés egymásra átváltható.*

Az n értékpapírból álló portfolió megtérülése a portfolióban foglalt értékpapírok várható megtérülésének súlyozott átlaga.

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i \tag{1}$$

ahol $E(R_p)$ a portfolió várható megtérülése, w_i a portfolió i-edik értékpapírjának súlyaránya, az R_i az i-edik értékpapír várható megtérülése.

A legegyszerűbb eset a két értékpapírból álló portfolió, amellyel kapcsolatban az (1) egyenlet a következő alakra redukálódik:

$$E(R_p) = w_1 R_1 + (1 - w_1) R_2 \tag{2}$$

A portfolió kockázatát megtérülésének varianciájával mérik, amit egyrészt az egyes értékpapírok megtérülési varianciája, másrészt az értékpapír megtérülési értékek páronkénti kovarianciája határoz meg, a következők szerint:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} w_i w_j COV\left(R_i R_j\right) \tag{3}$$

ahol σ_p^2 a portfolió megtérülés varianciája, σ_i^2 az i-edik értékpapír megtérülési varianciája, $COV(R_iR_j)$ az i és j értékpapír megtérülése közötti kovariancia. Az utóbbi komponens azt méri, hogy a megtérülési értékek mennyire szorosan mozognak együtt; az együttmozgás szorossága a két értékpapír megtérülése közötti korrelációtól, s a megtérülési értékek varianciájától függ a következő formában:

$$COV\left(R_i R_j\right) = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \tag{4}$$

ahol ρ_{ij} az i és j értékpapír megtérülése közötti korreláció koefficiense.

A (4) kifejezést behelyettesítve a (3) egyenletbe, a következőt kapjuk:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \tag{5}$$

Fontos megjegyezni, hogy egy portfolió megtérülési varianciáját az értékpapírok megtérülésének páronkénti korrelációja, továbbá az egyes értékpapírok megtérülési varianciája határozza meg. A két-értékpapíros portfolió esetében az (5) egyenlet így egyszerűsödik:

$$\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + (1-w_1)^2\sigma_2^2 + 2w_1(1-w_1)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \tag{6}$$

Ahhoz, hogy rögzíthessük az értékpapír megtérülés korrelációjának hatását a portfolió megtérülés varianciájára, a (6) egyenletet közelebbről meg kell vizsgálni. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Ha az összes befektetés az 1. értékpapírba irányul, akkor a

$$\sigma_p^2 = 1 \cdot \sigma_1^2 = \sigma^2 \tag{7}$$

reláció áll fenn; ugyanígy, ha az összes beruházás a 2. értékpapírba megy, akkor

$$\sigma_p^2 = 1 \cdot \sigma_2^2 = \sigma^2 \tag{8}$$

Ha pedig mindkét értékpapírba irányul egy-egy rész az összes befektetésből, azaz diverzifikáció történik, akkor fennáll a következő:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= w_1^2\sigma^2 + (1-w_1)^2\sigma^2 + 2w_1(1-w_1)\rho_{12}\sigma^2 \\ &= \sigma^2\left[w_1^2 + (1-w_1)^2 + 2w_1(1-w_1)\rho_{12}\right]\end{aligned} \tag{9}$$

Ugyanakkor az is felismerhető, hogy

$$[w_1 + (1-w_1)]^2 = 1 = w_1^2 + (1-w_1)^2 + 2w_1(1-w_1) \tag{10}$$

Behelyettesítve a (10) kifejezést a (9) egyenletbe

$$\begin{gathered}\sigma_p^2 = \sigma^2 \\ \text{ha } \rho_{12} = 1 \\ \text{ha } \rho_{12} < 1\end{gathered} \tag{11}$$

akkor viszont

$$\sigma_p^2 \le \sigma^2 \tag{12}$$

Minden olyan esetben előny származik a portfolióból, a megtérülési variancia csökkenése formájában, amikor a portfolióban foglalt két értékpapír megtérülése nem korrelál tökéletesen pozitívan. A megtérülési értékek közötti alacsony fokú korreláció mérsékelt portfolió megtérülési varianciát eredményez, a negatív korreláció pedig lényeges kockázatcsökkentési előnyökkel jár. Nyilvánvaló, hogy a kockázat csak akkor számolható fel teljesen, ha a (6) egyenlet jobb oldalán a harmadik tag negatív és abszolút értékben egyenlő az első két tag összegével (mivel az mindig pozitív).

A gyakorlatban viszont az értékpapírok megtérülése fokozott pozitív korrelációt mutat, mivel az egyes papírok megtérülését ugyanazok a gazdasági és politikai tényezők befolyásolják. Ezért a teljes kockázat csupán bizonyos része tüntethető el diverzifikációval, s e részt diverzifikálható vagy nem szisztematikus kockázatnak nevezik. *A Markowitz formula nem határoz meg egyetlen optimális portfoliót. E modell olyan portfoliók sorozatát szolgáltatja, amelynek elemei a kockázat és megtérülés kapcsolata alapján hatékonyak.* E formulában mindegyik portfolió a kockázat adott szintjén maximális várható megtérülést kínál, a várható megtérülés adott szintjén pedig maximális kockázatot.

A probléma úgy formulázható, ha egy célfüggvényt minimalizálunk adott korlátok mellett. A célfüggvény magában foglalja a kockázat és megtérülés közötti átváltást, s a következő formában írható fel:

$$f = A\left[E\left(R_p\right)\right] + \sigma_p^2 \qquad 0 \le A \le \infty \tag{13}$$

ahol A a kockázati tartózkodás indexe.

Ha $A=0$, akkor a legalacsonyabb megtérülési varianciájú portfolió kerül kiválasztásra. Amennyiben A növekszik, akkor a befektető egyre inkább hajlamos lesz a kockázatot elfogadni a magasabb várható megtérülés elérése érdekében. Ha $A=\infty$, akkor a legmagasabb várható megtérülésű portfolió lesz az optimális. Az első korlát az, hogy negatív befektetési arány nem megengedett, azaz

$$w_i \ge 0 \tag{14}$$

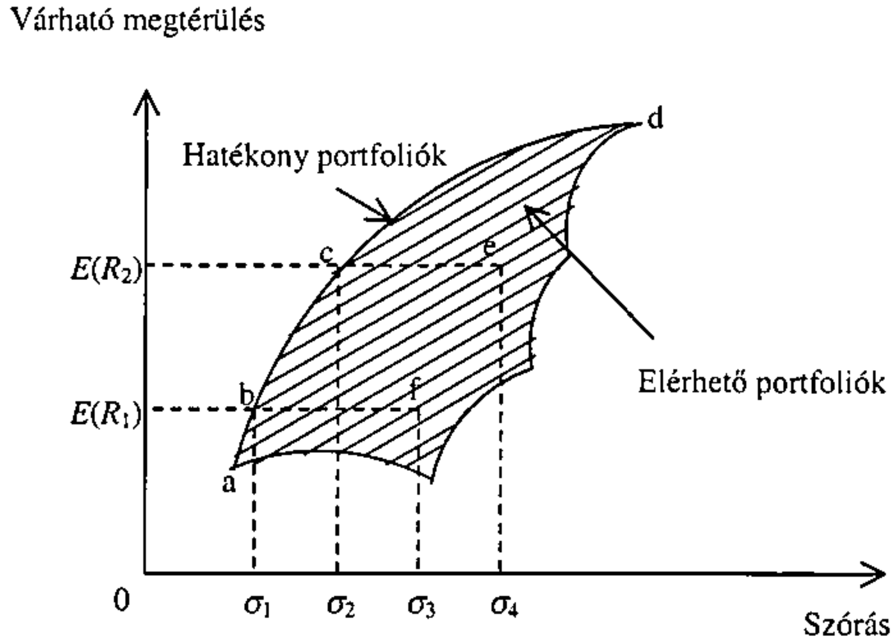
a másik pedig az, hogy az n értékpapírból álló portfolióra fennáll a következő:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{15}$$

A (13) függvény minimalizálása a (14) és (15) korlát mellett kvadratikus programozással végezhető el. Eredményül hatékony portfoliók sorozatát kapjuk, s mindegyik portfolió a kockázati tartózkodási index adott értékének felel meg. A megoldást az 54. ábra mutatja[42].

[42] Szükséges megjegyezni, hogy a portfolió elemzésben a variancia helyett a szórást veszik alapul. Mivel a szórás a variancia monoton függvénye – egyszerűen annak pozitív négyzetgyöke – így az argumentumokat nem befolyásolja az, hogy melyik kockázati mértéket használják.

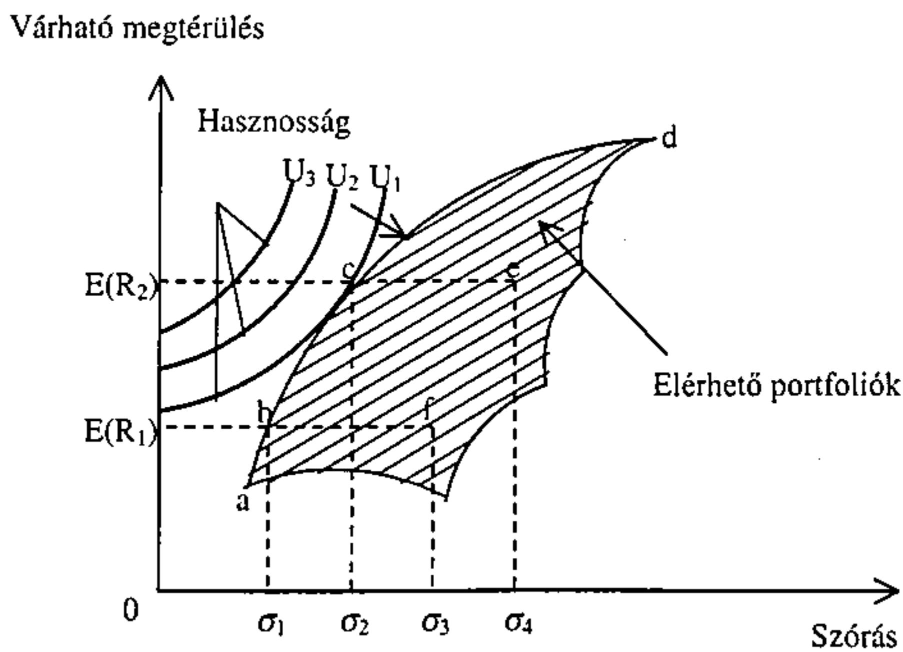
54. ábra *Markowitz hatékony határvonal*



Az ábrán a sávozott terület reprezentálja az összes elérhető portfoliót, azaz mindama kockázat-várható megtérülés kombinációkat, amelyek elérhetők a rendelkezésre álló portfoliókkal. A hatékony határvonal jelöli az összes lehetséges hatékony portfoliót, s a vonal minden egyes pontja uralja a tőle jobbra álló kombinációkat. Illusztrációként tekintsük a *b*, *c*, *e* és *f* ponttal jelölt portfoliót! A *b* és *f* portfolió ugyanakkora $E(R_1)$ várható megtérülést ígér úgy, hogy a *b* portfolióhoz σ_1, az *f* ponthoz pedig σ_3 kockázat kapcsolódik. A *c* és *e* portfolió ugyanígy egyforma $E(R_2)$ várható megtérülést ígér, de a *c* portfolióhoz σ_2, az e ponthoz pedig σ_4 kockázat társul. *Ez az oka annak, hogy a befektetők inkább a hatékony határvonalon választanak portfoliót, s nem a sávozott rész belsejében, mivel fennáll a kockázati tartózkodás feltevése.* Nyilvánvaló, hogy az *a* portfolió a határvonalon a lehető legkisebb kockázatú befektetést reprezentálja, míg a *d* a lehető legmagasabb megtérülésű portfoliót képviseli.

A befektető ama portfoliók közül köteles választani, amelyeket a hatékony határvonal reprezentál, a döntés viszont függ saját kockázat-megtérülés preferenciájától. Azt feltételezzük, hogy a befektetőnek kvadratikus hasznossági függvénye van, mivel ez implikál kockázattól tartózkodó magatartást. Az alábbi ábra három ilyen hasznossági (közömbösségi) görbét mutat.

55. ábra *Az optimális portfolió kiválasztása*



Az egyén közömbös adott görbe várható megtérülés-szórás kombinációival szemben, mivel a hasznosság a görbe teljes vonulatán ugyanolyan. Az egyre magasabb pozíciójú közömbösségi görbék a hasznosság egyre magasabb fokát reprezentálják, mivel a kockázat adott fokán a várható megtérülés egyre nagyobb lesz. A befektető azért remél eljutni a lehető legmagasabb közömbösségi görbére, hogy elérhesse a hasznosság maximálisan lehetséges szintjét, s ezt a közömbösségi görbe és a hatékony határvonal közötti *c* érintési pont biztosítja. E pont ezért az optimális portfoliót reprezentálja. A különböző egyéneknek eltérő hasznossági preferenciái vannak a várható megtérülés és a kockázat tekintetében, s így az értékpapírok optimális portfoliója egyénenként jelentősen különbözhet.

5.3.3. Két-értékpapíros példa portfolió kockázat számításához

A és *B* vállalat értékpapírjának a következő várható megtérülését és szórását becsülték:

Vállalat	$R(\%)$	$\sigma(\%)$
A	10	15
B	8	12

A megtérülési értékek közötti várható korreláció mértéke 0.20. Portfoliók sorozatára vonatkozó várható megtérülés és kockázati mérték a (2) és (6) egyenlet segítségével számítható.

(1) 100% A részvénybe

$E(R_p) = 0.10$

$\sigma_p^2 = (0.15)^2 = 0.0225$

*(2) 100% **B** részvénybe*

$$E(R_p) = 0.08$$
$$\sigma_p^2 = (0.12)^2 = 0.0144$$

*(3) 80% **A**, 20% **B** részvénybe*

$$E(R_p) = (0.8)(0.1) + (0.2)(0.8) = 0.096$$
$$\sigma_p^2 = (0.8)^2(0.15)^2 + (0.2)^2(0.12)^2 + 2(0.8)(0.2)(0.15)(0.15) = 0.0161$$

*(4) 20% **A**, 80% **B** részvénybe*

$$E(R_p) = (0.2)(0.1) + (0.8)(0.08) = 0.084$$
$$\sigma_p^2 = (0.2)^2(0.15)^2 + (0.8)^2(0.12)^2 + 2(0.2)(0.8)(0.2)(0.15)(0.12) = 0.0113$$

*(5) 60% **A**, 40% **B** részvénybe*

$$E(R_p) = (0.6)(0.1) + (0.4)(0.08) = 0.092$$
$$\sigma_p^2 = (0.6)^2(0.15)^2 + (0.4)^2(0.12)^2 + 2(0.6)(0.4)(0.2)(0.15)(0.12) = 0.0121$$

*(6) 40% **A**, 60% **B** részvénybe*

$$E(R_p) = (0.4)(0.1) + (0.6)\,(0.08) = 0.088$$
$$\sigma_p^2 = (0.4)^2(0.15)^2 + (0.6)^2(0.12)^2 + 2(0.4)(0.6)(0.2)(0.15)(0.12) = 0.0105$$

*(7) 50% **A**, 50% **B** részvénybe*

$$E(R_p) = (0.5)(0.1) + (0.5)(0.08) = 0.09$$
$$\sigma_p^2 = (0.5)^2(0.15)^2 + (0.5)^2(0.12)^2 + 2(0.5)(0.5)(0.2)(0.15)(0.12) = 0.0110$$

Ha változik az értékpapírok megtérülése közötti korreláció mértéke, az nem gyakorol hatást a portfolió megtérülésére. A különböző korrelációs értékek portfolió kockázatra gyakorolt hatását az alábbi tábla mutatja.

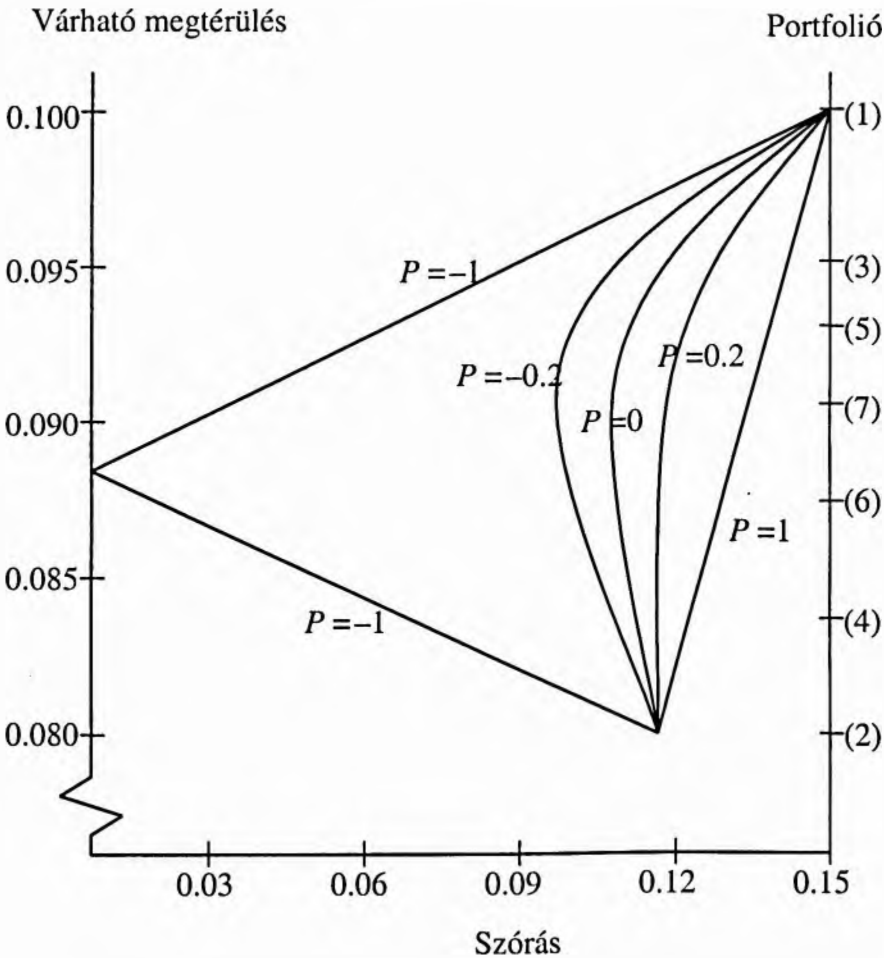
52. tábla *Két értékpapírból álló portfoliók változó korrelációs koefficiensekkel*

Portfolió	$E(R_p)$	$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2}$				
		$\rho = -1$	$\rho = -0.2$	$\rho = 0$	$\rho = 0.2$	$\rho = 1.0$
(1)	0.100	0.150	0.150	0.150	0.150	0.150
(2)	0.080	0.120	0.120	0.120	0.120	0.120
(3)	0.096	0.096	0.188	0.122	0.128	0.144
(4)	0.084	0.066	0.095	0.100	0.106	0.126
(5)	0.092	0.042	0.093	0.102	0.110	0.138
(6)	0.088	0.012	0.084	0.094	0.103	0.132
(7)	0.090	0.015	0.086	0.096	0.105	0.135

A táblából vett elérhető portfoliókat az 56. ábra illusztrálja.

Az ábra vizsgálata arra mutat, hogy az (1), (3), (5), (6) és (7) portfolió *hatékony* az értékpapír megtérülési értékek közötti –1.0, –0.2, 0 és +0.2 korrelációs mértéknél. Ha két értékpapír megtérülése között tökéletesen pozitív korreláció van, akkor az összes portfolió hatékony.

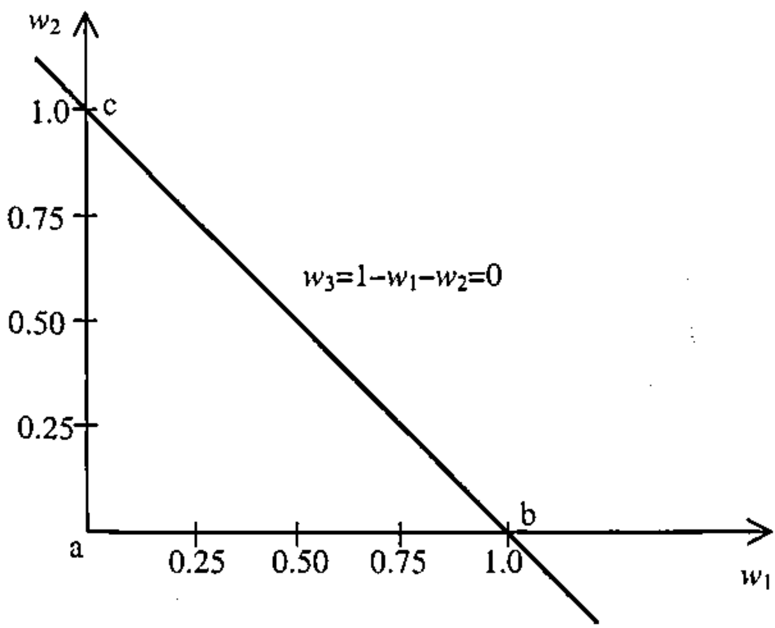
56. ábra *Elérhető és hatékony portfoliók (példa)*



5.3.4. Hatékony portfoliók grafikus (geometriai) analízise

Markowitz saját hatékony sorozat elméletéhez geometriai reprezentációt is csatolt, s ez megkönnyíti a három értékpapírból álló mező magyarázatát (ami kétdimenziós térben is elhelyezhető). Ezt követően a portfoliók az alábbi ábrán bemutatott módon illusztrálhatók.

57. ábra *Portfoliók geometriai reprezentációja*



Az ábrán a vízszintes tengelyen van w_1, a függőleges tengelyen a w_2 érték, a w_3 pedig a (16) jelű korlátozó feltétellel fejezhető ki:

$$w_3 = 1 - w_1 - w_2 \tag{16}$$

A (16) kifejezés, együtt a (14) korlátozó feltétellel azt implikálja, hogy az elérhető portfoliók sorozata vagy az *a*, *b*, *c* háromszögön, vagy azon belül helyezkedik el, mivel az azon kívüli területek negatív beruházásokat tételeznek.

A három-értékpapíros esetben az (1) egyenlet így egyszerűsödik:

$$E\left(R_p\right) = w_1 R_1 + w_2 R_2 + w_3 R_3 \tag{17}$$

Ha a (16) kifejezést behelyettesítjük a (17) egyenletbe, akkor a következőt kapjuk:

$$E\left(R_p\right) = w_1\left(R_1 - R_3\right) + w_2\left(R_2 - R_3\right) + R_3 \tag{18}$$

A (18) egyenlet kapcsolatot mutat ki a portfolió várható megtérülése, valamint az 1. és 2. értékpapírba irányuló beruházás mennyisége között.

Az R_1, R_2 és R_3 adott értéksor mellett azon pontok mértani helye, amelyekre nézve $E(R_p)$ konstans, egyenes vonallal adható meg, s ezt az azonos várható értékek egyenesének (isomean line) nevezik. Az 58. ábra azonos várható értékek egyeneseinek sorozatát mutatja, amelyen a várható portfolió megtérülés balról jobbra növekszik.

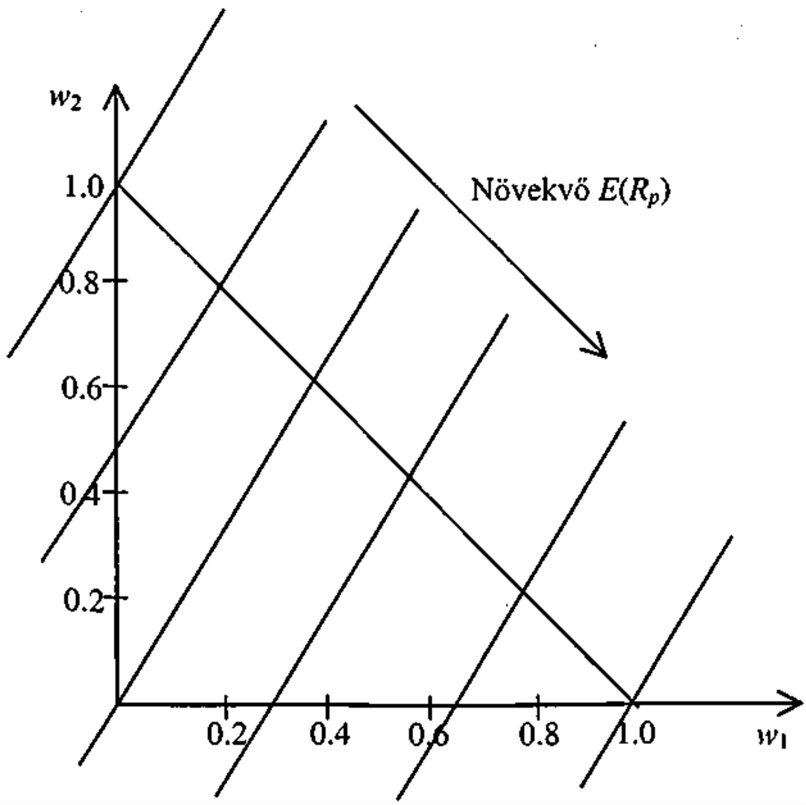
A portfolió megtérülés varianciája a három-értékpapíros esetben az (5) egyenlet segítségével így írható fel:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 = {} & w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + 2w_1 w_2 \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ & + 2w_1 w_3 \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2w_2 w_3 \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \tag{19}$$

Ha a (16) egyenletet behelyettesítjük a (19) kifejezésbe, akkor a portfolió megtérülés varianciája w_1 és w_3 függvényeként egyszerűen kifejezhető:

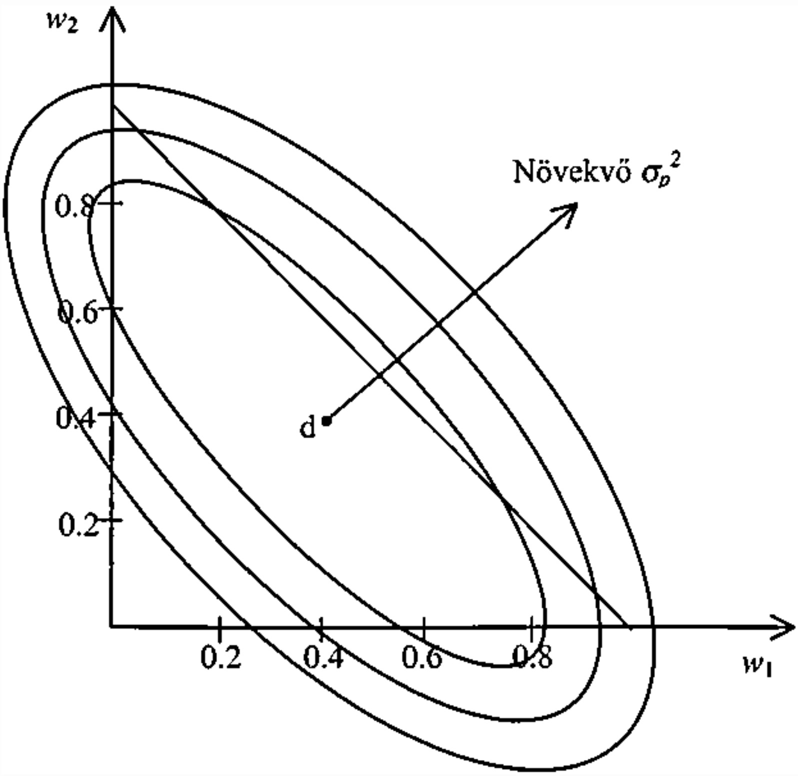
$$\begin{aligned} \sigma_p^2 = {} & w_1^2\left(\sigma_1^2 - 2\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2\right) + w_2^2\left(\sigma_2^2 - 2\rho_{23}\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2\right) + \\ & + 2w_1 w_2\left(\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 - \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 - \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2\right) + \\ & + 2w_1\left(\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 - \sigma_3^2\right) + 2w_2\left(\rho_{23}\sigma_2\sigma_3 - \sigma_3^2\right) + \sigma_3^2 \end{aligned} \tag{20}$$

58. ábra *Azonos várható értékek egyeneseinek sorozata*



Kimutatható, hogy adott $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \rho_{12}, \rho_{13}$ és ρ_{23} érték mellett azon pontok mértani helye, amelyekre nézve σ_p^2 konstans, ellipszissel adható meg, amit iso-variancia görbének nevezünk. Az 59. ábra iso-variancia görbék egy sorozatát mutatja be, ahol a megtérülés varianciája a *d* középpontból kifelé növekszik.

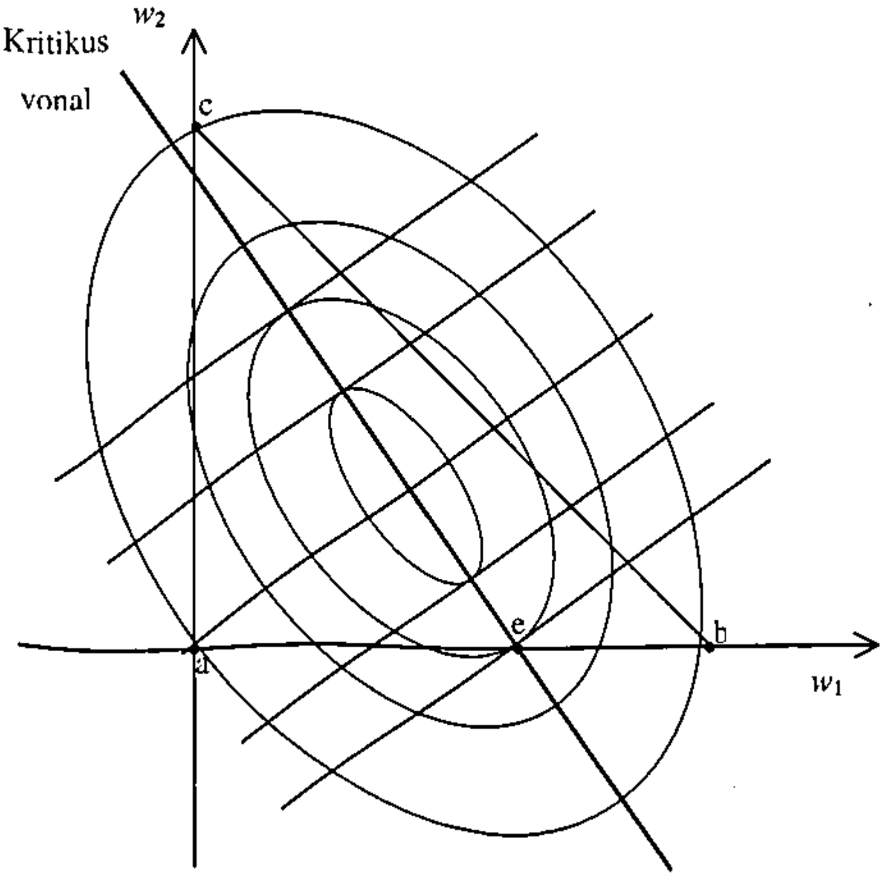
59. ábra *Iso-variancia görbék sorozata*



Az azonos várható megtérülést biztosító egyenesek együtt ábrázolhatók az iso-variancia görbékkel, ahogy azt a 60. ábra mutatja.

Az azonos várható megtérülést biztosító egyenes pontjai közül azok, amelyek érintik az iso-variancia görbét, a minimális variancia pozícióját mutatják. *Az azonos várható megtérülés egyenesei és az iso-variancia ellipszisek közötti érintési pontok mértani helyét kritikus vonalnak nevezik, s ezen egyenes minden egyes pontja minimalizálja a varianciát a várható megtérülés adott értéke mellett.* Annak érdekében azonban, hogy egy

60. ábra Az iso-mean egyenesek és az iso-variancia görbék egymásra hatása



portfolió hatékony legyen, maximalizálni kell a várható megtérülést a kockázat adott szintjén, továbbá a kritikus vonalnak csupán a d középponttól jobbra elhelyezkedő pontjai hatékonyak (az elérhető pontok sorozatán belül), azaz a d és e közötti pontok; az e és b közötti portfoliók szintén hatékonyak; az e és b pont közé eső, azonos várható értéket biztosító egyeneseken minimális variancia (az elérhető portfoliókra) ama portfoliónál van, amely az e és b pontot összekötő egyenesen van. Ilyen okokból a hatékony portfoliók a d, e, b egyenessel ábrázolhatók.

A Markowitz modell hozzájárulása nagyon fontos volt, hiszen ez alapozta meg a portfolió gazdálkodás modern elméletét. A Markowitz technika alapvető gyengeségei, a nagy adatigény és a számítási nehézségek már leküzdhetők, közelítő eljárások alkalmazásával. Például Sharpe a portfolió elemzés olyan modelljét fejlesztette ki, amely jelentősen egyszerűsíti a hatékony portfolió generálásának eljárását. A 100 értékpapírból álló együttesben a Markowitz modell teljes 5150 darabos adatigénye 302 adatra mérséklődik Sharpe egyszerűsítésének bevezetésével, s a számítási igény is kisebb. A Markowitz megközelítés továbbfejlesztése a tőkepiaci egyensúlyi értékelés modelljének kialakításához vezetett.

5.4. A portfolió kockázata

Egy portfolió kockázata várható megtérülésének szórásával mérhető a következők szerint:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{s=1}^{n} \left(R_{ps} - \overline{R}_p\right)^2 p_s} \tag{1}$$

ahol

σ_p = a portfolió várható megtérülésének szórása

R_{ps} = lehetséges portfolió megtérülés s működési állapotban

$\overline{R}_p$ = n számú lehetséges megtérülés várható értéke

P_s = s működési állapot bekövetkezési valószínűsége

A portfolió elmélet alapvető megfontolása az a gondolat, hogy bármely – portfolióban tartott – eszköz inherens kockázata különbözik ugyanezen eszköz izolált birtoklásának kockázatától. Így egy fokozottan kockázatos – izoláltan tartott – eszköz, portfolióba helyezve nem annyira kockázatos.

5.4.1. A portfolió kockázat mérése: a két komponens esete

Az (1) egyenlet felhasználható a portfolió kockázat számítására azzal a feltevéssel, hogy az egyedi értékpapírok megtérülési eloszlása normális. Erre felírható az alábbi egyenlet:

$$\sigma_p = \sqrt{w^2\sigma_A^2 + (1-w)^2\sigma_B^2 + 2w(1-w)COV(R_A R_B)} \qquad (2)$$

A képletben szereplő kovariancia egyrészt a két értékpapír közötti korrelációtól, másrészt az egyes értékpapírok megtérülésének szórásától függ. Számítása a következők szerint történik:

$$COV(R_A R_B) = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B \qquad (3)$$

ahol

$COV(R_A R_B)$ = A és B közötti kovariancia

ρ_{AB} = A és B közötti korrelációs koefficiens

σ_A és σ_B = az értékpapírok szórása

A (3) egyenlet (2) kifejezésbe helyettesítésével a következőt kapjuk:

$$\sigma_p = \sqrt{w^2\sigma_A^2 + (1-w)^2\sigma_B^2 + 2w(1-w)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B} \quad (4)$$

ahol

w = az A értékpapír aránya a portfolión belül

$1 - w$ = a B értékpapír részesedése a portfolió befektetésből

σ_A = az A befektetés megtérülésének szórása

σ_B = a B befektetés megtérülésének szórása

$COV(R_A R_B)$ = A és B értékpapír megtérülése közötti kovariancia

ρ_{AB} = az értékpapírok közötti korrelációs koefficiens

Másképpen kifejezve: ha σ_A az A, σ_B pedig a B értékpapír szórása, akkor a σ_p portfolió szórás az A és B befektetést egyaránt tartalmazza, függvénye a σ_A, σ_B és ρ_{AB} paraméternek. A specifikus függvénykapcsolatot a (2) és (4) egyenlet írja le. Abban az esetben, ha $\rho_{AB} = +1.0$, akkor a (4) egyenlet a következő lineáris kifejezésre egyszerűsödik:

$$\sigma_p = w\sigma_A + (1-w)\sigma_B$$

Ugyanakkor a (4) kifejezés másodfokú egyenlet, s a w bizonyos értékei σ_p minimumát eredményezik. Amennyiben a (4) egyenletet w szerint differenciáljuk, s a deriváltat nullával tesszük egyenlővé és megoldjuk *w*-re, akkor a következőt kapjuk:

$$w_A = \frac{\sigma_B(\sigma_B - \rho_{AB} \cdot \sigma_A)}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B} \tag{5}$$

Rendszerint az feltételezhetjük, hogy az egyenletben $0 \le w \le 1.0$ azaz a portfolió 100%-ának az eszközök bármelyikében lekötve kell lenni, illetve fedezetlen eladás egyik eszköz birtoklásában sem megengedhető.

Az (5) egyenlet két speciális változata külön is figyelmet érdemel. Az egyik szerint: ha *A* és *B* értékpapír megtérülése tökéletesen negatívan korrelál, azaz $\rho_{AB} = -1.0$, akkor ezt az (5) egyenletbe behelyettesítve az (5a) egyenletet kapjuk.

$$w = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B} \tag{5a}$$

(csak akkor áll fenn, ha $\rho_{AB} = -1.0$)

Az (5a) egyenlet illusztrálásához feltételezzük, hogy az *A* és *B* tökéletesen negatívan korrelál, azaz $\rho_{AB} = -1.0$, továbbá $\sigma_A = 2.0$, $\sigma_B = 4.0$. Az *A* és *B* értékpapírból álló portfolió σ_p kockázata teljességgel csak akkor eliminálható, azaz akkor lesz nullával egyenlő, ha a portfolió *A* értékpapírban megtestesülő hányada 67%.

$$w_A = \frac{4}{2+4} = \frac{4}{6} = 0.67 = 67\%$$

A másik speciális eset az, amikor A és B értékpapír megtérülése független egymástól ($\rho_{AB}=0$). Ezt behelyettesítve az (5) egyenletbe megkapjuk az (5b) kifejezést.

$$w=\frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2+\sigma_B^2} \tag{5b}$$

(csak akkor áll fenn ha $\rho_{AB}=0$)

Az (5b) egyenlet illusztrálásához feltételezzük, hogy $\rho_{AB}=0$, továbbá $\sigma_A=8$ és $\sigma_B=6$. A portfolió σ_p kockázata akkor és csak akkor minimális, ha a portfolió A értékpapírban megtestesülő hányada 36%, amit így számíthatunk:

$$w_A=\frac{36}{64+36}=\frac{36}{100}=0.36=36\%$$

5.4.2. A minimális varianciát biztosító eszközbe történő beruházás elégséges feltételei

A korábbiakban bemutatott összefüggésnek megfelelően a varianciát minimalizáló w befektetési súlyarány így írható fel:

$$w_i=\frac{\sigma_j^2-COV(R_iR_j)}{[\sigma_i^2-COV(R_iR_j)]+[\sigma_j^2-COV(R_iR_j)]}$$

Mint fentebb említettük, a reláció akkor áll fenn, ha w eredményül kapott értéke a $0\leq w\leq 1$ intervallumba esik. Ez azt jelenti, hogy pénzalapunkból egyik projektre sem fordíthatunk 100%-nál nagyobb hányadot. A továbbiakban meghatározzuk ρ_{ij}, σ_i és σ_j értékét $w=0$, $w=1$ szélső esetek mellett.

A második esetben a pénzalap egésze az egyik projektbe kerül befektetésre.

Mivel a projektek egyikének vagy másikának jelölése önkényes, azaz i az egyik, ezért feltételezzük a jelölések olyan megválasztását, hogy a j szórása legyen legalább olyan nagy, mint az i szórása, azaz $\sigma_i \leq \sigma_j$. Ha a pénzalapok egészét i projektbe ruháznánk be, akkor $w=1$ állna fenn. Annak megállapításához, hogy ez milyen feltételek között következik be, vegyük $w=1$ értéknél az utóbbi egyenletet és hozzuk egyszerűbb alakra!

$$\sigma_i^2 - COV(R_i R_j) + \sigma_j^2 + COV(R_i R_j) = \sigma_j^2 - COV(R_i R_j)$$
$$\sigma_i^2 = COV(R_i R_j)$$

A $\sigma_i^2 = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ helyettesítést alkalmazva nyilvánvaló, hogy a kapott reláció csak akkor áll fenn, ha a következő két feltétel közül valamelyik igaz:

$$\sigma_i = 0$$

vagy

$$\rho = \frac{\sigma_i}{\sigma_j}$$

Általában igaz, hogy ha $\rho \geq \sigma_i / \sigma_j$, akkor $w=1$ kell hogy fennálljon. Mutassuk be számpéldán keresztül az imént vizsgált összefüggést! Feltételezzük, hogy $\sigma_i^2 = 1$, $\sigma_j^2 = 9$, $\rho = 1/2$, így a szórások aránya $\sigma_i / \sigma_j = 1/2$ lesz. Mivel $\rho > 1/3$-nál, így $w = 1$ érvényesül, s az összes pénzalapot i projektbe kell beruházni a megtérülés varianciájának minimalizálásához. Ebben az esetben a kovariancia a következő sorozattal számítható:

$$\begin{aligned} COV(R_i R_j) &= \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)(1)(3) \\ &= 1.5 \end{aligned}$$

E helyzetre alkalmazva az általános formulát, a következő megoldást kapjuk:

$$\begin{aligned} w &= \frac{\sigma_j^2 - COV(R_i R_j)}{[\sigma_i^2 - COV(R_i R_j)] + [\sigma_j^2 - COV(R_i R_j)]} \\ &= \frac{9 - 1.5}{[1 - 1.5] + [9 - 1.5]} \\ &= \frac{7.5}{7} \\ &= 1.07 \end{aligned}$$

5.4.3. A ρ és a w kapcsolata

A σ_i és σ_j szórás sosem lehet negatív; s ha vagy σ_i vagy σ_j nullával egyenlő, akkor a ρ szükségképpen 0 kell legyen. Amennyiben $\sigma_i > 0$, $\sigma_j > 0$ és $\rho < 0$, akkor a beruházások egymással negatívan korrelálnak.

Ha a beruházási projektek negatívan korrelálnak, akkor a két projektnek mindig lesz olyan korrelációja, amelynek kisebb a varianciája, mint bármelyik beruházásnak önmagában. Ez utóbbi eredmények és a korábbiak a következő táblában összegezhetők, olyan feltevéssel, hogy $\sigma_j > 0$, $\sigma_i > 0$.

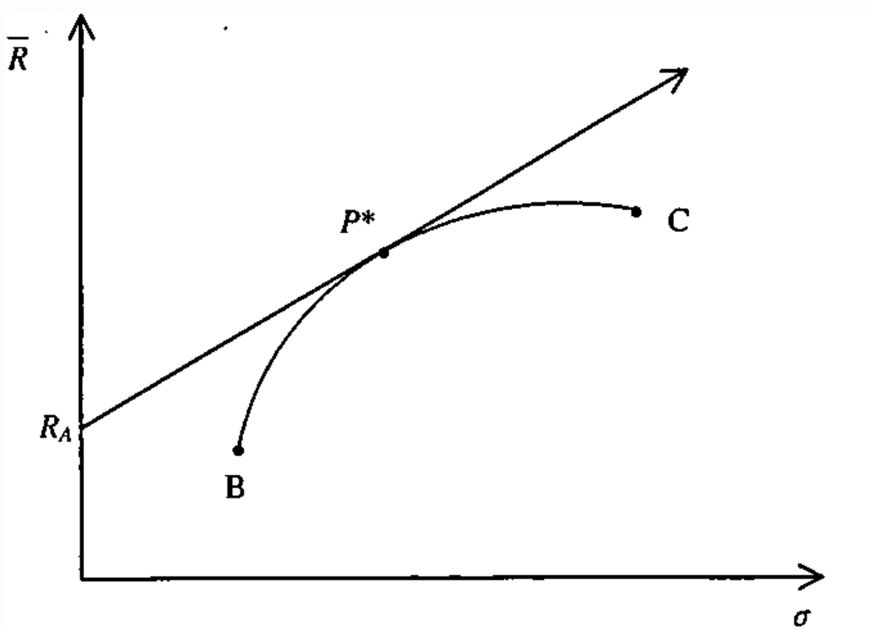
53. tábla A korreláció és a minimális kockázatot biztosító súlyarány lehetséges kapcsolatai

ρ **(korrelációs koefficiens)**	w **(*i* komponens aránya)**
$\rho = -1$	$w = \dfrac{\sigma_j}{\sigma_i + \sigma_j}$
$-1 < \rho < 0$	$\dfrac{\sigma_j}{\sigma_i + \sigma_j}\ w < \dfrac{\sigma_j^2}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}$
$\rho = 0$	$w = \dfrac{\sigma_j^2}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}$
$0 < \rho < \dfrac{\sigma_i}{\sigma_j}$	$\dfrac{\sigma_j^2}{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} < w < 1$
$\rho \geq \dfrac{\sigma_i}{\sigma_j}$	$w = 1$

5.5. A két értékpapírból álló portfolió optimális súlyarányainak meghatározása

A két értékpapírból álló P^* portfolió optimális súlyarányainak meghatározása olyan feltevés mellett történik, hogy a befektető R_A ráta mellett kölcsön adhat és kölcsön vehet. A vizsgált probléma az alábbi ábrán illusztrálható.

61. ábra *Optimális portfolió súlyarány*



Tudjuk azt, hogy a P^* ponton áthaladó egyenes a hatékony határvonalat a P^* pontban érinti. Ebből következően az egyenes és a BC görbe meredeksége a P^* pontban *megegyezik* egymással. Ennek alapján

$$\left.\frac{\partial \overline{R}_l}{\partial \sigma_l}\right|_{P^*} = \left.\frac{\partial \overline{R}_p}{\partial \sigma_p}\right|_{P^*} \tag{1}$$

ahol *I* index az A és *P** ponton átmenő egyenes kölcsönvételi vagy kölcsönadási portfolióira, a *P* index a *BC* görbe mentén elhelyezkedő portfoliókra utal.

Az egyenes meredekségét az $\overline{R}_l$ várható megtérülés σ_l szerinti deriváltjával adhatjuk meg:

$$\frac{\partial \overline{R}_l}{\partial \sigma_l} = \frac{\overline{R}_{p^*} - R_A}{\sigma_{p^*}} \tag{2}$$

Ezt követően kifejezésre van szükség $\partial \overline{R}_p / \partial \sigma_p$ művelet jelölésére. Jól ismertek az alábbi portfolió relációk:

$$\overline{R}_p = w\overline{R}_B + (1-w)\overline{R}_C \tag{3}$$

$$\sigma_p = \left[w^2\sigma_B^2 + (1-w)^2\sigma_C^2 + 2w(1-w)\rho_{BC}\sigma_B\sigma_C\right]^{1/2} \tag{4}$$

Alkalmazva a láncolatos szabályt:

$$\frac{\partial \overline{R}_p}{\partial \sigma_p} = \frac{\partial \overline{R}_p / \partial w}{\partial \sigma_p / \partial w} \tag{5}$$

A (3) és (4) egyenlet w szerinti deriváltja a következők szerint írható fel:

$$\frac{\partial \overline{R}_p}{\partial w} = \overline{R}_B - \overline{R}_C \tag{6}$$

$$\frac{\partial \overline{R}_p}{\partial w} = \frac{2w\sigma_B^2 - 2(1-w)\sigma_C^2 + (2-4w)\rho_{BC}\sigma_B\sigma_C}{2\sigma_p} \tag{7}$$

A (6) és (7) egyenletet behelyettesítve az (5) egyenletbe a következőket kapjuk:

$$\frac{\partial \overline{R}_p}{\partial \sigma_p} = \frac{\sigma_p\left(\overline{R}_B - \overline{R}_C\right)}{w\sigma_B^2 - (1-w) + \sigma_C^2 + (1-2w)\rho_{BC}\sigma_B\sigma_C} \tag{8}$$

A (8) egyenlet a BC görbe menti deriváltat fejezi ki. A P^* pontban ez a derivált a következők szerint fejezhető ki:

$$\left.\frac{\partial \overline{R}_p}{\partial \sigma_p}\right|_{P^*} = \frac{\sigma_{p^*}\left(\overline{R}_B - \overline{R}_C\right)}{w^*\sigma_B^2 - \left(1-w^*\right) + \sigma_C^2 + \left(1-2w^*\right)\rho_{BC}\sigma_B\sigma_C} \tag{9}$$

ahol w^* a B, az $(1\text{-}w^*)$ a C értékpapír aránya a P^* portfolión belül.

Most pedig tegyük egyenlővé egymással a (9) és (2) egyenlet deriváltját, ahogy azt az (1) egyenlet jelzi. A cél a w^* értékének meghatározása.

$$\frac{\overline{R}_{p^*} - R_A}{\sigma_{p^*}} = \frac{\sigma_{p^*}\left(\overline{R}_B - \overline{R}_C\right)}{w^*\sigma_B^2 - \left(1-w^*\right) + \sigma_C^2 + \left(1-2w^*\right)\rho_{BC}\sigma_B\sigma_C} \tag{10}$$

A (10) egyenlet érvényes bármely olyan két-értékpapíros problémára, ahol a befektetések tetszőlegesen B és C névvel jelöltek, az R_A pedig a kölcsönvételi és kölcsönadási ráta. A számszerű értékek az alábbiakban találhatók:

$$\overline{R}_A = 0.05 \qquad \sigma_B = 0.08$$
$$\overline{R}_B = 0.10 \qquad \sigma_C = 0.20$$
$$\overline{R}_C = 0.22 \qquad \rho_{BC} = 0.20$$

Felhasználva az adatokat, továbbá a (3) és (4) egyenleteket a következőt kapjuk:

$$\overline{R}_{p^*} = 0.22 - 0.12w^* \tag{11}$$

$$\sigma_{p^*} = \left[0.04\left(w^*\right)^2 - 0.0736w^* + 0.04\right]^{1/2} \tag{12}$$

Behelyettesítve a (11) és (12) egyenletet, továbbá a fenti értékeket a (10) egyenlet általános formulájába, majd rendezve az így kapott egyenletet, w^*-ra a következő kifejezést kapjuk:

$$0.0016\left(w^*\right)^2 - 0.0077w^* + 0.004512 = 0 \tag{13}$$

E másodfokú egyenlet w^*-ra két pozitív gyököt ad, melyek közül az egyik nagyobb 1-nél, s ezért nem releváns, a másik pedig $w^*=0.6825$ értéket ad.

5.6. A portfolió képzés elvei

Vizsgáljuk meg a diverzifikáció elvének érvényesülését! Feltételezzük, hogy egy reménybeli befektető *A*, *B* és *C* értékpapírt vesz alapul portfolió képzéséhez. A befektető saját forrásait azonos arányban osztja meg a három értékpapír között, az alábbi becsült adatok ismeretében.

54. tábla Képzeletbeli értékpapírok megtérülésének valószínűségi eloszlása

	R_i	p_i	p_iR_i	$R_i - \overline{R}_A$	$\left(R_i - \overline{R}_A\right)^2$	$p_i\left[\left(R_i - \overline{R}_A\right)^2\right]$
A értékpapír	0.04	0.25	0.010	-0.035	0.001225	0.00030625
	0.08	0.50	0.040	0.005	0.000025	0.00001250
	0.10	0.25	0.025	0.025	0.000625	0.00015625
			$\overline{R}_A = 0.075$			$\sigma_A^2 = 0.00047500$
						$\sigma_A = 0.02179 \approx 0.022$

54. tábla folytatása

B értékpapír

R_i	p_i	p_iR_i	$R_i - \overline{R}_B$	$(R_i - \overline{R}_B)^2$	$p_i[(R_i - \overline{R}_B)^2]$
0.09	0.33	0.03	-0.03	0.0009	0.0003
0.12	0.33	0.04	0.00	0.0000	0.0000
0.15	0.33	0.05	0.03	0.0009	0.0003
		$\overline{R}_B = 0.12$			$\sigma_B^2 = 0.0006$
					$\sigma_B = 0.024495 \approx 0.0245$

C értékpapír

R_i	p_i	p_iR_i	$R_i - \overline{R}_C$	$(R_i - \overline{R}_C)^2$	$p_i[(R_i - \overline{R}_C)^2]$
0.00	0.25	0.00	-0.14	0.0196	0.0049
0.08	0.25	0.02	-0.06	0.0036	0.0009
0.16	0.25	0.04	0.02	0.0004	0.0001
0.32	0.25	0.08	0.18	0.0324	0.0081
		$\overline{R}_C = 0.14$			$\sigma_C^2 = 0.0140$
					$\sigma_C = 0.118322 \approx 0.1183$

Mivel a portfoliót az *A*, *B* és *C* értékpapírból képezik a befektető pénzalapjának egyenlő arányú megosztásával, így a várható megtérülés, valamint a megtérülés szórása úgy számítható, ha becsüljük az értékpapírok páronként lehetséges korrelációs értékeit. Tehát a portfolió várható megtérülése szórásának számításához először szükséges becsülni adott értékpapír megtérülési eltérésének ama mértékét, amely egy másik értékpapírral egyidejű mozgásra vonatkozik. Tudjuk, hogy ha két értékpapír megtérülése tökéletesen pozitívan korrelál, akkor mozgásuk egyértelműen lineáris kapcsolatot ír le. Azaz, ha adott megtérülés egységnyi szórással van a várható érték fölött, akkor a másik megtérülésre ugyanez vonatkozik. Ha a megtérülési értékek tökéletesen negatívan korrelálnak, akkor az egyik növekedését pontosan ellensúlyozza a másik esése. Mint korábban láttuk, az is igazolható, hogy ha a két értékpapír közötti korreláció kisebb a tökéletesen pozitívnál, akkor ezek portfolióba foglalt kombinációjának súlyozott átlagú várható megtérülése lesz, a szórások súlyozott átlagánál kisebb kapcsolódó kockázattal.

A portfolió elméletben a korrelációs koefficiens magyarázza az értékpapírok megtérülése közötti kapcsolatot, aminek ρ_{ij} a jele. E mutató vagy a múltbeli teljesítmény alapján számítható, vagy szubjektív alapon becsülhető. Három értékpapírból álló portfolió esetében ugyanennyi koefficiensre van szükség, ρ_{AC}, ρ_{AB} és ρ_{BC} jelűekre. Két véletlen változó szorossága úgy is definiálható, hogy az *i* és *j* közötti $COV(R_iR_j)$ kovarianciát elosztjuk a szórások szorzatával. Szimbólummal kifejezve:

$$\frac{COV(R_i R_j)}{\sigma_i \sigma_j}$$

Alternatív kifejezéssel: két értékpapír megtérülése közötti kovariancia úgy definiálható, hogy a ρ_{ij} korrelációs koefficienst szorozzuk σ_i és σ_j szórással. Most végezzük el a szükséges számításokat!

Első lépésként kiszámítjuk a három értékpapírból álló portfolió várható értékét és szórását.

55. tábla *Portfolió várható értékének számítása*

Érték-papír	w_i	$E(R_i)$	$w_i\,E(R_i)$	σ_i
A	0.33	0.075	0.025	0.0220
B	0.33	0.120	0.040	0.0245
C	0.33	0.140	0.047	0.1183
			$E(R_p) = 0.112$	

Hasonló módon megadható a portfolió megtérülés szórása az alábbi formulával:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j COV\left(R_i R_j\right)} \qquad i \neq j$$

Második lépésként becsülni kell az értékpapír megtérülési értékek páronkénti korrelációs koefficiensét, s kiszámítani a szükséges kovarianciákat. Ami a korrelációs értékeket illeti, elegendő csupán a ρ_{AB}, ρ_{AC} és ρ_{BC} becslése, mivel definíció szerint $\rho_{AA} = \rho_{BB} = \rho_{CC} = 1$.

Feltételezzük, hogy $\rho_{AB} = 0.30, \rho_{AC} = -0.20$ és $\rho_{BC} = 0.00$. E becslésre és a korábbi adatokra támaszkodva kiszámíthatók az értékpapír kombinációk páronkénti kovarianciái. Ezeket mutatja a következő tábla.

56. tábla *Páronkénti kombinációk kovarianciája*

		$COV(R_iR_j) = \rho_{ij}\sigma_i, \sigma_j$			
		$COV(R_iR_j)$	ρ_{ij}	σ_i	σ_j
$COV(R_AR_A)$	=	0.0004840	1.00	0.0218	0.0218
$COV(R_AR_B)$	=	0.00016170	0.30	0.0218	0.0245
$COV(R_AR_C)$	=	0.00052052	-0.20	0.0218	0.1183
$COV(R_BR_B)$	=	0.0006000	1.00	0.0245	0.0245
$COV(R_BR_C)$	=	0.0000000	0.00	0.0245	0.1183
$COV(R_CR_C)$	=	0.0140000	1.00	0.1183	0.1183

A *harmadik lépés* az egész portfolió varianciájának számítása. Ez megtehető a legutóbbi egyenlet négyzetre emelésével és az összegzési index módosításával.

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=A}^{C} \sum_{j=A}^{C} w_i w_j COV(R_i R_j)$$

vagy

$$\sigma_p^2 = w_A w_A COV(R_A R_A) + 2w_A w_B COV(R_A R_B) + 2w_A w_C COV(R_A R_C) +$$
$$w_B w_B COV(R_B R_B) + 2w_B w_C COV(R_B R_C) + w_C w_C COV(R_C R_C)$$

Felhasználva az utóbbi egyenletet és behelyettesítve a várható érték tábla adatait, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= 0.00005378 + 0.00006669 + 0.00155556 + 0.00003593 - 0.00011567 \\ &\quad + 0.00000 \\ &= 0.001596\end{aligned}$$

Ezek alapján a portfolió várható megtérülése 0.112, szórása pedig 0.03995. Látható, hogy a diverzifikáció nyomán a teljes portfolió varianciája az egyedi szórások egyszerű átlagáról, a (0.022 + 0.0245 + 0.1183)/3 = 0.0549 értékről

$$\sigma_p = 0.03995$$

kombinált szórás szintre mérséklődött, ugyanolyan $E(R_p)=0.112$ várható portfolió megtérülés mellett. A diverzifikációs hatás 27%-os σ_p portfolió kockázat csökkenést reprezentál, a portfolióban foglalt komponens értékpapírok egyszerű szórás-átlagához viszonyítva.

5.6.1. A hatékony portfoliók locus-a[43]

Az előzőekben bemutattuk egy három értékpapírból álló (diverzifikált) portfolió felépítését, amelyben a befektető előzetesen azonos arányban osztotta meg a rendelkezésre álló pénzalapot. A továbbiakban bemutatjuk, hogy a portfolióban foglalt értékpapírok megfelelő szelekciója szintén

[43] A hatékony portfoliók Lagrange multiplikátorra alapozott elemzését Samuels, I.M.-Wilkes, F.M.: Management of Company Finance Van Nostraud Reinhold 1986. c. müve alapján mutatjuk be.

meghatározza az egyes eszközökbe invesztált pénzalap hányadot. Ezt úgy érjük el, hogy felépítjük a *hatékony portfoliók locusát*, ami olyan határfelületként fogható fel, amely mentén a befektető két értékpapír legnagyobb várható megtérülésű és legkisebb varianciájú kombinációit találja.[44]

Feltételezzük a következő adatokat az 1 és 2 jelű értékpapírra.

Értékpapír	**Várható megtérülés** $E(R_i)$	**Variancia** σ_i^2
1	0.08	0.03
2	0.12	0.04

A két értékpapírból álló portfolió várható értéke és varianciája a következők szerint írható fel.

Portfolió várható megtérülés

$$E(R_p) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2)$$

ahol:

$$\sum_{i=1}^{2} w_i = 1$$

[44] Mivel grafikusan kell felírnunk a hatékony portfoliók locusát, elemzésünket kezdetben a két értékpapíros esetre korlátozzuk.

Portfolió variancia

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= \sigma\left[w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2)\right] \\ &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1 w_2 COV(R_1 R_2)\end{aligned}$$

A két értékpapírból álló portfolió varianciájára két megállapítás tehető.

- *Először*: a portfolió varianciája azonos a következővel: az egyedi értékpapír-varianciák száma, plusz az értékpapírok közötti kovarianciák számának kétszerese.
- *Másodszor*: a kovariancia tag lehet negatív (ama értékpapíroknál, amelyek megtérülése ellentétes irányban mozog), vagy pozitív (ahol a megtérülés azonos irányban mozog).

Így adott portfolión belül a negatív kovarianciájú értékpapír kombináció a teljes varianciát olyan értékre mérsékli, amely kisebb az egyedi varianciák összegénél. Továbbá, ha van két értékpapírunk $\sigma_i^2 = \sigma_j^2$ azonos megtérülési varianciával úgy, hogy $COV(R_i R_j) < \sigma_i^2 = \sigma_j^2$ reláció érvényesül, akkor ugyanúgy diverzifikációs hatást érünk el a pénzáramok két eszköz közötti egyenlő arányú megosztásával.

Most térjünk vissza az eredeti számpéldához, feltételezve, hogy a két értékpapír közötti kovariancia –0.02. Behelyettesítve a legutóbbi egyenletbe a példában adott értékeket, a következőt kapjuk:

$$\sigma_p = w_1^2(0.03)^2 + w_2^2(0.04)^2 + 2w_1 w_2(-0.02)$$

A portfolió varianciára vonatkozó végső érték addig nem kapható meg, amíg nem történik meg a pénzalapok – értékpapírok közötti – egyenlő arányú szétosztása. Ezért alkalmazzuk a Lagrange-multiplikátor eljárást a variancia minimalizálására, bizonyos mellékfeltétel érvényesülése mellett. Ez utóbbit a

$$\sum_{i=1}^{2} w_i = 1$$

egyenlet szolgáltatja, amely azt mutatja, hogy az arányos allokáció részarányainak összege 1 kell legyen. Ez $w_1 + w_2 = 1$ alakban is felírható, amely átalakítva: $1 - w_1 - w_2 = 0$.

Most tehát van célfüggvényünk, a következő alakban:

$$w_1^2(0.03) + w_2^2(0.04) + 2w_1w_2(-0.02)$$

amelyet az $1 - w_1 - w_2 = 0$ korlátozó feltételnek megfelelően minimalizálni kell.

Annak feltételezésével, hogy mindkét függvénynek van folytonos első és második parciális deriváltja, formálhatunk egy L új mesterséges függvényt, a következők szerint:

$$L = w_1^2(0.03) + w_2^2(0.04) + 2(w_1w_2)(-0.02) - \lambda(1 - w_1 - w_2)$$

ahol λ egy változó, amelynek értékét nem szükséges specifikálni, s amit Lagrange multiplikátorként ismerünk.

Specifikálva az új mesterséges függvényt, differenciálnunk kell w_1, w_2 és λ változó szerint, s az első parciális deriváltakat 0-val kell egyenlővé tenni. Ezt láthatjuk az alábbiakban.

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = 2w_1(0.03) + 2w_2(-0.02) + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = 2w_2(0.04) + 2w_1(-0.02) + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - w_1 - w_2 = 0$$

A három egyenlet megoldásával w_1=0.533 és w_2=0.467 érték adódik. A kapott számértékek arra utalnak, hogy a két értékpapír adott paraméterei mellett a pénzalapok 53.3%-át az 1 jelű, 46.7%-át pedig a 2 jelű értékpapírba kell befektetni.

Visszatérve a portfolió variancia egyenlethez, a teljes portfolió kockázatot az alábbiak szerint határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= (0.533)^2(0.03) + (0.467)^2(0.04) + 2(0.533)(0.467)(-0.02)\\ &= 0.00852267 + 0.00872356 - 0.00995604\\ &= 0.00729019\end{aligned}$$

Eszerint a portfolió varianciája kisebb 0.01 értéknél. Mit mondhatunk a varianciának megfelelő megtérülésről? Ezt a várható érték egyenlettel számíthatjuk:

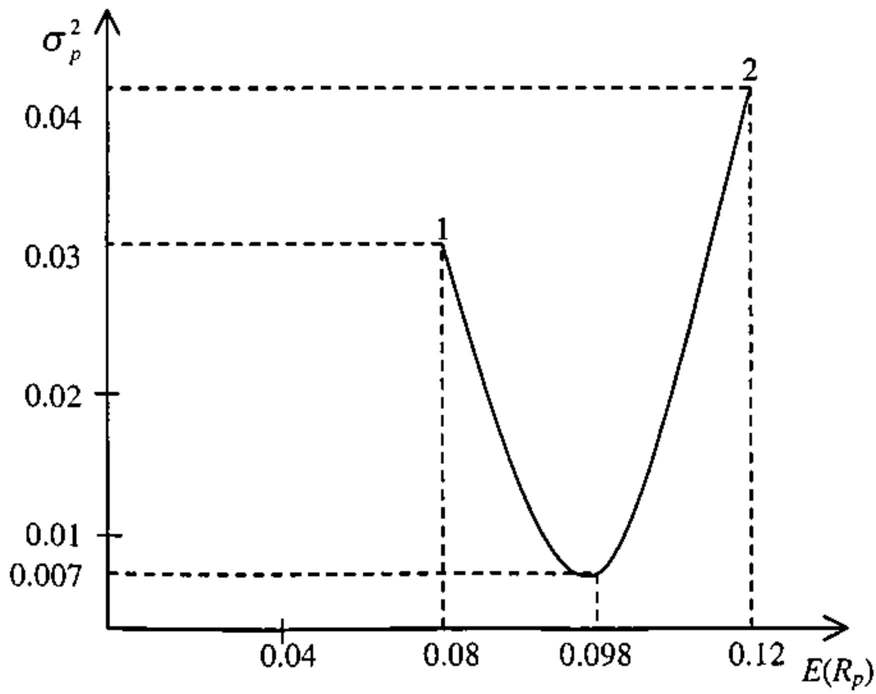
$$\begin{aligned}E(R_p) &= w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2)\\ &= (0.533)(0.08) + (0.467)(0.12) = 0.04264 + 0.05604\\ &= 0.09868\end{aligned}$$

Ha a kapott eredményeket általánosítjuk, akkor azok a következő két kérdésre adtak választ. Amennyiben a befektető az adott karakterisztikákkal rendelkező értékpapírokat akarja kombinálni úgy, hogy 9.868%-os megtérülést érjen el, a pénzalapokat a jelzett módon kell elosztani. A másik kérdés az, hogy mekkora lenne a 9.868%-os megtérüléshez tartozó minimális portfolió variancia? Az első kérdésre az a válasz, hogy a befektető pénzalapjának 53.3%-át az 1 jelű, 46.7%-át pedig a 2 jelű értékpapírba kell befektesse. A második kérdésre adott válasz: az $E(R_p)$ = 0.09868 megtérüléshez tartozó minimális variancia $\sigma_p^2 = 0.00729019$.

Feltételezzük, hogy a befektető $E(R_p) > 0.09868$ várható megtérülés elérésére törekszik. Mit kellene ezért tennie? A válasz egyszerű: pénzalapjaiból többet kellene befektetnie a 2 jelű értékpapírba, a $w_2 > 0.467$. Nyilvánvaló, hogy a befektető változtathatja a pénzalapok allokációs arányait különböző várható megtérülési és variancia értékek nyerése érdekében. Ezt mutatja a 62. ábra.

Vegyük figyelembe, hogy a korábban választott portfolió, a $w_1 = 0.533$ és $w_2 = 0.467$ arányokkal hatékonyabb a $w_1 = 1.00$ és $w_2 = 0$ arányokkal rendelkező portfoliónál, mivel az előbbi egyszerre képes magasabb várható megtérülést $[E(R_p) = 0.09868 > 0.08]$ és kisebb varianciát biztosítani $(\sigma_p^2 = 0.00729019 < 0.03)$. Amint változtatjuk az allokációs arányokat a 2 jelű értékpapír javára, akkor a görbe $E(R_p) = 0.09868$ és $E(R_p) = 0.12$ pontja által meghatározott szegmensen mozgunk felfelé. A görbe e szakaszát a hatékony portfolió locusának nevezik, az ott található két értékpapír

62. ábra *A pénzalapok allokációs arányainak változása*

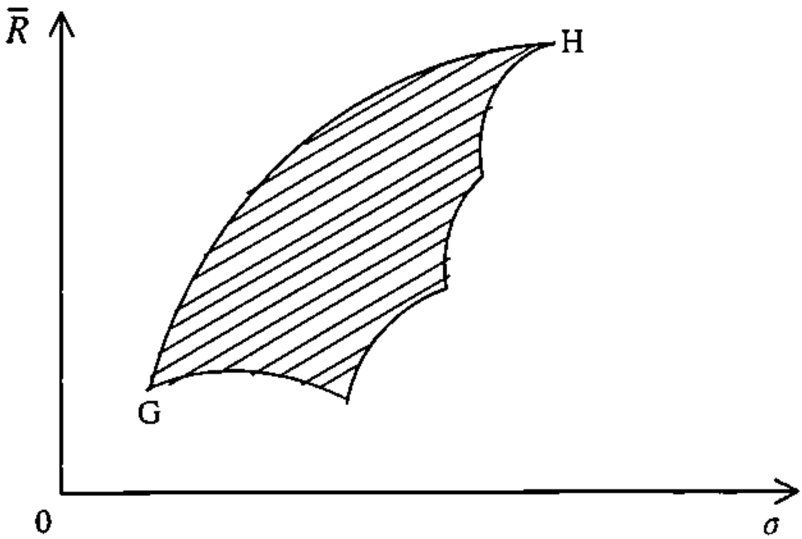


legnagyobb várható érték és legkisebb variancia kombinációból összeállítva. Mivel az e szegmensen található összes kombináció hatékony, így a befektető lefelé mozog egészen ama portfolióig, amely kizárólag 2 jelű értékpapírt tartalmaz, változtatva a kockázat és megtérülés addíciókat. A szelekció végső pontja függ a befektető preferencia függvényétől.

5.6.2. A hatékony határvonal származtatása

Adott eszköz megtérülési ígérete a várható megtérülés-szórás mezőben definiálható a 63. ábra szerint.

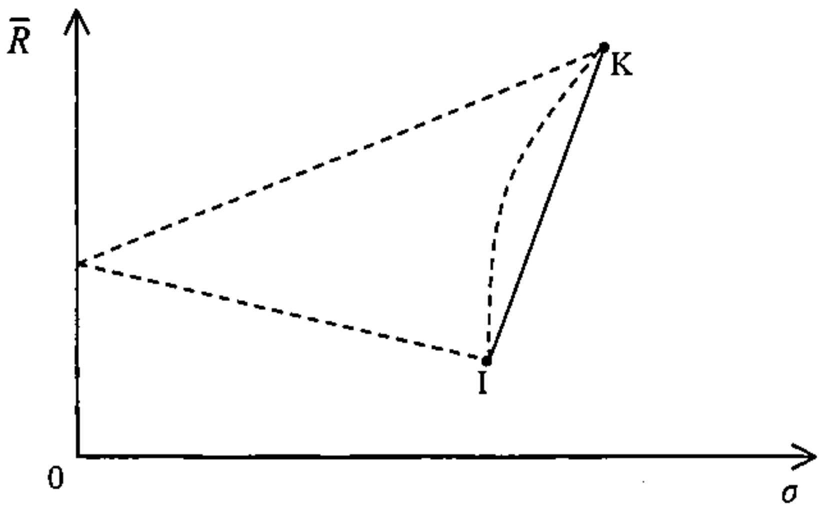
63. ábra *A hatékony határvonal megközelítése*



Az ábra a befektetők várakozásait mutatja a piacon forgalmazott összes eszköz várható megtérülése és szórása alapján. Az ábra sávozott része az összes forgalmazott kockázatos eszközt mutatja. Az ábrán a hatékony határvonal a *GH* szakasz, amely a következő portfoliókat foglalja magában: ha nincs egy másik portfolió magasabb várható megtérüléssel a szórás adott szintjén; másrészt ha nincs egy másik portfolió alacsonyabb szórással, a várható megtérülés adott szintjén. Annak igazolására, hogy a *GH* határvonal konkáv, tételezzünk fel bármilyen *I* és *K* portfoliót a 64. ábrán.

Kimutatjuk, *hogy bármely I és K portfolióból álló súlyozott kombináció konkáv* GH alakot vesz fel. Azt is megmutatjuk, hogy ez *GH* konkávitását is magában hordozza.

64. ábra *A hatékony határvonal konkávitása*



Ha a befektető összes pénzalapját *I* eszközbe ruházták be, akkor a befektetés várható megtérülése $\overline{R}_I$, szórása pedig σ_I az ábra *I* pontjában. Hasonlóképpen, ha a teljes pénzalapot *K* eszközbe fektetik, akkor a várható megtérülés $\overline{R}_K$, a szórás σ_K lesz a *K* pontban. Mekkora lesz azonban az $\overline{R}$ és a σ, ha az *I* és a *K* valamilyen kombinációját vásároljuk meg? Tételezzük fel, hogy a befektető pénzalapja *w* hányadát *I*, (1–*w*) részét pedig *K* eszközbe invesztálja, s ahol $0 \leq w \leq 1$. Az eredményül kapott *E* portfolió megtérülési rátája $\overline{R}_E$, ahol a portfolió $\overline{R}$ és σ értéke a következők szerint adható meg:

$$\overline{R}_I = w\overline{R}_I + (1-w)\overline{R}_K \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \sigma_L &= \left[w^2\sigma_I^2 + (1-w)^2\sigma_K^2 + 2w(1-x)COV\left(\overline{R}_I\,\overline{R}_K\right)\right]^{1/2} \\ &= \left[w^2\sigma_I^2 + (1-w)^2\sigma_K^2 + 2w(1-w)\rho_{IK}\sigma_I\sigma_K\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{2}$$

ahol ρ_{IK} az $\overline{R}_I$ és $\overline{R}_K$ közötti korreláció koefficiense.

Ehelyütt szükséges bemutatni I és K összes lehetséges kombinációját. A σ_I és σ_K az I és K pontban definiált érték. Mivel a (2) egyenlet első két variancia tagja szükségképpen pozitív, így a σ_L lehetséges maximális értéke w bármely értéke mellett akkor kapható meg, ha a két portfolió megtérülése tökéletesen pozitívan korrelál, azaz $\rho_{IK} = 1.0$. Ha ez fennáll, akkor

$$\sigma_L = \sigma_K + w(\sigma_I - \sigma_K) \tag{3}$$

Az (1) és (3) egyenlet felhasználható ama mód meghatározásához, ahogyan az E portfolió várható megtérülési rátája a portfolió szórásának megfelelően változik. A differenciálás láncolatos szabálya szerint felírható a következő reláció:

$$\frac{\partial \overline{R}_L}{\partial \sigma_L} = \frac{\partial \overline{R}_L / \partial w}{\partial \sigma_L / \partial w} \tag{4}$$

az (1) egyenlet deriválásával:

$$\frac{\partial \overline{R}_L}{\partial w} = \overline{R}_I - \overline{R}_K \tag{5}$$

továbbá a (3) egyenlet deriválásával:

$$\frac{\partial \sigma_L}{\partial w} = \sigma_I - \sigma_K \tag{6}$$

A w szerinti deriváltakat behelyettesítve a (4) egyenletbe, a következőket kapjuk:

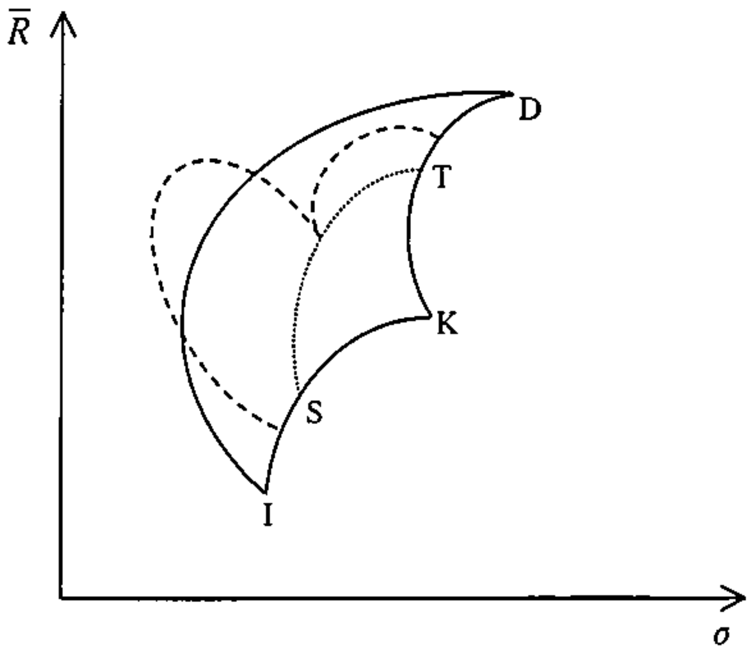
$$\frac{\partial \overline{R}_L}{\partial \sigma_L} = \frac{\overline{R}_I - \overline{R}_K}{\sigma_I - \sigma_K} \tag{7}$$

Az *I* és *K* portfolió várható megtérülése és szórása a valószínűségi eloszlás által meghatározott érték, amely független *w* értékétől. Az említett paraméterek mellett az $\overline{R}_L$ várható megtérülés σ_L kockázat szerinti deriváltja konstans akkor, ha ρ_{IK}=1.0. A *w* különböző értékei által meghatározott $\overline{R}_L$ és σ_L kombinációk eszerint rajta kell hogy legyenek a 64. ábra *I* és *K* pontot összekötő egyenesén. Tudjuk, hogy ρ_{IK}=1 szolgáltatja σ_L maximális értékét *w* bármely adott értéke mellett és ugyanígy az $\overline{R}_L$ bármely adott értéke mellett az (1) egyenletben. Ez azt is magában foglalja, hogy ha $\rho_{IK} < 1$, akkor a σ_L értéknek szükségképpen az *I* és *K* pontot összekötő egyenestől balra kell elhelyezkedni. Ebből következően, ha $\rho_{IK} < 1$, akkor az $(\overline{R}_L, \sigma_L)$ pontkombinációk egész sorozata szükségszerűen az *IK* egyenestől balra esik. Könnyen kimutatható, hogy az ilyen vonal a *GH* hatékony határvonal konkáv alakját adja, s ez a fenti ábrán az *I* és *K* közötti pontokból álló vonallal illusztrálható. A ρ_{IK} =–1 eset kivételt képez, s ezt az ábrán az *IK* szaggatott vonalak mutatják.

Most vegyünk fel egy harmadik (*D*) portfoliót a 65. ábra szerint!

Az *I* és *K*, a *K* és *D*, valamint az *I* és *D* kombinációja folytonos vonallal reprezentálható. Ugyanakkor *I* és *K* bármilyen súlyozott kombinációja (*S* portfolió) kombinálható K és I együttesével (*T* portfolió), s mindez a lehetséges portfoliók olyan sorozatát formálja, amely a szaggatott vonal mentén helyezkedik el.

65. ábra *Portfoliók hatékony határvonala*



T és *S* kombinációi egyesíthetők olyan más portfoliókkal, amelyek *I* és *K* vagy *K* és *D* együtteséből állnak, s a portfolió lehetőségek újabb változatait alakítják ki. Mindebből következik, hogy az *I*, *K* és *D* által alkotott portfolió lehetőségek a *GH* hatékony határvonal konkáv alakú függvényét adják. Az elmondottakból az is következik, hogy bármely két vagy több olyan portfolió, amely kielégíti a fentebb említett hatékony határvonal feltételt, portfolió kombináció lehetőség konkáv formáját adja. Ez az oka annak, hogy a *GH* görbe az első ábrán konkáv alakú.

Az elemzés még egy fontos következtetést is megenged. Amennyiben az egyén ugyanolyan R_A ráta mellett vehet és adhat kölcsön, akkor kimutathatóan létezik egy bizonyos P^* portfolió, amely a befektető számára az alternatívák sorozatának leghatékonyabb változatát adja. Az $\overline{R}$ várható megtérülés és σ_l szórás a kölcsönvétel és kölcsönadás kombinációira R_A és P^* értéke mellett, így adható meg:

$$\overline{R}_l = w\overline{R}_{p^*} + (1-w)R_A \tag{8}$$

$$\sigma_l = w\sigma_{p^*} \tag{9}$$

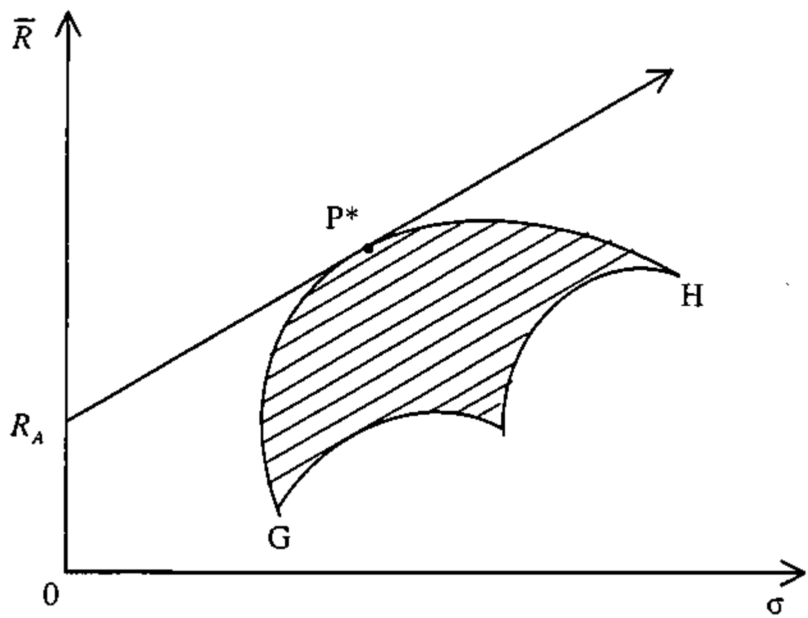
ahol W az egyén eredeti pénzalapjának P^* portfolióba befektetett hányada. Az $\overline{R}$ várható megtérülés és σ_l szórás közötti reláció a fentiek szerint kapott deriváltak segítségével mutatható be.

$$\frac{\partial \overline{R}_l}{\partial \sigma_l} = \frac{\partial \overline{R}_l / \partial w}{\partial \sigma_l / \partial w} = \frac{R_{p^*} - R_A}{\sigma_{p^*}} \tag{10}$$

Az R_{p^*}, R_A és σ_{p^*} érték nem függvénye a w részaránynak. Emiatt a derivált konstans lesz, továbbá a w különböző értékei mellett számított $\overline{R}_l$ és σ_l kombinációk az A és P^* ponton keresztül fektetett egyenes mentén helyezkednek el. Ezt mutatja a 66. ábra.

A befektetési kombinációk hatékony sorozata így az ábrán látható egyenes mentén helyezkedik el, s ez uralja a határvonal kritériumoknak engedelmeskedő GH görbét. Meg kell jegyeznünk, hogy a (10) egyenlet az A és P^* ponton áthaladó egyenes meredeksége. Nyilvánvaló, hogy az egyenes érinti a GH görbét, emiatt a görbe meredeksége a P^* pontnál szintén a (10) egyenlettel adható meg.

66. ábra *Optimális portfolió az érintési pontban*

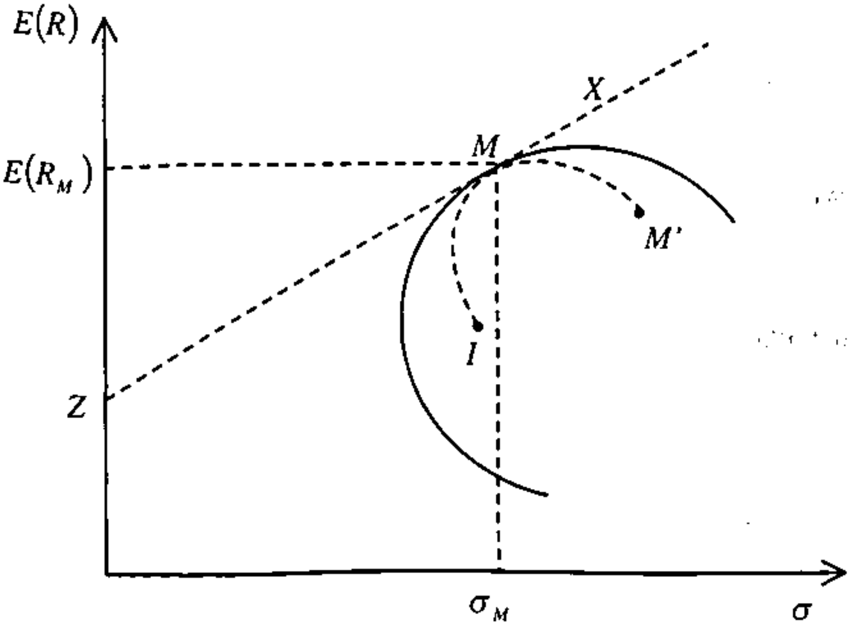


5.6.3. A hatékony határvonal tulajdonságai[45]

Adott részvényállományt alapul véve, a részvények béta tényezői és a várható megtérülés közötti keresztkapcsolatok mindaddig lineárisak és determinisztikusak, amíg a bétákat a részvényállomány minimális varianciájú sorozatának valamely portfoliójára utalással számítjuk. Az alábbi ábrán a minimális varianciájú sorozatot olyan feltevéssel rajzoljuk fel, hogy megengedhető a részvények fedezetlen eladása.

[45] E pont Haugen, R.A.: Modern Investment Theory. Prentice Hall 1997 c. munkáján alapul.

67. ábra *Az I részvény és az M portfolió kombinációs vonala*



Önkényesen kiválasztottunk az M pontban egy portfoliót a minimális varianciájú határvonalon; ugyancsak kijelöltünk egy I részvényt az állomány nagy tömegéből. Mivel M rajta van a minimális varianciájú határvonalon, s a fedezetlen eladás is megengedett, így az M és I közötti kombinációs vonal feltétlenül kell hogy érintse a határvonalat az M pontban. Az I részvény M portfolión belüli súlyaránya egyaránt lehet pozitív és negatív. Bizonyítási megfontolásból olyan portfoliókat keresünk, amelyek az I részvényt az M portfolióval különböző arányban kombinálják. Mindenesetre az I és M pozíciója már nem negatív. Minthogy az M portfoliót szándékunkban áll megkülönböztetni az I részvénytől, így újra definiálni kell az I portfolión belüli súlyát, az M portfolió és az I részvény alkotta kombináción belül.

A súlyarányt forrásaink *I* részvényben lekötött hányadaként definiáljuk azon túl, hogy az *I*-ben lekötött rész benne foglaltatik az *M* portfolióban. Ilyen értelemben, ha mi a kombinációs vonal *M* pontján vagyunk, akkor a w_I=0.00, ha viszont az *M'* pontban vagyunk, akkor a portfolió súly negatív. Az *M* és *I* közötti vonalon elhelyezkedő pontokban a portfolió súlyok pozitívak.

Amennyiben adott a portfolió súlyok definíciója, akkor az *M* és *I* kombinációját alkotó portfolió várható megtérülése így írható fel:

$$E(R_p) = w_I E(R_I) + (1 - w_I) E(R_M)$$

A portfolió szórása pedig a következők szerint adható meg:

$$\sigma_p = \left[w_I^2 \sigma_I^2 + (1 - w_I)^2 \sigma_M^2 + 2COV(R_I R_M) w_I (1 - w_I)\right]^{1/2}$$

Tudván azt, hogy $(1 - w_I)^2 = 1 + w_I^2 - 2w_I$ így az előző kifejezés átírható:

$$\sigma_p = \left[w_I^2 \sigma_I^2 + \sigma^2(R_M) + w_I^2 \sigma_M^2 - 2w_I \sigma_M^2 + \right.$$
$$\left. + 2COV(R_I R_M) w_I - 2COV(R_I R_M) w_I^2\right]^{1/2}$$

Tudjuk, hogy az *I* és *M'* közötti kombinációs vonal a burkoló görbét az *M* pontban érinti, mivel ha nem érintené, akkor metszené azt, ez viszont a burkoló vonalra adott definíció megsértését jelentené. A görbe meredeksége az *M* pontban a *ZM* egyenes meredekségével adható meg. Így az *IM'* kombinációs vonal és a *ZM* egyenes meredeksége az *M* pontban megegyezik. Ezt az egyenlőséget használjuk fel a hatékony határvonal másik tulajdonságának igazolásához.

Az első lépésben kifejezést kell kapnunk az *IM'* kombinációs vonal *M* pontbeli meredekségére, azután ezt a kifejezést egyenlővé tesszük a *ZM* meredekségével. Amint haladunk a kombinációs vonal mentén, akkor mind a σ_p, mind az $E(R_p)$ változik, válaszolva a w_I változására. Így először kifejezést származtatunk annak bemutatására, hogy a portfolió súlyok változására hogyan reagál a szórás és a várható megtérülés változása. Először vegyük σ_p w_I szerinti deriváltját.[46] Az első tag n = ½, a második tag a függvény $n-1$-ed fokú hatványa, azaz

$$\left(\sigma_p^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sigma_p}$$

a harmadik tag pedig a σ_p^2 függvény deriváltja.

$$\frac{\partial\sigma_p^2}{\partial w_I} = 2w_I\sigma_I^2 + 2w_I\sigma_M^2 - 2\sigma_M^2 + 2COV(R_I R_M) - 4COV(R_I R_M)w_I$$

Mi a derivált értékét az *M* pontban keressük. Ebben a pontban $\sigma_p^2 = \sigma_M^2$ és w_I=0.00, emiatt a függvény deriváltja így egyszerűsödik:

$$\frac{\partial\sigma_p^2}{\partial w_I} = \frac{-1}{\sigma_M}\cdot\left[\sigma_M^2 - COV(R_I R_M)\right]$$

Tudjuk azt, hogy $\beta_I = COV(R_I R_M)/\sigma_M^2$, amiből következik, hogy $COV(R_I R_M) = \beta_I\sigma_M^2$. Behelyettesítve az utóbbi értéket a kovariancia helyére és egyszerűsítve a következőt kapjuk:

[46] Az n-ed fokú függvény deriváltja három tag szorzata. Össze kell szorozni az n értéket, a függvény $n-1$-ed fokú hatványát [jelen esetben a σ_p^2 függvényét] és a függvény deriváltját.

$$\frac{\partial\sigma_p}{\partial w_I} = -[\sigma_M - \sigma_M \cdot \beta_I]$$

Most vesszük a portfolió várható megtérülésének w_I szerinti deriváltját. Az $E(R_M)$ taggal végigszorozva, a portfolió várható megtérülésére a következő írható fel:

$$E(R_p) = w_I E(R_I) + E(R_M) - w_I E(R_M)$$

Eszerint a w_I szerinti deriválás eredménye az alábbi:

$$\frac{\partial E(R_p)}{\partial\sigma_p} = \frac{\partial E(R_p)/\partial w_I}{\partial\sigma_p/\partial w_I} = \frac{E(R_M) - E(R_I)}{\sigma_p - \sigma_p\beta_I}$$

Visszautalva a 67. ábrára, a *ZM* egyenest a minimális varianciájú határvonal *M* pontjához húztuk érintőként. Az egyenes meredeksége a következő alakban írható fel:

$$\frac{E(R_M) - Z}{\sigma(R_M)}$$

Emlékeztetünk arra, hogy az érintési pontban a *ZM* meredeksége megegyezik az $E(R_p)$ várható megtérülés σ_p kockázat szerinti deriváltjával. Így a következő reláció írható fel:

$$\frac{\partial E(R_p)}{\partial\sigma_p} = \frac{E(R_M) - E(R_I)}{\sigma_M - \beta_I\sigma_M} = \frac{E(R_M) - Z}{\sigma_M}$$

majd átszorzással az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$\frac{\sigma_M - \beta_I \sigma_M}{\sigma_M} = \frac{E(R_M) - E(R_I)}{E(R_M) - Z}$$

Kiemelve σ_M tagot az egyenlet bal oldalán, továbbá egyszerűsítve, majd mindkét oldalt megszorozva $E(R_M) - Z$ kifejezéssel, a következőt kapjuk:

$$[E(R_M) - Z](1 - \beta_I) = E(R_M) - E(R_I)$$

Az egyenletet megoldva $E(R_I)$ tagra, megkapjuk a hatékony határvonal másik tulajdonságát.

$$E(R_I) = Z + [E(R_M) - Z]\beta_I$$

Így, ha piaci indexet használunk portfolióként a minimális varianciájú határvonalon, akkor a portfoliót alkotó kombináció bármely elemének béta tényezője determinisztikusan kapcsolódik saját várható megtérüléséhez, s a reláció lineárisnak tekinthető. Ha β_I értékre megoldjuk a fenti kifejezést, akkor látjuk, hogy bármely részvény bétája a következők szerint írható fel:

$$\beta_I = \frac{E(R_I) - Z}{E(R_M) - Z}$$

5.6.4. A kombinációs vonal

A kombinációs vonal olyan görbe, amely az $E(R)$ várható megtérülést a $\sigma(R)$ kockázat függvényében mutatja. A görbe vonal minden egyes pontja a két részvényből álló portfolió várható megtérülési értékét mutatja, adott portfolió súlyok mellett. Eszerint a kombinációs vonal megmutatja, hogyan változik a kételemű portfolió várható megtérülése és kockázata, ha változtatjuk a két alkotóelem súlyát. A kombinációs vonal lényegében a két részvényből álló portfolióra vonatkozó $E(R)$ és $\sigma(R)$ egyenlet ábrázolása. Felismerve azt, hogy a kételemű portfolióban $w_B=(1\text{-}w_A)$, a várható megtérülésre és a szórásra vonatkozó egyenlet így írható fel:

$$E(R_p)= w_A \cdot E(R_A)+(1-w_A)E(R_B)$$

és

$$\sigma_p = \left[w_A^2\sigma_A^2 + (1-w_A)^2\sigma_B^2 + 2w_A(1-w_A)COV(R_A R_B)\right]^{1/2}$$

Ismerve továbbá, hogy

$$COV(R_A R_B)= \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$$

Ennek alapján a szórás egyenlete újra felírható:

$$\sigma_p = \left\lfloor w_A^2\sigma_A^2 + (1-w_A)\sigma_B^2 + 2w_A(1-w_A)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B \right\rfloor^{1/2}$$

A kombinációs vonal koncepciójának illusztrálására vegyük alapul a következő két részvényt a hozzájuk tartozó jellemzőkkel.

	Részvény	
	A	*B*
$E(R)$	0.10	0.04
$\sigma(R)$	0.05	0.10

Ahhoz, hogy megszerkeszthessük a két részvényre vonatkozó kombinációs vonalat, feltevést kell megfogalmaznunk a köztük levő korreláció mértékére. Feltételezzük, hogy a két részvény közötti korrelációs koefficiens értéke zéró. A várható megtérülés és a szórás egyenletébe behelyettesítve a tábla értékeit, a következőket kapjuk:

$$E(R_p) = w_A \cdot 0.10 + (1 - w_A) \cdot 0.04$$

$$\sigma_p = \left[w_A^2 \cdot 0.05^2 + (1 - w_A)^2 \cdot 0.10^2 \right]^{1/2}$$

Láthatjuk, hogy a kovariancia-tag eltűnt a szórás formulájából, mivel a korrelációt zérónak feltételezzük.

Abból indulunk ki, hogy 1 000 dollárral rendelkezünk befektetési célra, a *B* részvényből 500 dollár értékűt fedezetlen eladással értékesítünk, s a bevételt hozzátesszük az *A* részvényben megtestesülő tőkéhez, s így 1 500 dollárra emelkedik az *A* befektetése; ennek következtében az *A* portfolió súlya 1.5 lesz. Behelyettesítve ezt az értéket a vonatkozó formulába, a várható megtérülési rátára és a szórásra a következő eredményt kapjuk.

$$E(R_p) = 1.50 \cdot 0.10 - 0.50 \cdot 0.04 = 0.13$$

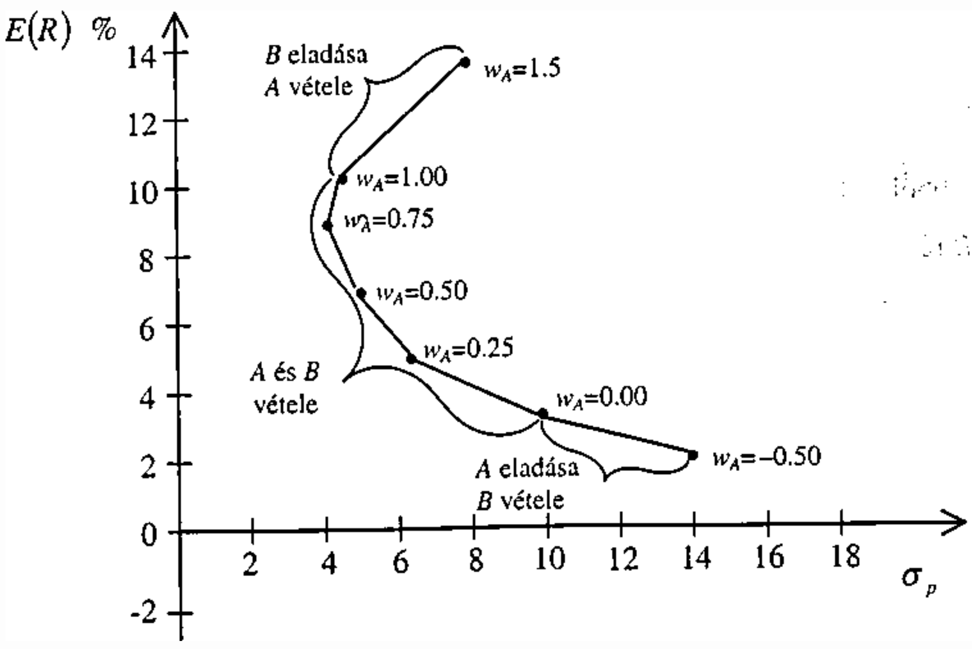
$$\sigma_p = \left[1.50^2 \cdot 0.05^2 + (-0.05)^2 \cdot 0.10^2\right]^{1/2} = 0.09$$

Ha e számítást elvégezzük w_A többi értékére vonatkozóan is, akkor a következő adatsorokat kapjuk:

w_A	$E(R_p)$	$\sigma(r_p)$
1.50	0.130	0.090
0.75	0.085	0.045
0.50	0.070	0.056
0.25	0.055	0.076
-0.50	0.010	0.152

A tábla adatait a következő koordináta rendszerben ábrázoljuk.

68. ábra *A kombinációs vonal*



Ha w_A több értékét ábrázolnánk, akkor a 68. ábrán látható görbealakot kapnánk. A grafikont két részvény kombinációs vonalának nevezzük. Ez a görbe azt mutatja, hogy mi történik a kételemű portfolió kockázatával és várható megtérülésével, ha a portfolió súlyok az egyik értékről a másikra váltanak. Az ábrán a két részvényt az *A* és *B* pont reprezentálja, s e pontokban a w_A vagy 1.00 (*A* pont), vagy 0.00 (*B* pont). A görbe azon pontjai, amelyek az *A* ponton túl helyezkednek el, ezek a *B* részvény fedezetlen eladását jelentik, a kapott bevételt az A részvénybe invesztálva. A görbe *A* és *B* közötti pontjai mindkét részvényre vonatkozóan pozitív pozíciót jelentenek. A görbe alján a *B* ponton túl, az *A* fedezetlen értékesítése található, a bevételt a *B* részvénybe befektetve. Bár e pontok nem vonzó portfoliókat reprezentálnak abban az értelemben, hogy a kockázat magas, a várható megtérülés viszont alacsony. Mindazonáltal ezek létező kombinációk, s a két részvény feltételezett pozícióját adják. Azt is be kell látni, hogy a görbe mindkét irányba meghosszabbítható: minél nagyobb volumenű a *B* részvényt érintő fedezetlen eladás, annál messzebb haladunk a görbén felfelé, s minél nagyobb az *A* részvényre vonatkozó fedezetlen eladás, annál messzebb haladunk lefelé.

5.7. A portfolió diverzifikáció alapjai

5.7.1. Többelemű portfolió varianciája és szórása[47]

Tekintsük a több elemből álló portfolió varianciáját és szórását. E formula lényegében a kételemű portfolió variancia definíciójának kiterjesztése. Ennek felépítéséhez ugyanúgy mátrixot használhatunk, mint a kételemű kompozíció esetében.

57.tábla *n-elemű portfolió kovariancia mátrixa*

R	1	2	3	...	N
1	$w_1^2\sigma_1^2$	$w_1w_2COV(R_1R_2)$	$w_1w_3COV(R_1R_3)$	...	$w_1w_NCOV(R_1R_N)$
2	$w_2w_1COV(R_2R_1)$	$w_2^2\sigma_2^2$	$w_2w_3COV(R_2R_3)$	...	$w_2w_NCOV(R_2R_N)$
3	$w_3w_1COV(R_3R_1)$	$w_3w_2COV(R_3R_2)$	$w_3^2\sigma_3^2$	...	$w_3w_NCOV(R_3R_N)$
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
N	$w_Nw_1COV(R_NR_1)$	$w_Nw_2COV(R_NR_2)$	$w_Nw_3COV(R_NR_3)$	...	$w_N^2\sigma_N^2$

σ_i = az *i*-edik részvény szórása

$COV(R_iR_j)$ = az *i* és *j* részvény megtérülése közötti kovariancia

[47] A portfolió diverzifikáció általánosítását lásd Ross, S.A.-Westerfield, R.W.: Corporate Finance. Times Mirror/Mosby College Publishing 1988 c. munkájában.

Az 57. táblából látható, hogy az egyes értékpapírok szórását mutató tagok a diagonális tengelyen, a kovariancia tagok pedig azon kívül találhatók. Ha N számú értékpapírt feltételezünk, akkor ennyi elem lesz vízszintesen és függőlegesen is, ami $N{\cdot}N=N^2$ mátrix elemet generál.

Vegyük példaként a vízszintes 2 és függőleges 3 elem találkozását, ahol a $w_3w_2COV(R_3R_2)$ szorzat található. A w_3 és w_2 a teljes portfolió befektetés harmadik és második értékpapírba irányuló hányada. Ha például egy 1 000 dollár értékű portfolióval rendelkező befektető 100 dollárt invesztál a második értékpapírba, akkor w_2 = 10(100/1 000). A $COV(R_3R_2)$ a harmadik és második eszköz megtérülése közötti kovariancia.

Most vesszük a vízszintes 3 és függőleges 2 értékpapír találkozását, az $w_2w_3COV(R_2R_3)$ tagot. A két kovariancia érték láthatóan azonos egymással: $COV(R_3R_2)=COV(R_2R_3)$. A táblában minden értékpapír-pár kétszer jelenik meg, egyszer a mátrix bal alsó háromszögében, másodszor pedig a jobb felső részében.

Az 58. tábla kapcsolatot mutat ki a diagonális és az azon kívüli elemek száma és a mátrix mérete között.

58. tábla *A portfolió méretváltozásainak hatásai*

Részvények száma a portfolióban	Tagok teljes száma	Variancia tagok száma (diagonális elemek száma)	Kovariancia tagok száma (diagonálison kívüli elemek)
1	1	1	0
2	4	2	2
3	9	3	6
10	100	10	90
100	10 000	100	9 900
N	N^2	N	$N^2 - N$

A táblából kiderül, hogy a diagonális elemek száma (variancia tagok) mindig megegyezik a portfolióban levő részvények számával. A diagonálison kívüli elemek száma (kovariancia tagok) sokkal gyorsabban növekszik, mint a diagonálison levő tagok száma. Például a 100 részvényből álló portfolió kovariancia tagjainak száma 9900.

Mivel a portfolió megtérülés varianciája a mátrix elemek teljes összege, ezért megállapitható, hogy a több elemből álló portfolió megtérülésének varianciája nagyobb mértékben függ az egyes értékpapírok közötti kovarianciától, mint az egyes értékpapírok varianciájától. Ez utóbbi igazolására hajtsunk végre kisebb változtatást a korábban bemutatott mátrixban. Fogalmazzuk meg a három feltevést:

Mindegyik értékpapír ugyanolyan varianciával rendelkezik, amit $\overline{VAR}$ szimbólummal jelölhetünk, más szavakkal $\sigma_i^2 = \overline{VAR}$ minden értékpapírra vonatkozóan.

A mátrix mindegyik kovariancia értéke ugyanakkora, amit $\overline{COV}$ formában jelölünk. Más szavakkal kifejezve: $COV(R_i R_j) = \overline{COV}$ minden egyes részvényárra. Könnyen kimutatható, hogy $\overline{VAR} > \overline{COV}$.

A portfolióban az összes részvény azonosan súlyozott, s mivel N számú értékpapír van, így az elemek súlya a portfolióban $1/N$. Másként kifejezve: $w_i = 1/N$ minden i értékpapírra.

Az 59. tábla a varianciák és kovarianciák mátrixát a feltevések alapulvételével mutatja.

59. tábla *Az átlagos varianciák és kovarianciák mátrixa*

R	1	2	3	......	N
1	$(1/N^2)\overline{VAR}$	$(1/N^2)\overline{COV}$	$(1/N^2)\overline{COV}$	......	$(1/N^2)\overline{COV}$
2	$(1/N^2)\overline{COV}$		$(1/N^2)\overline{COV}$	......	$(1/N^2)\overline{COV}$
3	$(1/N^2)\overline{COV}$	$(1/N^2)\overline{COV}$	$(1/N^2)\overline{VAR}$	......	$(1/N^2)\overline{COV}$
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
N	$(1/N^2)\overline{COV}$	$(1/N^2)\overline{COV}$	$(1/N^2)\overline{COV}$	......	$(1/N^2)\overline{VAR}$

Az 59. táblából láthatóan a diagonális elemek megegyeznek egymással, s ugyanígy mindegyik diagonálison kívüli elem is ugyanolyan. A korábbi mátrixhoz hasonlóan a portfolió varianciája az elemek összegzésével határozható meg. Tudjuk, hogy az N diagonális elem tartalmazza a varianciákat, s ugyanígy: $N \cdot (N-1)$ diagonálison kívüli elem pedig a kovarianciákat. Az összes mátrix elem összegzésével kifejezhetjük a portfolió varianciáját.

$$
\begin{aligned}
VAR(P) &= N \cdot (1/N^2)\overline{VAR} + N \cdot (N-1) \cdot (1/N^2)\overline{COV} \\
&= (1/N)\overline{VAR} + (N^2 - N)\overline{COV} \\
&= (1/N)\overline{VAR} + (1 - 1/N)\overline{COV}
\end{aligned}
$$

Ez utóbbi egyenlet e speciális portfolió varianciáját az átlagos variancia súlyozott összegeként fejezi ki.[48] Ha a portfolióban levő értékpapírok számát végtelenig növeljük, akkor a portfolió varianciája

$$\lim_{N\to\infty}(1/N)\overline{VAR}+(1-1/N)\overline{COV}=\overline{COV}$$

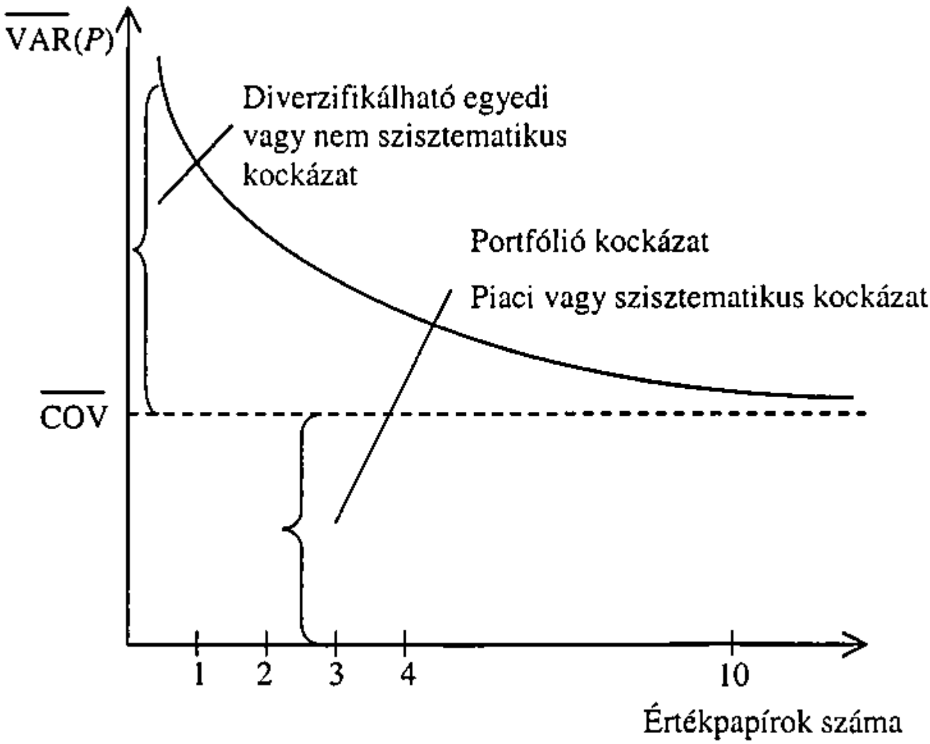
Ez utóbbi formula fontos következtetést enged meg. E speciális portfolióban az egyedi értékpapírok varianciája teljességgel eltűnik, amint az értékpapírok száma elég nagy lesz, a kovariancia tag azonban megmarad.

A portfolió varianciája így $\overline{COV}$ átlagos kovarianciává válik. E példa a diverzifikáció portfolió kockázatra gyakorolt hatását mutatja. *Az egyedi értékpapírok varianciája diverzifikációval eltűnik, a kovariancia azonban ily módon nem küszöbölhető ki.* A 69. ábra a diverzifikáció részvénypiaci példáját mutatja be.

Az egy értékpapírból álló portfolió varianciája természetesen $\overline{VAR}$, mivel az ilyen portfolió kockázata ama egyetlen értékpapír szórás-négyzete. A portfolió varianciája – egyre több értékpapír hozzáadásával – folyamatosan esik, nulláig azonban sohasem csökkenhet. Ezzel szemben aszimptotikusan közelíti a $\overline{COV}$ szintjét, ami az értékpapírok páronként tekintett kovarianciája. A diverzifikáció – a tranzakciós költségek miatt – nem ráfordításmentes, így a túl nagy számú értékpapír bevonása igen költséges lehet, s emiatt már 30 értékpapírnál optimálisnak bizonyulhat a portfolió kiterjesztése.

[48] A súlyozás magyarázata az, hogy az $1/N$ és $1-1/N$ súlyok összege éppen 1.

69. ábra A kockázat alakulása a diverzifikáció függvényében



Korábban szó volt arról, hogy a $\overline{VAR}$ értékének nagyobbnak kell lenni a $\overline{COV}$-nál. Így az értékpapír megtérülés varianciája felbontható a következők szerint:

Egyedi értékpapír teljes kockázata	=	Portfolió kockázat	+	Nem szisztematikus vagy diverzifikálható kockázat
($\overline{VAR}$)		($\overline{COV}$)		($\overline{VAR} - \overline{COV}$)

A $\overline{VAR}$ az egyetlen értékpapír birtoklásából származó teljes kockázat, a portfolió kockázat viszont a diverzifikáció után jelentkezik, aminek jele: $\overline{COV}$. A portfolió kockázatot gyakran nevezik szisztematikus vagy piaci kockázatnak. Az egyedi, vagy nem szisztematikus - a portfolióból diverzifikációval eltüntethető – kockázat pedig ($\overline{VAR}$ - $\overline{COV}$) kell legyen. A diverzifikált portfoliót választó egyén számára az egyedi értékpapír teljes kockázata nem fontos. *Amikor diverzifikált portfolióba átlagos értékpapírt vonnak be, akkor az egyén az értékpapír kockázatának ama részére figyel, amely diverzifikációval nem tüntethető el.* Ez a kockázat úgy is tekinthető, mint az adott értékpapír hozzájárulása a portfolió egészének kockázatához.

5.7.2. Fokozottan diverzifikált portfolió kockázata

Vizsgáljuk meg egy nagymértékben diverzifikált portfolió varianciáját annak feltételezésével, hogy N darab értékpapír van a portfolióban. Mi történik a varianciával, ha egyre több értékpapírt vonunk be a befektetési tárcába?

Az értékpapírok számának növekedésével a portfolió varianciája egyre kisebb lesz.

Az egyre több értékpapír portfolióba vonása önmagában nem vezet a kockázat felszámolására; a portfolió megtérülés variabilitásának csökkenthetősége függ az értékpapírok közötti kovariancia mértékétől is.

Amennyiben az értékpapírok közötti korreláció pozitív, akkor a variabilitás csupán egy része tüntethető el, de nem az egész.

Még a legnagyobb portfoliók megtérülése is tartalmaz valamennyi változékonyságot.

Most vizsgáljuk meg az N értékpapírból álló, azonosan súlyozott portfolió varianciáját, ahol a súlyok $w_i = 1/N$ hányadossal jelölhetők. Az alábbi kovariancia-mátrixban a portfolió variancia egyenlet minden egyes tétele szerepel.

60. tábla *n-elemű portfolió kovariancia mátrixa*

R	**1**	**2**	**3**	**...j...**	**N**
1	$w_1^2\sigma_1^2$	$w_1w_2COV(R_1R_2)$	$w_1w_3COV(R_1R_3)$		$w_1w_NCOV(R_1R_N)$
2	$w_2w_1COV(R_2R_1)$	$w_2^2\sigma_2^2$	$w_2w_3COV(R_2R_3)$		
3					
•					
•					
•					
i				$w_iw_jCOV(R_iR_j)$	
•					
•					
•					
N	$w_Nw_1COV(R_NR_1)$				$w_N^2\sigma_N^2$

A táblából leolvasható, hogy a mátrix diagonális tengelye N számú $w_i^2\sigma_i^2$ súlyozott variancia értékből áll, az összes többi elem $N^2 - N$ számban súlyozott kovariancia értéket jelent. A $w_iw_jCOV(R_iR_j) = w_jw_iCOV(R_jR_i)$

reláció érvényesülése miatt minden kovariancia érték kétszer szerepel a mátrixban.

A portfolió variancia egyenlete a fentiek alapján így írható fel:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j COV(R_i R_j)$$

Az alábbi gondolatmenettel igazoljuk, hogy az N növekedésével a σ_p^2 portfolió kockázat átlagos kovarianciává alakul. Tételezzük fel, hogy a portfolióban minden egyes értékpapír súlyaránya $1/N$. A $w_i = 1/N$ súlyarány feltevéssel a portfolió variancia egyenlete az alábbiak szerint fejezhető ki:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{N^2} \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N} COV(R_i R_j)$$

ahol

minden egyes variancia tagra $w_i^2 \sigma_i^2 = \frac{1}{N^2} \sigma_i^2$

az összes kovariancia tagra $w_i w_j COV(R_i R_j) = \frac{1}{N^2} COV(R_i R_j)$

helyettesítés vonatkozik. Erre alapozva a portfolió teljes varianciája N számú értékpapír esetén a következők szerint fejezhető ki:

$$N \cdot \frac{1}{N^2}\overline{\sigma}_i^2 + \frac{N^2 - N}{N^2}\overline{COV}(R_i R_j) = \frac{1}{N}\sigma_i^2 + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\overline{COV}(R_i R_j)$$

Az utóbbi képletben a $\overline{\sigma}_i^2$ az átlagos varianciát, a $\overline{COV}(R_i R_j)$ az átlagos kovarianciát jelöli. Amint egyre több értékpapírt vonunk be a portfolióba, azaz N egyre nagyobb szám lesz, akkor $1/N$ tart a nullához. Ezért felírhatjuk a következő okfejtést:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N^2}\,\overline{\sigma}_i^2 + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\,\overline{COV}(R_i R_j)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \sigma_p^2 &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2}\,\overline{\sigma}_i^2 + \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\overline{COV}(R_i R_j) \\
&= 0 + \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\overline{COV}(R_i R_j) \\
&= \overline{COV}(R_i R_j)
\end{aligned}$$

ami az átlagos varianciának felel meg. A fenti gondolatmenetből két fontos következtetés adódik.

Az *egyik* szerint, ha az N portfolió elemszám a végtelenig tartóan nő, akkor az egyedi értékpapír varianciájának hozzájárulása a portfolió kockázathoz, a nullához tartóan csökken.

A *másik* szerint ugyanakkor a kovariancia-tag hozzájárulása fennmarad. Mindaddig, amíg az egyedi értékpapírok közötti korreláció pozitív, az átlagos kovariancia is pozitív marad.

5.7.3. A befektetések szisztematikus és nem szisztematikus kockázata

Definíció szerint a szisztematikus kockázat a teljes kockázat ama része, amely az eszközök összességét érinti, kisebb vagy nagyobb mértékben mindegyikre hat. *Nem szisztematikusnak a kockázat azon része tekinthető, amely specifikusan adott eszközre, vagy befektetések kisebb csoportjára hat csupán.* A kockázat e felbontásra alapozva a befektetésből származó teljes megtérülés komponensekre bontható.

$$R = E(R) + Y$$

ahol

R = a teljes megtérülés

$E(R)$ = a megtérülés várható része

Y = a megtérülés váratlanul bekövetkező része

A kockázat ismeretében a fenti egyenlet tovább bontható a következők szerint:

$$R = E(R) + m + \varepsilon$$

ahol

m = piac alapú szisztematikus kockázat

ε = vállalat-specifikus, nem szisztematikus kockázat.

A szisztematikus kockázat hatását az értékpapírra a β tényező fejezi ki, ez mutatja az egyedi megtérülés reagálását a piaci megtérülés változására. A megtérülési egyenlet – erre alapozva – tovább bontható:

$$\begin{aligned} R &= E(R)+Y \\ &= E(R)+m+\varepsilon \\ &= E(R)+\beta_1F_1+\beta_2F_2+.....\beta_kF_k+\varepsilon \end{aligned}$$

ahol

β_i = a szisztematikus kockázat jele,

$F_1,F_2,...F_k$ = kockázati faktor

Az utóbbi kifejezésre alapozható az értékpapír megtérülés tényező modellje. A k tényezős modell a következő alakban írható fel:

$$R = E(R)+\beta_1F_1+.....\beta_kF_k+\varepsilon$$

A gyakorlatban legtöbbször az egytényezős változatot alkalmazzák, amelyben tényezők sorozata helyett egyetlen faktorként a tőkepiaci megtérülést használják. Ebben az esetben a tényező modellt *piaci modellnek* nevezik. Az elnevezés alapja az, hogy a tényezőként használt megtérülési index a tőkepiac egészére vonatkozik. Ennek alapján a piaci modell a következők szerint építhető fel:

$$R = E(R)+\beta[R_M - E(R_M)]+\varepsilon$$

ahol

R_M = a piaci portfolió megtérülése

β = a béta koefficiens

A piaci modell illusztrálására tekintsük a következő vállalati példát!

61. tábla *Vállalati és tőkepiaci megtérülési adatok*

Állapot	**Valószínűség**	**Piaci portfolió megtérülése** R_M (%)	**Vállalati megtérülés** R_B (%)
1	0.2	-20	-40
2	0.3	-10	-20
3	0.3	20	0
4	0.2	40	80

A piaci modell fenti képletének átrendezésével és a vállalatra alkalmazva a megtérülés az alábbi módon is felírható:

$$\underbrace{R_B - E(R_B)}_{\text{vállalati megtérülési többlet}} = \underbrace{\beta_B\left[R_M - E(R_M)\right] + \varepsilon_B}_{\text{piaci megtérülési többlet}}$$

A vállalati és piaci várható megtérülés a következők szerint számítható:

$$E(R_B) = (0.2)(0.40\%) + (0.3)(-0.20\%) + (0.3)(0\%) + (0.2)(80\%) = 2\%$$
$$E(R_M) = (0.2)(-0.20\%) + (0.3)(-10\%) + (0.3)(20\%) + (0.2)(40\%) = 7\%$$

62. tábla *A béta komponenseinek számítása*

Állapot	Állapot való-színűsége	$R_B - E(R_B)$	$R_M - E(R_M)$	**Kovari-ancia** (2)·(3)·(4)	$[RM_M - E(R_M)]^2$	**Piaci variancia** (2)·(6)
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**
1	0.2	-42	-27	226.8	$(-27)^2 =$ 729	145.8
2	0.3	-22	-17	112.2	$(-17)^2 =$ 289	86.7
3	0.3	02	13	-7.8	$(13)^2 =$ 169	50.7
4	0.2	78	33	514.8	$(33)^2 =$ 1089	217.8
			$COV(R_B R_M)$ =	846	σ_M^2 =	501

A béta meghatározása a kovariancia és a piaci variancia hányadosával történik:

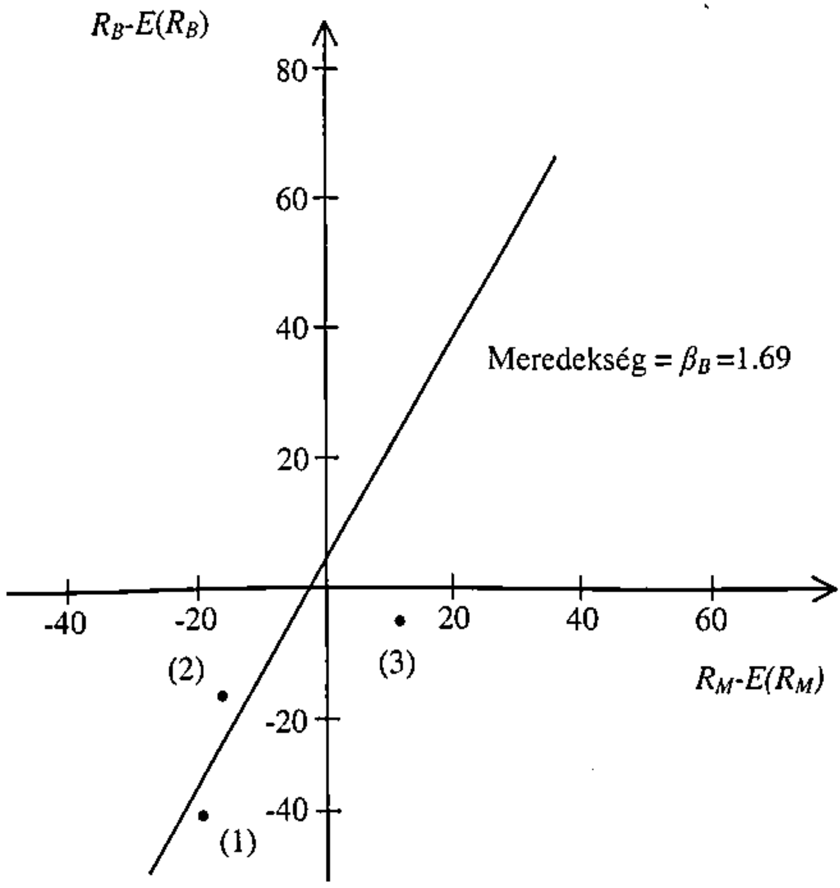
$$\beta_B = \frac{COV(R_B R_M)}{\sigma_M^2} = \frac{846}{501} = 1.69$$

A piaci modell grafikusan is ábrázolható a vállalati többlet-megtérülés piaci megtérülési többlet függvényében történő ábrázolásával.

63. tábla *Vállalati és piaci megtérülési többlet*

Állapot	$R_B - E(R_B)$ **(%)**	$R_M - E(R_M)$ **(%)**
1	-42	-27
2	-22	-17
3	-2	13
4	78	33

70. ábra *Megtérülési értékek regressziós egyenese*



5.7.4. Portfoliók és tényező modellek

Ha nagy számú értékpapírból portfoliót képezünk, akkor annak nem szisztematikus kockázata elenyészően kicsi lesz. Elegendően nagy számú eszközből formált, ún. jól diverzifikált portfolió nem szisztematikus kockázata gyakorlatilag kiiktatódik. A kellően diverzifikált portfolió feltételezhetően követi az egyedi értékpapírokra felépített egytényezős modellt. Ennek értelmében a teljes megtérülés alkotóelemei a következők szerint különíthetők el:

Teljes megtérülés	=	Várható megtérülés	+	Szisztematikus kockázat	+	Nem szisztematikus kockázat
R_p	=	$E(R_p)$	+	$\beta_p \cdot F$	+	ε_p

A megtérülés három komponensének azonosítása után kimutatható, hogy a diverzifikáció alkalmas a portfolió nem szisztematikus kockázatának eliminálására. Ennek igazolására szolgál a következő levezetés:

$$
\begin{aligned}
R_p &= E(R_p) + \beta_p F + \varepsilon_p \\
\sigma_p^2 &= E[R_p - E(R_p)]^2 \\
&= E\{[E(R_p) + \beta_p F + \varepsilon_p - E(R_p)]\}^2 \\
&= E(\beta_p F + \varepsilon_p)^2 \\
&= E(\beta_p^2 F^2 + 2\beta_p F \varepsilon_p + \varepsilon_p^2) \\
&= \beta_p^2 E(F^2) + 2\beta_p E(F) \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{E(\varepsilon_p)} + E(\varepsilon_p^2) \\
&= \beta_p^2 \sigma^2(F) + \sigma_{\varepsilon_p}^2
\end{aligned}
$$

Eszerint a portfolió kockázata két komponensből áll:

Teljes kockázat	=	Szisztematikus kockázat	+	Nem szisztematikus kockázat
σ_p^2	=	$\beta_p^2\sigma^2(F)$	+	$\sigma_{\varepsilon_p}^2$

Amennyiben a portfolió megfelelően diverzifikált, akkor a nem szisztematikus kockázat eltűnik, s a portfolió kockázata teljesen szisztematikus kockázatból áll.

Teljes kockázat	=	Szisztematikus kockázat	+	Nem szisztematikus kockázat
σ_p^2	=	$\beta_p^2\sigma^2(F)$	+	$\overline{\sigma}_{\varepsilon_i}^2 / N$
σ_p^2	$\cong$	$\beta_p^2\sigma^2(F)$[49]		

A továbbiakban példát mutatunk be portfolió diverzifikációra. Feltevésünk szerint N számú részvény van a tőkepiacon, s mindegyik leírható az egytényezős modell segítségével. Mindegyik értékpapír béta koefficiense 1, nem szisztematikus varianciája 1600%, a piaci tényező varianciája 400%. Változó számú értékpapírból álló, egyenletesen súlyozott portfolió varianciája kiszámítható a portfolió variancia egyenlet alkalmazásával.

[49] Az egyenlőségjel fölötti hullámos vonal arra emlékeztet, hogy a nem szisztematikus kockázat teljességgel nem iktatható ki.

64. tábla *A portfolió kockázat felbontása*

Részvények száma	**Portfolió variancia**	**Szisztematikus variancia**	**Nem szisztematikus variancia**
N	σ_p^2	$\beta_p^2\sigma_p^2(F)$	$\overline{\sigma}_{\varepsilon_i}^2/N$
1	2000	400	1600
2	1200	400	800
4	800	400	400
100	416	400	16

A diverzifikáció hatásai három lényeges következtetéssel illusztrálhatók:

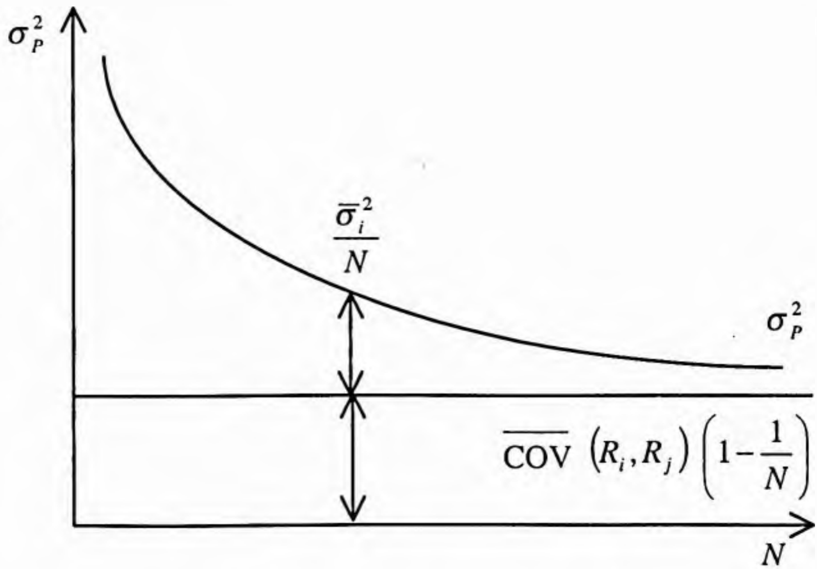
A fokozottan diverzifikált portfoliók minimális mértékben tartalmaznak nem szisztematikus kockázatot.

Adott eszköz (értékpapír) teljes portfolió kockázathoz való hozzájárulása egyrészt az értékpapír béta koefficiensétől, másrészt annak a β_p portfolió béta értékére gyakorolt hatásától függ.

A σ_p^2 portfolió kockázat függ a β_p portfolió bétától, valamint a szisztematikus kockázati faktor $\sigma^2(F)$ varianciájától, ellenben a portfolió kockázat nem függ közvetlenül a portfolióban foglalt eszközök varianciájától.

A következő két grafikon a portfolió varianciát az eszközök száma függvényében mutatja, először az általános esetre, majd az egytényezős modellre vonatkozóan.

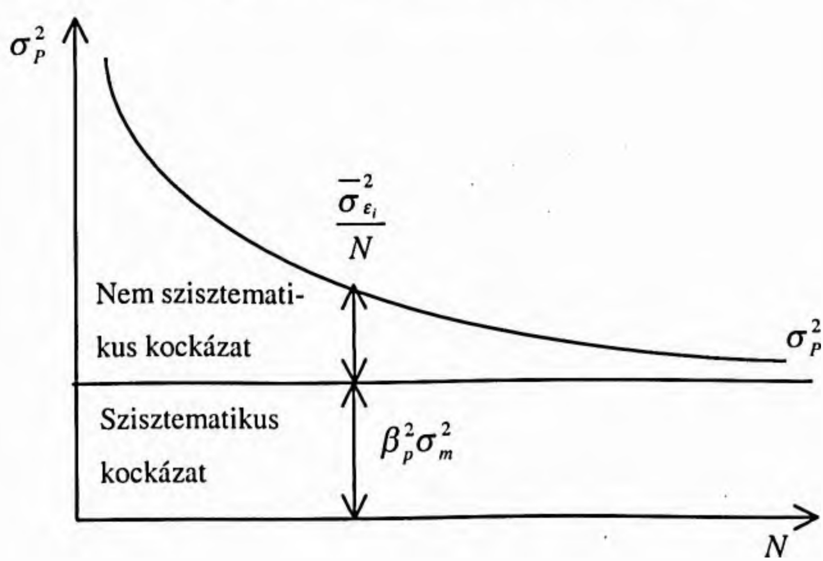
71. ábra *Diverzifikáció és portfolió kockázat egyenletesen súlyozott portfolióban*



Általános eset:

$$\sigma_p^2 = \left(1-\frac{1}{N}\right)\overline{COV}(R_i R_j) + \frac{\overline{\sigma}_i^2}{N}$$

72. ábra *A diverzifikáció hatása a kockázatra*



A diverzifikáció eredménye fokozottan diverzifikált portfolióban az alábbi relációval fejezhető ki:

$$R_p \cong E(R_p) + \beta_p F$$

amiből látható, hogy az ε_p komponens a diverzifikáció révén eltűnik. A *diverzifikáció elve* azt fejezi ki, hogy nagy méretű és jól diverzifikált portfolióban elhanyagolható a nem szisztematikus kockázat jelenléte, az ilyen értékpapír-kompozícióban csak szisztematikus kockázat van jelen. A jelenséget másik oldalról a szisztematikus kockázat elve magyarázza; ez utal arra, hogy mennyire fontos a szisztematikus és nem szisztematikus kockázati rész elválasztása. Eszerint jól diverzifikált portfolióban csak szisztematikus kockázat hat.

5.7.5. A béta tényező nagysága és előjele

A tőkepiaci arbitrázs lehetőség- és folyamat, előbb-utóbb minden portfolióval és egyedi értékpapírral kapcsolatban kikényszeríti a várható megtérülés és a kockázat közötti kölcsönös meghatározottság szabályszerűségének elfogadását. Az egyedi értékpapír kockázata és megtérülése közötti kapcsolat leírására szolgál az értékpapír-piac kockázat-megtérülés egyenese – Security Market Line. Mivel mindegyik eszköznek, értékpapírnak és portfoliónak rajta kell lenni az SML egyenesen, ezért a piaci portfoliónak is rajta kell lenni. A piaci indexet a korábban idézett egytényezős modellben tekinthetjük faktornak. Eszerint fennáll és R_M valamennyi értékére nézve csak $\beta_M = 1$ mellett teljesül az alábbi reláció:

$$\begin{aligned} R_M &= E(R_M) + \beta_M F \\ &= E(R_M) + \beta_M [R_M - E(R_M)] \end{aligned}$$

Az SML egyenes $[\beta_i, E(R_i)]$ pont-párok sorozata eszközökre, értékpapírokra és portfoliókra vonatkozóan. Az egyenesről tudjuk, hogy az átmegy az R_F és M ponton, így e két ponton áthaladó egyenes egyenlete alapváltozatban, illetve hozamkülönbség formában a következők szerint írható fel:

$$E(R_i) = R_F + [E(R_M) - R_F]\beta_i$$
$$E(R_i) - R_F = [E(R_M) - R_F]\beta_i$$

Az SML egyenes meredeksége $E(R_M) - R_F$ különbséggel jelölhető, amely megmutatja, hogy az *i*-edik értékpapír megtérülési többlete milyen mértékben változik a β_i egységnyi változása hatására. Az értékpapír-piac kockázat-megtérülés egyenese megmutatja, hogy milyen átváltási kapcsolatnak kell lenni az értékpapír-piacon forgalmazott eszközök kockázata és elvárt megtérülése között.

5.7.5.1. Pozitív bétájú eszközök ($\beta_i > 0$)

Vegyünk alapul egy értékpapírt $\beta = 2$ értékű szisztematikus kockázattal. Az SML egyenes megmutatja, hogy az ilyen eszközzel szemben a következő megtérülési követelményt kell támasztanunk:

$$\begin{aligned} E(R_i) - R_F &= [E(R_M) - R_F]\beta_i \\ &= [E(R_M) - R_F] \cdot 2 \end{aligned}$$

Ha a piaci megtérülési többlet $E(R_M)-R_F$ különbségét történeti adatok alapján 8.6%-osnak vesszük, akkor ez a befektetés a kockázatmentes ráta fölött, a következő megtérülési többletet adná:

$$E(R_i)-R_F=2\cdot 8.6\%=17.2\%$$

A $\beta=2$ szisztematikus kockázattal jellemzett értékpapír kétszer akkora szisztematikus kockázatot hordoz, mint amekkorát a piac, s eme pótlólagos kockázat kompozíciójaként, a befektető a kockázatmentes ráta felett, a piacénál kétszer nagyobb prémiumot vár el. A 2 értékű béta azt jelenti, hogy e részvény megtérülése szisztematikusan megnövekedett a tényezőhöz viszonyítva (hiszen 2 lett 1 helyett), s ez a megnövekedett kockázat a piacon feltétlenül többlet díjazást érdemel.

Az SML egyenes megmutatja, hogy bármely értékpapír pozitív β_i bétával a kockázatmentes ráta fölött, az $[E(R_M)-R_F]\beta_i$ megtérülési többlettel kell rendelkezzék. A befektetők csak egyetlen módon bírhatók rá arra, hogy kockázatosabb eszközbe-értékpapírba invesztáljanak, hogy ha számukra magasabb remélt megtérülést kínálunk. Ha például a kockázatmentes ráta 7%-os, a piaci portfolió remélt megtérülési aránya 15%, akkor a kockázat-megtérülés egyenes egyenlete a következő alakban írható fel:

$$E(R_i)=7\%+\beta_i(8\%)$$

A pozitív béta szerepét egy további példával is illusztrálhatjuk. Feltételezésünk szerint adott befektető négy értékpapírt vizsgál. A kincstári kötvény megtérülési rátája jelenleg 6%-os, a piacon remélt megtérülési ráta pedig 13%. Ennek alapján a befektető az értékpapírok mindegyikére meghatározhatja az elvárt megtérülést.

Részvény	β_i
A	0.5
B	1.0
C	1.2
D	1.5

Az SML egyenes alkalmazásával az elvárt megtérülés az alábbiak szerint számítható:

65. tábla *A megkövetelt megtérülés számítása*

Részvény	$R_F + \beta_i[E(R_M) - R_F]$	=	$E(R_i)$ %
A	6% + (0.50·7%)	=	9.5
B	6% + (1.0·7%)	=	13.0
C	6% + (1.2·7%)	=	14.4
D	6% + (1.5·7%)	=	16.5

5.7.5.2. Zéró bétájú eszközök ($\beta_i = 0$)

Feltételezzük, hogy a részvény béta értéke zéró. Amennyiben az ilyen részvény nem hordoz szisztematikus kockázatot, akkor nincs mozgás az *F* faktorban, ezért a megtérülés változatlan marad. Az SML egyenesnek megfelelően a részvény – kincstári körvény rátája fölötti – megtérülési prémiuma a következők szerint számítható:

$$\begin{aligned} E(R_i) - R_F &= [E(R_M) - R_F]\beta_i \\ &= [E(R_M) - R_F] \cdot 0 = 0! \end{aligned}$$

Ez az eredmény azért meglepő, mert szisztematikus kockázat hiányában a részvénynek éppen lehetne nem szisztematikus kockázata, bár megtérülése mégsem lesz nagyobb, mint a kockázatmentes kötvény hozama. Ez az ellentmondás csak úgy oldható fel, ha igazoljuk a szisztematikus kockázat kizárólagos érvényesülését.

Az SML egyenes szerint a zéró bétájú eszköznek a kockázatmentes rátával azonos megtérüléssel kell rendelkezni. Tegyük fel, hogy az SML egyenes feltételezésével szemben a zéró bétájú értékpapírnak a kockázatmentes rátát meghaladó, remélt megtérülése volt. Ha a befektető hitelt vesz fel rizikómentes ráta mellett, s az így szerzett összeget egy ilyen eszközbe fekteti, akkor bármely jól diverzifikált portfolióban anélkül jutna megnövekedett portfolió megtérüléshez, hogy kockázata emelkednék. Az ilyen eszköz pótlólagos nem szisztematikus kockázata „kimosódik" a nagy portfolióból, s így csak a szisztematikus kockázat marad. Minthogy az eszköznek nincs szisztematikus kockázata, így az nem emelheti a portfolió kockázatát; az egyetlen hatás, amit ez az értékpapír a portfolióra gyakorol az, hogy növeli annak remélt megtérülését. A befektetők így arra törekedhetnek, hogy ilyen részvényt iktassanak saját portfoliójukhoz, de az ilyen értékpapír eladására nem törekszenek.

5.7.5.3. Negatív bétájú eszközök ($\beta_i < 0$)

Még kihívóbb paradoxon keletkezik az olyan eszközzel kapcsolatban, amelynek negatív béta értéke van. Az SML egyenesnek megfelelő többlet megtérülés ilyen eszközök esetében a következők szerint számítható:

$$E(R_i) - R_F = [E(R_M) - R_F]\beta_i < 0$$

Mivel az $E(R_i) - R_F$ nagyobb, viszont a β_i kisebb zérusnál, így a többlet megtérülés előjele negatív lesz. Más szóval, egy eszköz negatív bétával negatív rizikóprémiumot eredményez, ami azt jelenti, hogy a várható megtérülés kisebb lesz a kockázatmentes kötvényen nyerhető rátánál. Mindezek ellenére az eszköz sajátos kockázatot hordoz, és ezért béta értéke lehet például –2. Ez azt jelenti, hogy szisztematikus kockázatának szórása kétszer akkora volna, mint a piaci megtérülésé. Ennek alapján az eszköz remélt megtérülése kisebb lenne, mint a piaci megtérülés.

Feltételezve az eszköz $\beta = -2$ szisztematikus kockázatát, a piac 8,6%-os történeti megtérülését, a 10%-os kockázatmentes rátát, az SML egyenesnek megfelelő elvárt megtérülése a következő lesz:

$$\begin{aligned} E(R_i) &= R_F + [E(R_M) - R_F]\beta_i \\ &= 10\% + [8{,}6\% \cdot (-2)] \\ &= -7{,}2\% \end{aligned}$$

Az így kapott negatív megtérülés bonyolultabbá teszi a megértést. Elvileg a befektető nem lehet elégedett olyan értékpapír birtoklásával, amelynek negatív megtérülése van, ami azt jelenti, hogy a befektető várhatóan veszít eme értékpapíron. Mit mutat itt valójában az SML modell? Amennyiben a piaci hozamok visszaesést jeleznek, az az eszköz negatív bétájából következően, annak javuló piaci pozíciójára utal. Amikor ugyanis a piaci megtérülés visszaesést mutat, akkor a negatív béta segít kiegyensúlyozni a visszaesést. Ez a képesség a negatív bétájú eszközt – bármely portfolió pótlólagos komponenseként – különösen értékessé teszi. A befektetők megnyerésére ez az értékes pótlólagos komponens akkor vonzó, ha az alacsonyabb megtérülésre vonatkozó ígéret kikényszeríthető.

Amennyiben negatív bétájú eszközt pozitív bétájú portfolióhoz (például a piaci portfolióhoz) társítanának, akkor ezáltal csökkenne a portfolió átfogó szisztematikus kockázata. Például feltételezzük, hogy h értékpapírt negatív β_i bétával adunk β_p pozitív bétájú portfolióhoz. Ha e vásárlást h összegű kölcsönvétellel kockázatmentes ráta mellett finanszírozzuk, vagy néhány kockázatmentes értékpapírt eladunk a portfolióból, akkor az új kompozíció béta értékét a következők szerint írhatjuk fel:

$$\beta_{\text{új}} = \beta_p + h \cdot \beta_i < \beta_p$$

reláció érvényesülését az magyarázza, hogy β_i negatív előjelű. Ennek következtében a pótlólagosan hozzátett i eszköz a teljes portfolió béta értékét csökkenti, azaz mérsékli a portfolió szisztematikus kockázatát. Ez akkor történik, ha kockázatmentes kötvényt adunk el, s az új értékpapírt annak helyére tesszük. Éppen ez az, ami miatt ez az eszköz oly értékessé válik a befektető számára; a döntő ok a megtérülés alacsony mértéke illetve annak negatívvá válása. Mint ismeretes, a jól diverzifikált portfolióban a szisztematikus kockázat az egyetlen változat. A negatív bétájú értékpapírok módot nyújtanak e kockázat mérséklésére, s a befektetők készek elfogadni a kisebb (esetleg negatív) megtérülést, hogy ezáltal elérhessék a kockázat redukcióját. A negatív béta értékű eszközöket ezért gyakran nevezik biztosítéknak a kockázattal szemben.

5.8. A piaci portfolió

5.8.1. A portfolió birtoklás változásának marginális hatása

A CML egyenes köztudottan kapcsolatot létesít a hatékony portfoliók várható megtérülése és kockázati mértéke között. Az egyedi értékpapírok általában az egyenes alatt helyezkednek el: az egymagában birtokolt egyedi értékpapír, csaknem bizonyosan, nem hatékony portfolió. Lényegében a CAPM modell sem tartalmaz többet az egyedi értékpapírok várható megtérülése és teljes kockázata közötti kapcsolatról. Ahhoz, hogy többet mondhassunk az értékpapírok várható megtérüléséről, mélyebbre kell ásnunk. A hatékony portfolió kockázat- és megtérülés változásának kulcsa az értékpapír birtoklásában bekövetkezett változás. Mi történik a portfolió jellemzőivel, ha az i-edik értékpapírba befektetett összeg kis mennyiséggel változik? Feltételezzük, hogy a jelenlegi portfolió p. Képzeljük el, hogy a portfolióhoz hozzáadunk vagy abból elveszünk egy kis összegű i értékpapírt. Amennyiben az értékpapír már benne van a portfolióban, akkor a teljes birtoklás nő vagy csökken. Ha nem, akkor vagy új helyzet áll elő, vagy fedezetlen eladás történik.

Az új portfolió a következő lesz:

w_i részarány i értékpapírból

w_p részarány p portfolióból

A jelenlegi portfolió:

$w_i = 0$

$w_p = 1$

5.8.1.1. Marginális várható megtérülés

A portfolió várható megtérülése a komponensek várható megtérülésének súlyozott átlaga.

$$E(R_p) = w_i E(R_i) + w_p E(R_p)$$

Ha az i értékpapír súlyaránya végtelen kis egységgel változik, akkor a várható megtérülésben ennek hatására bekövetkező változás, a megtérülési egyenlet súlyarány szerinti első deriváltjával fejezhető ki. Ebben az esetben:

$$\frac{\partial E(R_p)}{\partial w_i} = E(R_i)$$

Az egyenlet bal oldalán levő kifejezés az i értékpapír marginális hozzájárulását mutatja a p portfolió várható megtérüléséhez, így ez az értékpapír várható megtérülése. Látható, hogy az egyenlet jobb oldala semmit nem foglal magában a p portfolióból. Egy értékpapír marginális hozzájárulása valamely portfolió várható megtérüléséhez, saját várható megtérülése által meghatározott. Egyszerűbben kifejezve: a marginális várható megtérülés azonos a várható megtérüléssel.

5.8.1.2. Marginális variancia

Az i értékpapír és a p portfolió kombinációjának varianciája függ a két komponens varianciájától, a megtérülési értékek közötti kovarianciától, s az összes befektetésen belüli arányuktól.

$$\sigma^2 = w_i^2\sigma_i^2 + 2w_i w_p COV(R_i R_p) + w_p^2\sigma_p^2$$

Amennyiben az i értékpapír elhanyagolhatóan kis egységgel változik, akkor az ennek hatására a varianciában bekövetkezett változást a variancia-egyenlet súlyarány szerinti első deriváltja adja meg:

$$\frac{\partial\sigma^2}{\partial w_i} = 2w_i\sigma_i^2 + 2w_p COV(R_i R_p)$$

Eszerint az i értékpapír p portfolió kockázatához való marginális hozzájárulása az utóbbi egyenlet jobb oldalával fejezhető ki; ezt tekintjük az értékpapír marginális varianciájának.

A jelenlegi portfolióban $w_i = 0$ és $w_p = 1$, így

$$\frac{\partial\sigma^2}{\partial w_i} = 2COV(R_i R_p)$$

Szavakkal: a p portfolióban levő i értékpapír mennyiségi változásának marginális hatása ama portfolió varianciájára függ az értékpapír- és portfolió megtérülés közötti kovarianciától. Tehát az értékpapír birtoklás változásának hatása a portfolió kockázatára, egyaránt függ az értékpapír és a portfolió jellemzőitől.

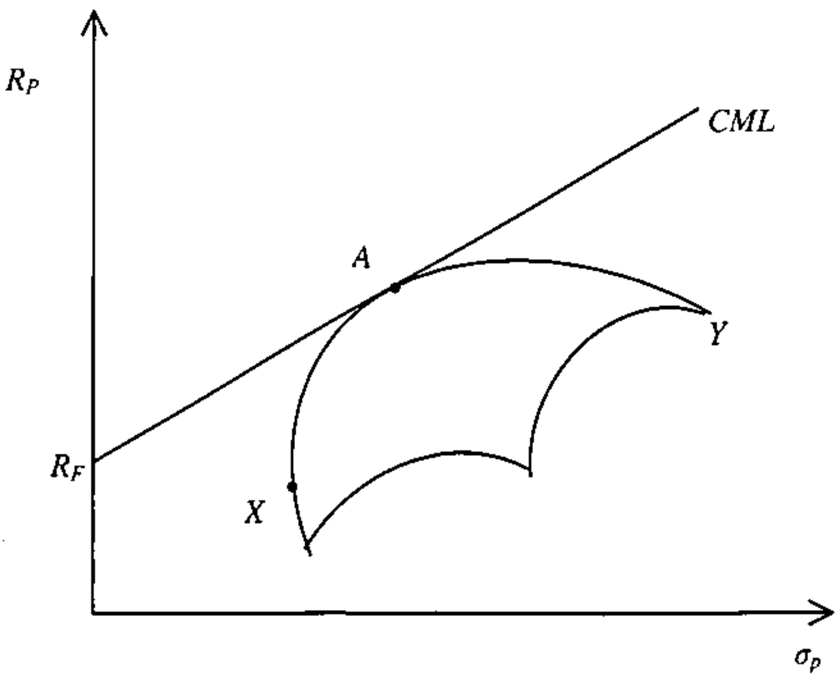
5.8.2. A piaci egyensúlyi portfolió meghatározása

Korábbi elemzéseinkben egyetlen befektetőt feltételeztünk. Becslései az egyedi értékpapír várható megtérülésére, varianciájára, valamint az értékpapírok páronkénti kovarianciájára az övéi, és egyedül csak az övéi. Más befektetőknek a fenti változókra vonatkozóan eltérő becslései lehetnek. Ezekben olyan nagy különbségek mégsem lehetnek, hiszen a befektetők várakozásai ugyanazokon a múltbeli ármozgásokon és más – nyilvánosan hozzáférhető – információkon alapulnak. A finanszírozási elmélet képviselői gyakran olyan világot képzelnek el, amelyben a várható megtérülésre, a varianciára és a kovarianciára ugyanolyan becslés vonatkozik. Ez soha nem szó szerint értendő, szükség van egyszerűsítő feltevésekre olyan környezetben, ahol a befektetők ugyanolyan információs forrásból merítenek. E feltevést homogén várakozásnak nevezik.[50]

[50] A homogén várakozások feltevése szerint a befektetőknek azonos megérzése van a megtérülésről, varianciáról, kovarianciáról, ami azonban nem jelenti a befektetők azonos kockázat-kerülő magatartását.

Amennyiben minden befektető várakozásai homogének, akkor mindegyikükre az alábbi ábra vonatkoztatható:

73. ábra *A tőkepiaci egyenes*



Mivel az összes befektető ugyanazon inputokkal dolgozik, így a kockázatos értékpapírok ugyanolyan hatékony határfelületét rajzolja fel. A kockázatos értékpapírok hatékony határfelülete a *XAY* görbével ábrázolható. Minthogy mindenki ugyanolyan kockázatmentes rátát alkalmaz, így mindegyik befektető a kockázatos eszközök *A* portfolióját tartja birtoklásra érdemesnek. Eme *A* pontnak azért nagy a jelentősége, mert mindegyik befektető olyan kockázatos értékpapírokat vásárol, amelyeket e pont reprezentál. A fokozottan kockázat-kerülő befektetők az *A* portfoliót az R_F

ponthoz tartozó értékpapírral úgy kombinálja, hogy az új portfolió az R_F-hez lesz közelebb. A mérsékelt kockázati tartózkodású befektetők kölcsönvétellel finanszírozzák az *A* ponton túl választott kombinációkat. Mindebből következően, a homogén várakozások világában mindegyik befektető a kockázatos eszközök ugyanazon portfolióját választja, s ez a piaci portfolió. Illusztráljuk e gondolatokat számszerű példával.

Olyan részvénypiacot feltételezünk, ahol összesen négyféle részvényt (*A*, *B*, *C*, *D*) finanszíroznak. A négy értékpapírra vonatkozó adatokat az alábbi tábla tartalmazza:

66. tábla *Értékpapír-jellemzők több részvényre*

Társaság	**Részvény egységár (dollár)**	**Kintlevő részvények száma**	**Teljes piaci* érték (dollár)**	**Piaci részarány (%)**
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**
A	5	3 000 000	15 000 000	15
B	10	2 500 000	25 000 000	25
C	20	2 000 000	40 000 000	40
D	40	500 000	20 000 000	20
			100 000 000	100

* Teljes piaci érték = Részvény egységár·Kintlevő részvények száma

Továbbá képzeljük el, hogy csupán három befektető birtokol részvényeket, s mindegyiküknek homogén várakozásai vannak. A befektetők részvény vagyonát a 67. tábla mutatja:

67. tábla *Befektetők piaci részesedése*

Befektető	**Részvénypiaci vagyon (dollár)**	**Piaci részesedés (%)**
X	50 000 000	50.00
Y	49 980 000	49.98
Z	20 000	0.02

A befektetők homogén várakozásainak feltételezésével az előzőekből tudjuk, hogy minden befektetőnek azonos súlyarányú kockázatos eszközportfoliót kell birtokolni. Tegyük fel, hogy mindegyik befektető a piaci arányokon alapuló összetételben birtokol részvényeket. Eszerint, az egyén által birtokolt értékpapír aránya azonos az egyén által birtokolt teljes piaci részarány és a kintlevő részvények számának szorzatával. Például az *Y* befektető a piac 0.02%-át képviseli. Ennek alapján a következő összetétel van a tulajdonában:

- 600 *A* részvény (0.02%·3 000 000)
- 500 *B* részvény (0.02%·2 500 000)
- 400 *C* részvény (0.02%·2 000 000)
- 100 *D* részvény (0.02% · 500 000)

Az ilyen összetételt piaci portfolió tartási stratégiának is szokták nevezni, mert a befektető a piacra kibocsátott értékpapírok összegének konstans arányát tartja tulajdonában.[51] Az alábbi tábla e stratégiát a három befektető mindegyikére bemutatja.

Az egyes befektetők eltérő arányú részvény-birtoklásakor azt feltételezzük, hogy minden befektető pozíciója arányos a kintlevő részvények számával.

68. tábla *Befektetési pozíciót meghatározó jellemzők*

	Befektetők							
	X		**Y**		**Z**		**Összes**	
Társaság	**Részvény (1)**	**Dollár (mill.) (2)**	**Részvény (3)**	**Dollár (mill.) (4)**	**Részvény (5)**	**Dollár (mill.) (6)**	**Mill. db (7)**	**Teljes érték (8)**
A	1 500 000	7.5	1 499 400	7.497	600	3 000	3*	15**
B	1 250 000	12.5	1 249 500	12.495	500	5 000	2.5	25
C	1 000 000	20	999 600	19.992	400	8 000	2	40
D	250 000	10	249 900	9.996	100	4 000	0.5	20
Összes		50		49.49				100

* 3 000 000 = 1 500 000 + 1 499 600 + 600

** 1 500 000 = 7 500 000 + 7 497 000 + 3 000

[51] Még helyesebb azt mondani, hogy a piaci portfolió bizonyos arányát (százalékát) tartja tulajdonában.

Az utóbbi tábla (7) és a korábbi (3) oszlopának összehasonlítása azt mutatja, hogy e stratégia szerint a befektetők aggregáltan mindegyik értékpapír kintlevő darabjait maradéktalanul birtokolják. Más szavakkal ezt úgy fogalmazhatjuk, hogy a piac megtisztult.

Alternatívaként feltételezzük, hogy mindegyik befektető ugyanazt a nem piaci portfoliót birtokolja. Például feltehetjük, hogy mivel az *A* részvényeket alacsony áron kínálják, ezért minden befektető több *A* részvényt szeretne birtokolni, mint amennyit a részarányos formula meghatároz. Mivel a befektetők több *A* részvényt szeretnének vásárolni, mint amennyi kint van, így a piac nincs egyensúlyban. Hasonlóképpen, mindegyik befektető kevesebb *D* részvényt birtokolna, mint amennyit a formula meghatároz, mivel ezt a papírt magasabb áron kínálják, így a kintlevőnél kevesebbet tartanának belőle, s a piac megint csak nem lesz egyensúlyban. Az egyensúly elérése érdekében az *A* részvény árának növekedni, a *D* árának pedig esni kell egészen addig, hogy a befektetők éppen a kintlevő részvények mennyiségét akarják birtokolni. Ez csak akkor következik be, ha a befektető a piaci portfoliót birtokolja. *Mindezek alapján nagyon fontos eredményhez jutunk annak kimondásával, hogy a homogén várakozások világában a piac csak akkor jut egyensúlyba, ha mindegyik befektető a piaci portfoliót birtokolja.*

5.9. A portfolió választás elmélete és a tőkepiaci viselkedés

Az egyén bizonytalanság melletti döntéshozatalának szerkezete fokozatosan alakult, fejlődött ki a bizonytalanság gazdaságtanából. Az egyén bizonytalanság melletti normatív választási viselkedésének alapvető maximalizálási elve a Bernoulli és Neumann-Morgenstern féle várható hasznosság maximin vagy maximax szabálya.[52]

A bizonytalanság melletti normatív választási elmélet modellje alapján természetes, hogy az egyén

- a lehetőség-készlet minden alternatívájának hasznosságát megbecsüli,
- azt az alternatívát, vagy alternatívák együttesét választja, amely a várható hasznosságot maximalizálja.

Ha valaki elfogadja, hogy van egy olyan axióma-készlet, amely szükséges és elégséges biztosíték a bizonytalanság melletti racionális viselkedésre, akkor ebből következik, hogy a várható hasznosság szabálya optimális kiválasztási kritérium a valószínűségi eloszlás egy lehetőség-készletének (mint például a gazdagság iránti igény) kiválasztására.

Önmagában ez a szabály koncepcionálisan elegáns, de ahhoz, hogy ellenőrizhető hipotéziseket állítsunk fel a tőkepiaci jelenségekről, vagy nor-

---

[52] D. Bernoulli: „Exposition of a New Theory of the Measurement of Risk". Econometrica 1954 pp. 23-36. c. cikke bemutatja a Szentpétervár paradoxonra épülő szcenárió szerinti hasznosság maximalizálás eredeti intuitív logikai alapját.
A várható hasznosság szabályának axiomatikus fejlesztése folytatódott Neumann-Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior (Princeton: Princeton University Press) 1947.

matív befektetési stratégiákat készítsünk, több összefüggést kell meghatároznunk a preferencia függvényre. Ez az összefüggés egyaránt származhat (1) az összes portfolió egyperiódusú megtérülési eloszlás-függvény természetének meghatározásából (2), vagy a befektető hasznossági függvényének alakjából.

Ha például az egyén hasznossági függvénye megközelíthető egy másodfokú polinommal, akkor preferenciáit másodfokú hasznossági függvénynyel reprezentálhatjuk a következő formában:

$$U(W) = W - cW^2$$

Kimutatható, hogy ha az egyén viselkedése összhangban áll egy másodfokú hasznossági függvénnyel, akkor például az alternatív értékpapír-portfoliók bármely valószínűségi eloszlás-készletéből történő választás megtehető az eszközök és portfoliók megtérülése várható értékének és szórásának segítségével.[53]

Ez azt jelenti, hogy a hatékony halmaz elméletének alkalmazása lehetővé teszi a feltételezett egyén számára az azonos előnyökkel bíró (állandó várható hasznosság, várható hasznosság érték-szórás) portfoliók indifferencia görbesorának megrajzolását.

[53] A valószínűségi eloszlások közötti alternatív döntés elméleti megközelítése a sztochasztikus dominancia követelményein keresztül történhet. A sztochasztikus dominancia ismertetése megtalálható:
I. Hadar-W. Russell: „Rules for Ordering Uncertain Prospects" American Economic Review, March 1969 pp. 25-34.
G. Hanoch-H. Levy: „The Efficiency Analysis of Choices Involving Risk". Review of Economic Studies, July 1969 pp.335-346.
H. Levy-G. Hanoch: „Relative Effectiveness of Efficiency Criteria for Portfolio Selection". Journal of Financial and Quantitative Analysis, March 1970 pp 63-76.

Hasonlóképpen, a hatékony halmaz elmélete, amely szerint a kockázatkerülő befektető optimális portfoliója rajta kell legyen a várható érték-szórás indifferencia görbesorozaton, levezethető abból a feltételből, hogy az egyperiódusú portfolió megtérülés normális eloszlást követ. Más szavakkal, egy preferencia rendezés származtatható a portfolió megtérülés egyperiódusú eloszlásának várható érték-szórás sorbarendezésével, ha biztosított a portfolió megtérülés normális eloszlás jellege.

A fenti fejtegetés különös jelentőséggel bír azóta, hogy Markowitz és Tobin jelentős fejlődést elindító munkájában – melyben a befektetők bizonytalanság melletti portfolió hasznosság maximalizálási problémájának megoldásával foglalkozott – abból indult ki, hogy a befektetők preferenciái a várható érték-szórás térben reprezentálhatók.

6. A TŐKEPIACI ÉRTÉKELÉS EGYENSÚLYI MODELLJEI

A tőkepiaci egyensúlyi értékelés bizonytalanság melletti megközelítésének számos változata létezik, mégis a Sharpe és a módosított Lintner kétparaméteres CAPM modell empirikusan robosztusabbnak tűnik, legalábbis a többi változathoz viszonyítva. A két paraméteres CAPM modell levezetésében a Sharpe[54] és Lintner[55] formula több tekintetben eltért egymástól, aminek nagy közgazdasági jelentőséget tulajdonítottak. Nyilvánvaló különbségeik az egyedi eszközök vagy értékpapírok különféle megfelelő kockázati mértékének származtatásával, illetve a különböző egyensúlyi kockázat-megtérülés átváltási relációkkal kapcsolatos. Specifikusan Sharpe támogatta az értékpapírok szisztematikus kockázatának megfelelő mérését, míg Lintner olyan kockázat mérést tartott jónak, amely integrálja az értékpapírok kockázatának mind szisztematikus, mind reziduális mérését. Továbbá Lintner elemzése jelzi, hogy csak egy egyensúlyi hatékony portfolió van (például a piaci portfolió), míg Sharpe arra a következtetésre

[54] Sharpe (1964) modellt szolgáltatott, a befektetői viselkedés kockázat körülményei közötti alakulásának vizsgálatára. A piaci egyensúlyi feltételekre alapozva származtatta a CML tőkepiaci egyenest.

[55] I. Lintner: "The Aggregation of Investor's Diverse Judgement and Preferences in Purely Competitive Securities Markets". Journal of Financial and Quantitative Analysis, December 1965 347-400 pp.

jutott, hogy több hatékony portfolió is elképzelhető (például érintési pontok).

King és Blume tanulmánya[56] jelzi, hogy a reziduális tényező varianciája viszonylag kicsi a piaci vagy az általános faktor varianciájához viszonyítva. Ez azt jelenti, hogy az eredeti Sharpe és Lintner egyenletben alkalmazott kockázati prémium megközelítően szintén egyenlő lesz. Így az eredeti Sharpe és Lintner formula nem vezet semmi olyan, az értékpapírok hozamára vonatkozó pragmatikus megfontoláshoz, amely fontos és eltérő volna.

A tőkepiaci elmélet egyensúlyi jellege olyan közeg érvényesülését követeli, amelyben

1. az elvárások homogének,
2. a befektetők kockázat-kerülők, s Tobin értelemben maximalizálók,
3. a kölcsönvételi és hitelnyújtási ráták azonosak és a befektetők számára tetszés szerinti lehetőség adott, akármilyen long és short pozíciókat tartalmazó portfoliók összeállítására,
4. az elérhető lehetőségek aktuális birtoklási periódusban mért valószínűségi eloszlása normális.

[56] B. King: „Market and Industry Factors in Stock Price Behavior". Journal of Business, Supplement, January 1966 139-190 pp. and M. Blume: „The Assessment of Portfolio Performance". Ph.D Dissertation, University of Chicago 1967.

A (2) és (4) feltétel a valós körülmények leírására szolgál, míg a tőkepiac elméletének főbb összefüggései a heterogén várakozások világához kapcsolódnak.[57] A (3) feltételezés sok közgazdász számára nem vonzó.

6.1. A portfolió-elmélet és a CAPM modell implikációi

6.1.1. Még egyszer a diverzifikáció hatásáról

Feltételezzük, hogy A és B értékpapír-beruházási lehetőség áll rendelkezésre, s meghatározott összeg fektethető be a két eszközbe. A pénzalapot bármilyen arányban megoszthatjuk a két értékpapír között. Az A értékpapír várható megtérülési rátája $E(R_A) = 5\%$, annak szórása $\sigma_A = 4\%$. A B értékpapír várható megtérülése $E(R_B) = 8\%$, szórása pedig $\sigma_B = 10\%$. A feladat végső soron az optimális portfolió meghatározása, azaz a rendelkezésre álló pénzalap értékpapíronkénti allokációs arányainak kiszámítása. A közbülső lépés magában foglalja a portfoliók elérhető halmazának meghatározását, ebből a hatékonyak kiválasztását valamint a hatékony sorozatból a legjobb portfolió kiválasztását. Egyelőre nincs elegendő információ a legjobb portfolió kiválasztásához, így az elérhető és hatékony portfoliók felépítéséhez szükség van a két értékpapír közötti ρ_{AB} korrelációs fok meghatározására. Először feltételezzük a korreláció három fokát:

[57] I. Lintner: "The Aggregation of Investor's Diverse Judgement and Preferences in Purely Competitive Securities Markets". Journal of Financial and Quantitative Analysis, December 1965 347-400 pp. című cikke az egyik legfontosabb mű, amely hozzájárult a tőkeértékelési elmélet első változatának kifejlesztéséhez és finomításához.

$$\rho_{AB} = +1.0, \qquad \rho_{AB} = 0, \qquad \rho_{AB} = -1.0,$$

s utána határozzuk meg a portfolió $E(R_p)$ várható megtérülését és annak σ_p szórását mindegyik esetre. Az $E(R_p)$és σ_p számításához felhasználjuk az alábbi (1) és (2) egyenletet.

$$E(R_p) = wE(R_A) + (1-w)E(R_B) \tag{1}$$

$$\sigma_p = \sqrt{w^2\sigma_A^2 + (1-w)\sigma_B^2 + 2w(1-w)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B} \tag{2}$$

Most behelyettesítjük R_A és R_B adott számértékeit és megoldjuk az (1) egyenletet $E(R_p)$ várható megtérülésre különböző w értékek mellett. Legyen például $w = 0.75$, így

$$E(R_p) = 0.75(5\%) + 0.25(8\%) = 5.75\%$$

Hasonlóképpen behelyettesíthetők σ_A σ_B és ρ_{AB} adott számértékei és a (2) egyenlet megoldható σ_p értékre w különböző nagysága mellett. Ha például ρ_{AB}=0 és w=75%, akkor

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{(0.5625)(16) + (0.0625)(100) + 2(0.75)(0.25)(0)(10)} \\ &= \sqrt{9 + 6.25} = \sqrt{15.25} = 3.9\%\end{aligned}$$

Az egyenletek megoldhatók w más értékeire, a három korrelációs esetre, azaz

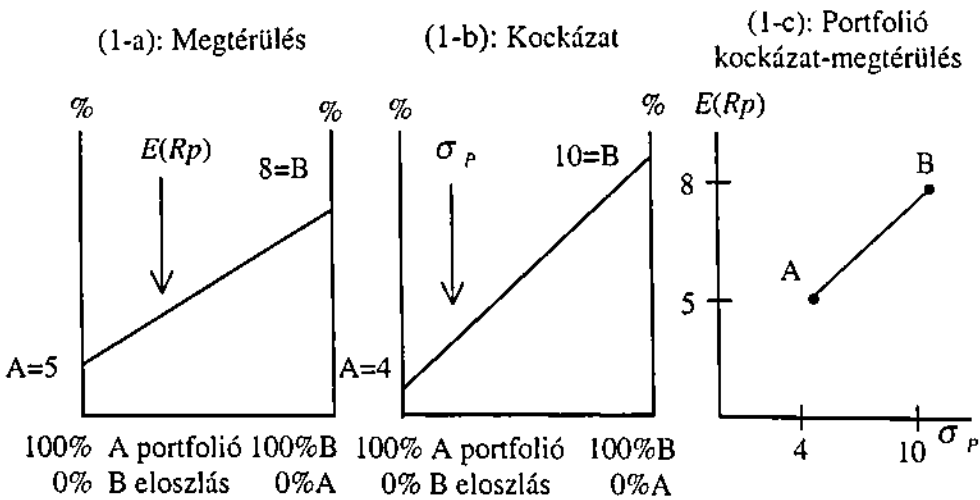
ρ_{AB}=+1.0 és −1.0 mellett. Az alábbi tábla megadja a megoldást a w = 100%, 75%, 50%, 25% és 0% mellett, az azt követő ábra pedig illusztrálja $E(R_p)$, σ_p értékét és az elérhető portfoliók sorozatát.

69. tábla *Az $E(R_p)$ és σ_p különböző feltevések mellett*

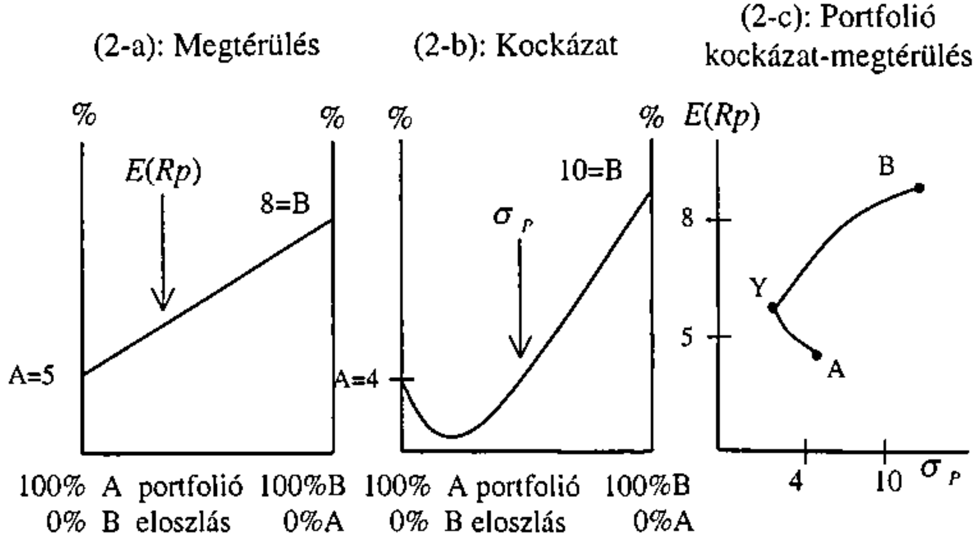
A értékpapír portfolió aránya (w)	**B értékpapír portfolió aránya (1-w)**	**$\rho_{AB} = +1.0$**		**$\rho_{AB} = 0$**		**$\rho_{AB} = -1.0$**	
		$E(R_p)$	**σ_p**	**$E(R_p)$**	**σ_p**	**$E(R_p)$**	**σ_p**
100	0	5.00	4.0	5.00	4.0	5.00	4.0
75	25	5.75	5.5	5.75	3.9	5.75	0.5
50	50	6.50	7.0	6.50	5.1	6.50	3.0
25	75	7.25	8.5	7.25	7.6	7.25	6.5
0	100	8.00	10.0	8.00	10.0	8.00	10.0

74. ábra Portfolió megtérülés, kockázat és a portfoliók elérhető sorozata

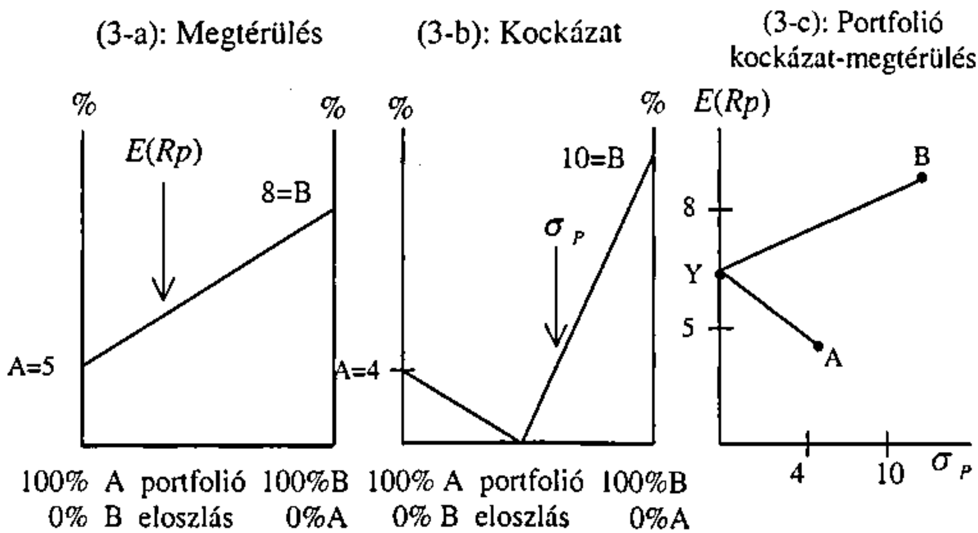
a. I. eset $\rho_{AB} = +1.0$



b. II. eset $\rho_{AB} = 0$



c. III. eset $\rho_{AB} = -1.0$



Az ábrák alapján az alábbi következtetések fogalmazhatók meg:

1. Az $E(R_p)$ a w lineáris függvénye. Az $E(R_p)$ grafikonja a három esetben megegyezik, mivel az $E(R_p)$ független az *A* és *B* értékpapír közötti korrelációtól.

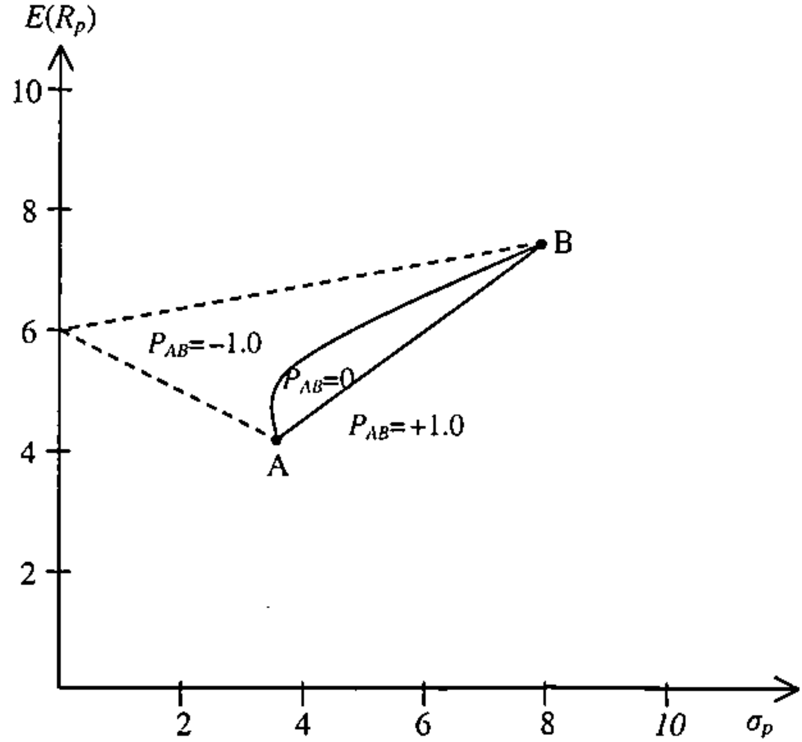
2. A σ_p lineáris az I. esetben, ahol $\rho_{AB} = +1.0$, nem lineáris a II. esetben, a III. esetben pedig látható, hogy $\rho_{AB} = -1.0$ esetén a kockázat diverzifikációval eltüntethető.

3. Az ábrák utolsó oszlopa az *A* és *B* értékpapírból álló portfoliók elérhető sorozatát mutatja. Csupán két értékpapír esetén az elérhető sorozat görbe vagy egyenes, de nem terület. Kettőnél több értékpapír esetén a kombinációk halmaza területenként illusztrálható.

4. A II. és III. esetben az elérhető sorozat *Z* és *B* közötti része hatékonynak tekinthető, az *A* és *Z* közötti rész nem hatékony. Az I. esetben az elérhető sorozat egésze hatékony.

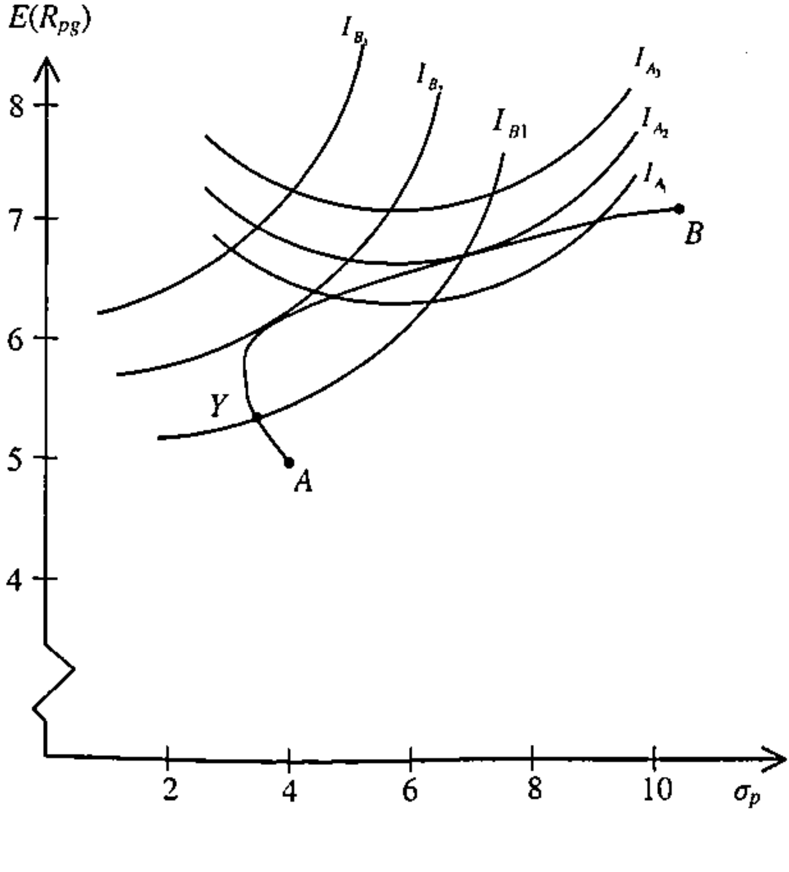
A 75. ábra az elérhető sorozatot a három esetre együtt mutatja be, összehasonlítási céllal. Az ábra külön érdekessége annak világos érzékeltetése, hogy minél kisebb a ρ_{AB} értéke, annál jobb a létrehozható portfolió.

75. ábra Portfoliók elérhető sorozata háromféle korrelációnál



Bármely specifikus megtérülési ráta mellett a σ_p értéke ρ_{AB} = -1.0 mellett a legkisebb, ρ_{AB}=+1.0 értéknél a legnagyobb, ugyanakkor a kockázat bármely specifikus szintjénél a megtérülési ráta ρ_{AB} = -1.0 esetén a legnagyobb és ρ_{AB}=+1.0 értéknél a legkisebb (kivéve a *B* pontot, ahová az összes görbe konvergál, mivel az összes beruházás 100%-ban *B* értékpapírba irányul. Nyilvánvaló, hogy *A* és *B* értékpapír között csupán egyetlen korrelációs koefficiens létezhet, feltételezzük, hogy ez aktuálisan ρ_{AB}=0. Így megmarad feladatként a legjobb portfolió kiválasztása (azaz az összes forrás egyes értékpapírokba fektetett arányának meghatározása). E döntés függ az egyes befektetők kockázati tartózkodásától, amit azok kockázat-megtérülés közömbösségi görbéi mutatnak. A 76. ábra a portfoliók elérhető sorozatát mutatja az előző ábráról véve, továbbá *A* és *B* befektető közömbösségi görbe-sorozatát.

76. ábra *Az optimális portfolió kiválasztása*



Az adott helyzetben *A* befektető a 7.2%-os várható megtérülést σ_p=7.3%-os kockázatot ígérő portfoliót, a *B* befektető az $E(k)$=6.2% és σ_p=4.2% értékkel jellemezhető kompozíciót választja. *A* befektető portfoliója 60%-ban *A* és 40%-ban *B*, míg a *B* befektető portfoliója 27%-ban *A* és 73%-ban *B* értékpapírt tartalmaz.

6.1.2. Kapcsolat a korreláció és a várható megtérülési ráta között

Ha egy értékpapír vagy más eszköz megtérülése kisebb annál, mintha egy másik eszköz megtérülésével pozitívan korrelálna, akkor kombinálva ezt az új eszközt más eszközökkel, kedvező portfolió-hatás keletkezne. Továbbá, minél alacsonyabb a korreláció foka, annál erősebb a portfolió-hatás.

Most azt feltételezzük, hogy birtokoljuk értékpapírok portfolióját $E(R_p)=8\%$ és $\sigma_p=6\%$ jellemzőkkel. Értesülünk egy új, Z értékpapírról, amelynek 8%-os várható megtérülése és $\sigma_Z=6\%$-os kockázata van, s a Z megtérülése a jelenlegi portfolióval –0.5 értékű korrelációt mutat. Ha a jelenlegi portfolió egy részét eladnánk, s a bevételt Z értékpapír vásárlására fordítanánk, akkor a várható megtérülés 8%-os maradna, a portfolió kockázat azonban csökkenne, így tehát e lépést érdemes megtenni. Amennyiben mások kedvező hatást érnének el Z értékpapír birtoklásával, akkor azok szintén törekedni fognak megvásárolni, s eme kollektív hatás eredményeként Z ára emelkedni, várható hozama pedig csökkenni fog. Ebből azt látjuk, hogy adott értékpapír más papírokhoz kapcsoló korrelációjának hatása van a piacon levő értékpapír megtérülési rátájára. A portfolió-elmélet eme aspektusa nagyon fontos egy vállalati értékpapír kockázatosságának elemzésében, mivel az érinti a tőkeköltséget.

6.1.3. Értékpapír-kockázat versus portfolió-kockázat

Empirikus elemzéssel szemléletesen bemutatható a diverzifikációs hatás.[58] 200 különféle piaci részvény mintáját hat alcsoportra osztották Standard and Poor minősítési rangsor alapján. Majd az alcsoportokból véletlenszerű kiválasztással portfoliókat képeztek, azonos portfolió súlyokat alkalmazva mindegyik értékpapírra. Az első alcsoportra (A + minőségű részvények) az alábbi tábla összegzi a diverzifikáció hatásait.

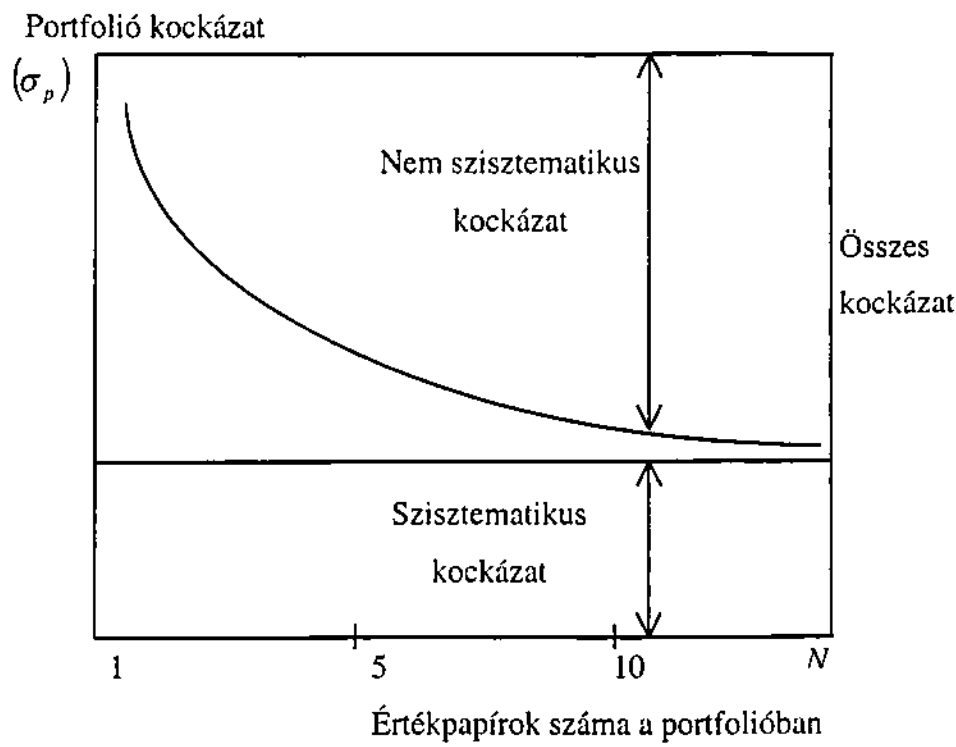
70. tábla *A portfolió-kockázat csökkentése diverzifikáció révén*

Értékpapírok száma a portfolióban	**Portfolió megtérülés szórása (σ_p) (%/hó)**	**Korreláció a piaci indexszel**
1	7.0	0.54
2	5.0	0.63
3	4.8	0.75
4	4.6	0.77
5	4.6	0.79
10	4.2	0.85
15	4.0	0.88
20	3.9	0.89

[58] Wagner, W.H. and Lau, S.C.: The effect of diversification on risk. Financial Analyst's Journal (November-December 1971) pp. 48-83.

Amint növekszik a portfolióban benne foglalt értékpapírok száma, a portfolió megtérülés szórása úgy csökken, bár ez egyre mérséklődő arányban történik, s a további kockázat-csökkenés viszonylag kicsi lesz azt követően, hogy 10 értékpapír bennfoglaltatik a portfolióban. Az adatok jól tükrözik, hogy még a jól diverzifikált portfoliók is tartalmaznak bizonyos mérvű kockázatot, ami diverzifikációval nem tüntethető el. E fennálló jelenséget általánosító jelleggel az alábbi tábla mutatja be.

77. ábra *Kockázat-csökkentés diverzifikáció révén*



A σ_p portfolió kockázat két részből tevődik össze. A diverzifikációval csökkenthető részt nem szisztematikus kockázatnak, a nem eliminálható részt pedig piacalapú (szisztematikus) kockázatnak nevezik.[59]

Most térjünk vissza az utóbbi tábla harmadik oszlopához. Tudnunk kell, hogy ha az összes portfolióba foglalt értékpapírok száma növekszik, a szórás pedig csökken, akkor a portfolió megtérülés és a piaci indexen nyerhető megtérülés közötti korreláció erősödik. Így egy fokozottan diverzifikált portfolió erősen korrelál a piaccal, s annak kockázata egyik oldalról jórészt szisztematikus, másrészt az átfogó piaci mozgások által generált. A kockázatra vonatkozó analízis eredményei a következő pontokban foglalhatók össze:

1. A portfolió σ_p kockázata megtérülési rátájának szórásával mérhető.
2. Az egyedi értékpapír kockázata azonos a portfolió kockázatához való hozzájárulásával.
3. Egy σ_i értékpapír szórása releváns kockázati mérték egy olyan nem diverzifikált befektető számára, aki csupán i értékpapírt birtokol.
4. Egy értékpapír szórása egyaránt tükrözi a diverzifikációval eltüntethető nem szisztematikus, és a szisztematikus vagy piacalapú kockázatot; a jól diverzifikált befektető számára csupán az értékpapír szisztematikus komponense releváns, így a kockázati prémiumban csak ez az elem tükröződik.

[59] A piaci gyakorlatban rendkívül nehéz nem korreláló vagy negatív korrelációjú részvényeket találni, hiszen valamilyen mérvű kockázat bennmarad bármilyen részvényportfolióban.

5. Az értékpapír szisztematikus kockázata saját ingadozásának az általános piaci változásokhoz viszonyításával mérhető.

Hatékony versus nem hatékony portfoliók

Sharpe a következő relációt származtatta a teljes kockázat komponensei, a nem szisztematikus diverzifikálható és a szisztematikus, nem diverzifikálható kockázat között.

$$\left(\sigma_j^2\right) = \left(\sigma_j^s\right)^2 + \left(\sigma_j^{NS}\right)^2$$

ahol

$\sigma_j = R_j$ szórása

$\sigma_j^s = j$ értékpapír szisztematikus kockázata $= \beta_j \sigma_M$

$\sigma_j^{NS} = j$ értékpapír nem szisztematikus kockázata

E reláció a portfoliókra ugyancsak alkalmazható:

$$\left(\sigma_p^2\right) = \left(\sigma_p^s\right)^2 + \left(\sigma_p^{NS}\right)^2$$

ahol

$\sigma_p =$ a portfolió várható megtérülésének szórása

$\sigma_p^s =$ a portfolió szisztematikus kockázata

$\sigma_p^{NS} =$ portfolió nem szisztematikus kockázata

A szisztematikus kockázat és az ingadozás közötti kapcsolat értékpapírokra és portfoliókra ugyanolyan. Eszerint:

$$\sigma_p^2 = \beta_p \sigma_M$$

Hatékony portfolióknak nem lehet nem szisztematikus kockázata. Így az akár kevés nem szisztematikus kockázatot is tartalmazó portfolió, mivel abból a nem piacalapú kockázat teljesen nem tűnt el, nem hatékonynak tekinthető. Az egyenlet az értékpapír-megtérülés varianciáját két részre osztja:

- $(\sigma_j^s)^2$ kockázati komponensre, amely $(\beta_j \sigma_M)^2$ alakban a béta koefficiens és a piaci megtérülés variabilitásának szorzata
- $(\sigma_j^{NS})^2$ nem szisztematikus reziduális komponensre.

A nem szisztematikus komponens diverzifikációval eliminálható; a szisztematikus komponens csak úgy csökkenthető, ha változik a vállalat piachoz fűződő korrelációja, azaz megkísérlik megváltoztatni a béta koefficiens értékét a beruházási vagy finanszírozási politika módosításán keresztül. Mindezek logikus konklúziója, hogy ha a befektető portfolióban gondolkodik, akkor nem kell aggódnia a nem szisztematikus kockázat miatt, mivel az diverzifikációval eltüntethető. Így a befektető az egyenletben csak a szisztematikus kockázatot kell hogy figyelembe vegye. *Mivel a piac varianciája adott, így az értékpapírok közötti relatív kockázatosság determinánsa a béta koefficiens.*

Az ilyen típusú analízis alapot szolgáltat a CAPM modell kifejlesztéséhez. Az eszköz portfoliónak a megtérülés szórásával mért kockázatossága általában kisebb, mint az egyedi eszközök szórással mért átlagos kockázata. Mivel a befektetők általában egyetlen eszköz helyett értékpapírok portfolióját birtokolják, így okszerű egy értékpapír kockázatosságát a portfolió kockázatához való hozzájárulásként tekinteni ahelyett, hogy kockázatát izolált birtoklása alapján mérlegelné. A CAPM modellnek az a legfőbb hozzájárulása, hogy az értékpapír kockázatának mértékét portfolió értelemben kezeli.

6.3. A CAPM modell alapvető feltevései

1. Az összes befektető a végponti gazdagság várható hasznosságának egyperiódusú maximalizálására törekszik; ők az alternatív portfoliók közül a megtérülés várható értéke és varianciája (szórása) alapján választanak.

2. Az összes befektető korlátlanul vehet kölcsön, vagy adhat kölcsön kívülről adott, R_F kockázatmentes kamatráta mellett, s egyetlen eszköz esetében sincs korlátozva a fedezetlen eladás (short sales)

3. Az összes befektetőnek azonos szubjektív becslése van a várható értékről, a varianciáról és az összes eszköz megtérülése közötti kovarianciáról; azaz a befektetőknek homogén várakozásaik vannak.

4. Az összes eszköz korlátlanul osztható, likvid (azaz az aktuális áron piacképes), s nincsenek tranzakciós költségek.

5. Nincsenek adók.

6. Az összes befektető árelfogadó.

7. Az összes eszköz mennyisége korlátozott.

Bár e feltevések szigorúan korlátozónak tűnnek, ugyanakkor hasonlatosak azokhoz, amelyek a vállalat standard közgazdasági elméletét, illetve Modigliani-Miller, Gordon és mások alapvető modelljeit megalapozzák. Továbbá a szakirodalom ama elméleti kiterjesztései, amelyek a CAPM alapfeltevéseinek feloldására törekszenek, általában olyan eredményekhez vezetnek, amelyek konzisztensek az alapelmélettel.

6.3.1. Átváltás kockázat és megtérülés között[60]

Mivel a befektetők csoportként kockázat-kerülők, minél nagyobb az értékpapír kockázata, annál nagyobb a megkövetelt megtérülési ráta. A 78. ábra ezt a koncepciót illusztrálja. Függőleges tengelyén a megtérülési ráta, a vízszintes tengelyén a kockázat szerepel.

Az egyenesen lévő értékpapírok egyensúlyban vannak.

$$R_i^* = R_F + \rho_i = R_F + \lambda^{**}\beta_j = R_F + \beta_j(R_M - R_F)$$

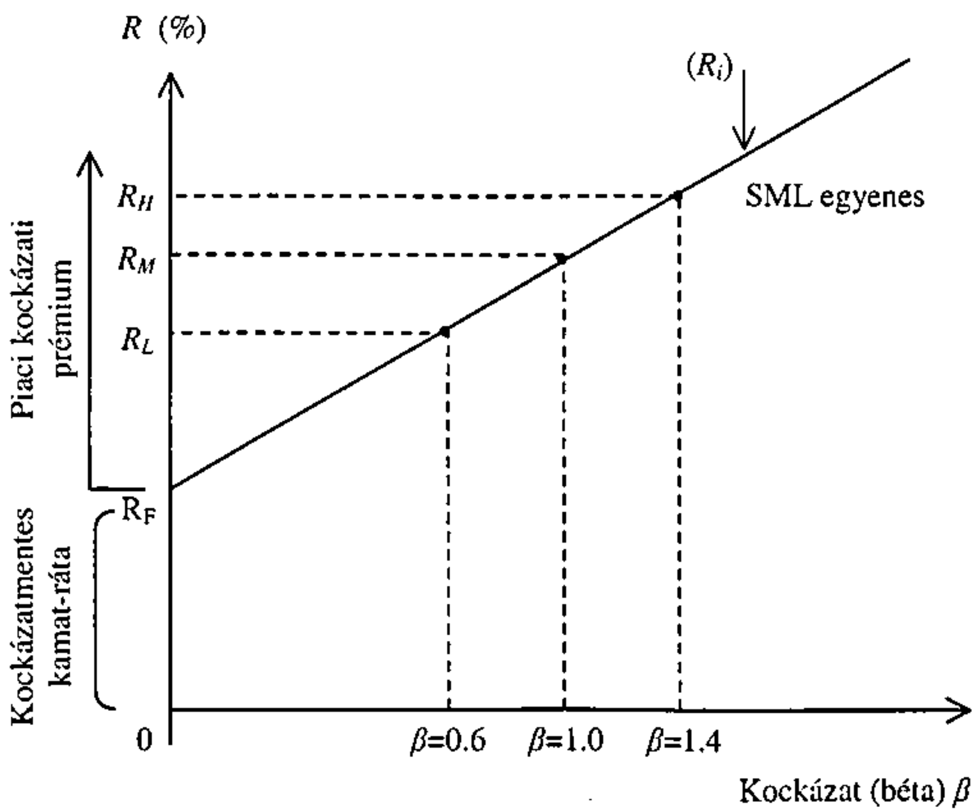
$$\lambda^{**} = (R_M - R_F)$$

A kockázat és a megtérülési ráta közötti kapcsolat illusztrálására szolgáló grafikon SML egyenesként definiálható. Az SML egyenes és a függőleges tengely metszéspontja az R_F kockázatmentes megtérülés, általában a

[60] Mossin, J.: Equilibrium in a Capital Asset Market. Econometrica, October 1965. c. cikkében a kockázatos eszközöket forgalmazó piac tulajdonságait vizsgálja a piaci átváltás általános egyensúlyi modelljére alapozva. Olyan kritériumokat vizsgál, amelyeket az egyedi befektetők maximalizálni igyekeznek, tekintettel a portfoliók várható hozamára és annak varianciájára. Ugyanő igazolta, hogy az általános egyensúly magában foglalja olyan piaci egyenes létezését, amely összekapcsolja a várható hozamot a megtérülés szórásával. A kockázat árának koncepcióját az egyenes alakjából kiindulva vizsgálja.

kormányzati értékpapírokon nyerhető megtérülés. A kockázatmentes értékpapírok béta koefficiense egyenlő nullával. Mivel a kockázatmentes értékpapírokon nyerhető megtérülés fix és konstans, így az egyáltalán nem mozog együtt a piaccal. Egy „átlagos" értékpapírnak 1.0 értékű a bétája, s az ilyen befektetésnek R_M a megkövetelt megtérülési rátája, ami egyenlő az átlagos piaci megtérüléssel. Egy viszonylag alacsony kockázatú értékpapír bétája lehet 0.6, megkövetelt megtérülési rátája pedig R_L, míg a magas kockázatú értékpapír bétája 1.4, megkövetelt megtérülése pedig R_H.

78. ábra Átváltás kockázat és megtérülés között: az SML egyenes



6.3.2. Portfolió béták

Hangsúlyozni kell, hogy az alacsony bétájú értékpapírokból alkotott portfolió is alacsony bétájú lesz, mivel az értékpapírok bármely kompenzációjának bétája az alkotó értékpapírok súlyozott átlaga:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_j$$

Itt a β_p a portfolió béta, amely azt tükrözi, hogy a portfolió mennyire együtt ingadozik a piaci indexszel. A w_i súlyarány a portfolió i-edik értékpapírba invesztált hányada, a β_j a j-edik értékpapír béta koefficiense. A biztosítási társaságok nyugdíjalapjainak és más nagy portfolióknak a béta koefficiense azért kerül kiszámításra, hogy meghatározható legyen a portfoliók kockázatossága, s az alapok felépítése azt szolgálja, hogy a befektetőknek meghatározott fokú kockázatot biztosítsanak. Azt még korai volna megítélni, hogy a béták mennyire reálisan mérik a hosszú távú kockázatot, a finanszírozási gyakorlatban ezt mégis alkalmazzák az értékpapír szelekcióban és a portfolió-formálásban.

6.3.3. A tőkeköltség dinamikája

Bármely j értékpapír várható megtérülése egyenlő a kockázatmentes megtérülési ráta és a kockázati prémium összegével: $k_j = R_F + \gamma$. Mivel a piac egészére vonatkozó kockázati prémium $\left(k_M - R_F\right)$, így bármely j értékpapírra a következő egyenlet írható fel:

$$\bar{k}_j = R_F + \beta_j\left(\bar{k}_M - R_F\right)^{61} \qquad (7)$$

Szavakban kifejezve: valamely értékpapír várható megtérülése úgy határozható meg, hogy a kockázatmentes megtérülési rátához hozzáadjuk az értékpapír béta koefficiens és a piac egészére vonatkozó kockázati prémium szorzatát.

Ha a béta 1.0-nél kisebb, akkor az értékpapírnak az átlagosnál kisebb kockázati prémiuma van, ha viszont a béta 1.0-nél nagyobb, akkor az ellenkező áll fenn. A kamatlábak időben változnak, s ha ez bekövetkezik, akkor az R_F változása visszatükröződik a részvénytőke költségében mind az „átlagos" értékpapírra (K_M), mind az egyedi értékpapírra (K_i). Ilyen változások idézik elő az utóbbi ábrán a tőkepiaci egyenes elmozdulását. Az R_F metszéspont a függőleges tengelyen felfelé és lefelé egyaránt elmozdulhat, míg az egyenes meredeksége növekedhet, csökkenhet s változatlan is maradhat.[62]

Az SML egyenes meredekségében tükröződő kockázati prémium időben ugyancsak változó lehet. Ha a befektetők pesszimisták és aggódók, akkor az ábra SML egyenese meredekebb lesz, a kockázat magasabb árára utalva. Ha pedig a befektetők kockázati tartózkodása kisebb, akkor a kocká-

[61] A (7) egyenlet levezetése a következők szerint történik. Először azt vesszük figyelembe, hogy a kockázati prémium lineáris függvénye a béta koefficiensnek, azaz $\gamma_j = \lambda^{**}\beta_j$. Ennek megfelelően $k_j = R_F + \lambda^{**}\beta_j$. Definíció szerint a piac egészére vonatkozó béta értéke 1.0, ugyanis az átlagos értékpapírnak a piaccal összhangban kell mozogni, s ha ez fennáll, akkor a béta 1.0. Ezért eme átlagos vagy piaci kockázati prémiumnak λ^{**}-gal kell egyenlőnek lenni, azaz $\lambda^{**} = \gamma_M$. Így $R_j = R_F + \beta_j\gamma_M$, s mivel a piaci kockázati prémium $(R_M - R_F)$, így bármely értékpapírra igaz a $R_j = R_F + \beta_j(\bar{R}_M - R_F)$ összefüggés.

[62] Litzenberger, R.H. and Budd, A.P.: Secular trends in risk premium. Journal of Finance, September 1972 pp. 857-864.

zat ára csökkenő, az egyenes meredeksége pedig enyhébb lesz. Néhány alapos munka kimutatta, hogy a megtérülési ráta a kockázattal növekvő. Ugyanakkor az empirikus vizsgálatok nem mutattak ki világos és egyértelmű kapcsolatot, sőt a vizsgálati periódustól és az alkalmazott metodológiától függően egyszerre több SML egyenes írható fel. Ez az instabilitás két okkal magyarázható: *a piaci egyenes időbeni változását a kamatlábak és a befektetői kilátások módosulása egyaránt előidézheti, így az időben változatlan piaci egyenes volna szokatlan.* Másodszor, arra kényszerülünk, hogy a piaci egyenest tökéletlen adatokra alapozva becsüljük, s ahol az adatokban hibák vannak, a becslési problémák csak növekszenek.

6.4. Kockázat, megtérülés és egyensúly

Sharpe és Lintner olyan modellt javasolt, amely két kérdés tisztázására irányult. Egyrészt arra, hogy mivel lehet megfelelően mérni a tőkevagyon kockázatát, másrészt annak eldöntésére, hogy milyen jellegű egyensúlyi kapcsolat áll fenn az eszközök kockázatának így meghatározott mértéke és egyperiódusú várható megtérülése között. Bizonyítható, hogy valójában nincs ellentmondás a két modell között. A modelleket megfelelően értelmezve ugyanazt a kockázati mérőszámot kapjuk az egyes eszközökre, és ugyanahhoz az eredményhez jutunk a vagyon kockázata és egyperiódusú megtérülése közötti összefüggést illetően.

6.4.1. Egyensúly a Sharpe modellben

Sharpe eszközértékelési modellje az alábbi feltételezéseken alapszik.

a. Az eszközök piaca kockázat-kerülő befektetőkből áll, akik valamenynyien a periódusvégi gazdagság egyperiódusú várható hasznosságának maximalizálására törekszenek, és szerintük lehetséges optimális portfolió-döntéseket hozni, kizárólag a különböző rendelkezésre álló portfoliókhoz kapcsolódó periódusvégi gazdagság valószínűségi eloszlásának várható értéke és szórása alapján. Ha egy eszköz illetve portfolió egyperiódusú megtérülését az időszak vagyonváltozása és az eszközbe illetve portfolióba befektetett eredeti vagyon hányadosaként definiáljuk, akkor ez a feltételezés azt jelenti, hogy a befektetők optimális portfolió-döntéseket hozhatnak az egyperiódusú portfolió eloszlásának várható értéke és szórása alapján.

b. Minden befektető ugyanakkora döntési időszakot vesz alapul és eme közös időhorizont alatt létezik az egyperiódusú eszköz és portfolió megtérülési eloszlásának várható értéke és szórása.

c. A tőkepiacok tökéletesek abban az értelemben, hogy minden eszköz a végtelenig osztható, nincsenek tranzakciós költségek és adók, az információ díjmentes és mindenki számára elérhető, továbbá a kölcsönadási és kölcsönvételi kamatráták egymással egyenlőek, s minden befektető számára ugyanakkorák.

d. A várakozások és a portfolió lehetőségek az egész piacon homogének, vagyis mindegyik befektető portfolió lehetőségei ugyanolyanok, a különböző portfoliók által biztosított várható megtérülés és szórás értékeket azonos módon értékelik.

Az (a) feltétel az elemzést Markowitz egyperiódusú várható érték-szórás portfolió modelljének szerkezetébe helyezi. Tobin[63] bebizonyította, hogy e reláció akkor is megfelelő, ha a portfolió megtérülés normális eloszlású és akkor is, ha a megtérülési függvények befektetői hasznossága a legjobban másodfokú egyenlettel közelíthető meg. A kockázat-kerülő optimális portfoliója mindkét esetben egy várható érték-szórás hatékonysági csomag komponense lesz, ahol a hatékony portfoliónak az alábbi feltételeket kell teljesíteni:

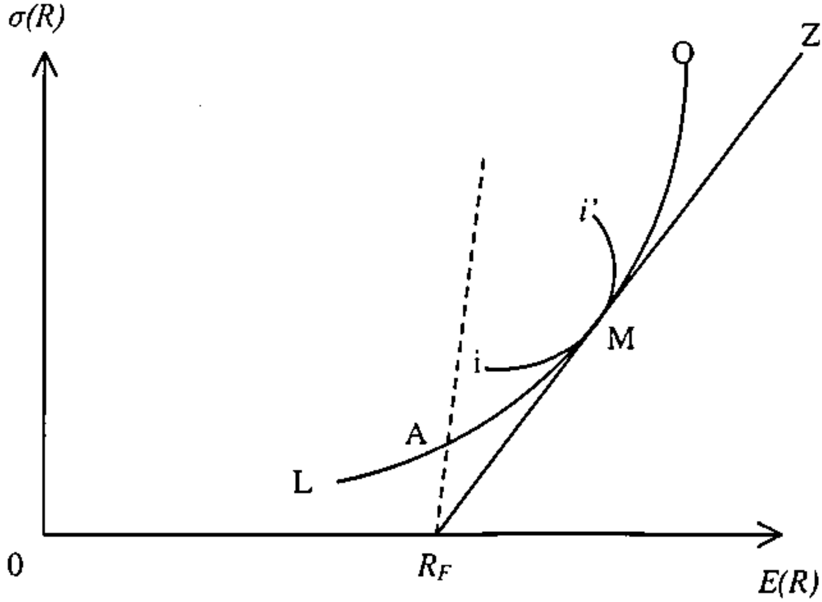
Ha bármely más portfolió egyperiódusú megtérülésének szórása kisebb, akkor annak várható megtérülése is alacsonyabb kell hogy legyen;

Ha bármely más portfolió nagyobb várható megtérülésű, akkor annak szórása is nagyobb kell hogy legyen;

A Sharpe modell (b), (c) és (d) feltétele standardizálja az összes befektető számára elérhető portfolió lehetőségeket. A (b) feltétel azt jelenti, hogy az összes befektető portfolió döntése egyidőben történik és az e döntések meghozatalakor figyelembe vett időhorizont minden esetben azonos. A (c) és (d) feltétel standardizálja mind a lehetséges portfoliók körét, mind pedig a befektetői értékelést az egyes portfolió elemek várható megtérülés-szórás kombinációit illetően. A 79. ábra a befektetők összessége előtt álló helyzetet mutatja.

[63] Tobin, I.: Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. The Review of Economic Studies, February 1958.

79. ábra *A befektetők összessége előtt álló helyzet*



A vízszintes tengely a közös időhorizont alatti $E(R)$ várható megtérülést, a függőleges tengely pedig a megtérülés $\sigma(R)$ szórását méri. Ha figyelmünket azokra a portfoliókra összpontosítjuk, amelyek kizárólag kockázatos eszközöket tartalmaznak, akkor – Sharpe bizonyítása értelmében – a várható megtérülés-szórás hatékony portfoliók sorozata egy olyan, origóra konvex görbén helyezkedik el, mint az ábrán az *LMO* görbe.

A modell azt is feltételezi, hogy a kockázatos eszközökből álló portfolió-lehetőségeken kívül létezik *F* kockázatmentes eszköz is, amely a közös időhorizontra R_F biztos megtérülést ad; feltételezzük továbbá, hogy a befektető kölcsönt felvenni és kölcsönt nyújtani is R_F kockázatmentes ráta mellett tud. Vegyük a *C* jelű portfoliókat, amelyek *F* kockázatmentes eszköz és egy kockázatos eszközökből álló tetszőleges *A* portfolió kombinációit tartalmazzák. E kombinációk az alábbi várható megtérülés és szórás értéket adják:

$$E(R_c) = wR_F + (1-w)E(R_A) \quad w \leq 1 \tag{1}$$

$$\sigma_c = (1-w)\sigma_A \tag{2}$$

ahol w a rendelkezésre álló tőkének az a része, amelyet F kockázatmentes eszközbe fektetnek, $(1\text{-}w)$ pedig az A portfolióba befektetett rész. A deriválási láncszabály alkalmazásával a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{d\sigma_c}{dE(R_c)} = \frac{d\sigma_c}{dw} \cdot \frac{dw}{dE(R_c)} = \frac{\sigma(R_A)}{E(R_A) - R_F} \tag{4}$$

Ez azt jelenti, hogy az F és A eszközt tartalmazó portfoliók várható megtérülés-szórás kombinációi egy olyan egyenesen kell hogy elhelyezkedjenek, amely áthalad az R_F és A ponton az utóbbi ábrán.

Így könnyű meghatározni a hatékony portfolió-sorozat kölcsönvételi-kölcsönadási lehetőségeinek hatásait. Vegyük az ábra R_FMZ egyenesét, amely M pontban érinti az LMO görbét. Ez az egyenes azoknak a portfolióknak a várható megtérülés-szórás kombinációit tartalmazza, amelyeknél $w(w \leq 1)$ részt fektettek F kockázatmentes eszközbe és $1-w$ hányadot pedig a kockázatos eszközökből álló M portfolióba. R_F pontnál $w=1$, M pontnál pedig $w=0$.

Az R_FMZ egyenes M pont alatti része kölcsönadási portfoliókat ($w>0$) tartalmaz, az egyenes M feletti része pedig kölcsönvételi portfoliókat ($w<0$) foglal magában. Adott $\sigma(R)$ szinten az R_FMZ egyenesen vannak olyan portfoliók, amelyek nagyobb $E(R)$ értékeket eredményeznek, mint az *LMO* görbén fekvő ugyanolyan portfoliók. Az *LMO* görbén elhelyezkedő portfoliókat tehát (*M* pontot kivéve) uralják az R_FMZ egyenes portfoliói, amelyek jelen esetben a hatékony sorozatot jelentik.

Most már meghatározhatjuk azokat a feltételeket, amelyek az eszközök piaci egyensúlyához szükségesek. Mivel minden befektető ugyanakkora időhorizontot vesz alapul és azonos módon érzékeli a portfolió lehetőségeket, így a Sharpe modell azt eredményezi, hogy mindegyikük ugyanazzal az ábrával áll szemben a hatékony portfolió sorozatot illetően. Ha ez történetesen a fentebb bemutatott ábra, akkor az összes befektető számára az R_FMZ egyenes tartalmazza az összes hatékony portfoliót. A kockázatosabb hatékony portfoliók kölcsönfelvételt tartalmaznak (w<0) és az összes rendelkezésre álló tőkét (beleértve a kölcsöntőkét is) kockázatos *M* kombinációba fektetik. A kevésbé kockázatos hatékony portfoliók magukban foglalnak valamennyi R_F kamatráta mellett kölcsönadott tőkét és a maradékot fektetik az *M* piaci portfolióba. Az, hogy egy befektető milyen portfoliót választ, függ a befektető kockázathoz és megtérüléshez való viszonyulásától, az optimális portfolió azonban minden befektető számára olyan kompozíció, amely *F* kockázatmentes eszköz és a kockázatos eszközökből álló *M* portfolió valamilyen kombinációja. *Senki számára sem létezik olyan ösztönző, hogy olyan kockázatos eszközökbe fektessen be, amelyek nem szerepelnek az M portfolióban.* Ha *M* nem tartalmazza a piacon forgalmazott összes kockázatos eszközt, vagy ha ezeket nem pontosan olyan arányban tartalmazza, ami a legelőnyösebb, akkor lesz néhány olyan eszköz, amelyet senki sem vásárol meg. Ez összeegyeztethetetlen az egyensúllyal, mivel abban a helyzetben az összes eszköznek valaki tulajdonában kell lennie.

Ha tehát a fenti ábra egyensúlyi helyzetet ábrázol, akkor az *M* portfolió, vagyis *M* tartalmazza a piacon levő összes kockázatos eszközt, mégpedig mindegyiket akkora arányban, amekkora részt az egyes portfoliók piaci értéke képvisel az összes eszköz piaci értékéből. Ezen kívül az R_F kockázatmentes rátának akkorának kell lenni, hogy a nettó piaci kölcsönzés 0 legyen, vagyis R_F kamatráta mellett, a befektetők által kölcsönvenni szándékozott teljes tőke egyenlő ama mennyiséggel, amit mások kölcsönadni hajlandóak.

6.4.2. A kockázat és megtérülés közötti összefüggés[64]

Most áttekintjük a Sharpe féle tőkeértékelési modell főbb problémáit.

a. A kockázat mértékének meghatározása konzisztens a portfolió és várható hasznosság modellekkel.

b. A kockázat és a várható megtérülés közötti egyensúlyi kapcsolat egzaktan levezethető.

Minden kockázatos *i* eszközhöz tartozik egy görbe, mint az iM_i' alakzat a fenti ábrán, amely $E(R)$ és $\sigma(R)$ kombinációit tartalmazza, amelyeket úgy nyerhetünk, hogy *i* eszközből és *M* piaci portfolióból képezünk befektetési kompozíciókat. Ha *w* az *i* eszközbe fektetett tőke aránya, akkor az ilyen *C* portfoliók várható megtérülése az alábbi módon fejezhető ki:

[64] Fama, E. F.: Risk, Return and Equilibrium: Some Clarifying Comments. Journal of Finance, March 1968. c. cikke egybeveti a CAPM modell Sharpe és Lintner-féle változatát és kimutatja, hogy nincs konfliktus a két megközelítés között. Fama elemzi a kockázatot és megtérülést mindkét esetben, s általános aspektusokat alkalmaz a piaci modellre.

$$E(R_r) = wR_i + (1-w)R_M \quad (w \le 1) \tag{4}$$

Most tekintsük azokat a D portfoliókat, amelyek w részét a kockázatmentes F eszközbe, (1-w) hányadát pedig M piaci portfolióba fektették. E portfoliók várható megtérülését az alábbi módon kapjuk meg:

$$E(R_D) = wR_F + (1-w)R_M \tag{5}$$

Mint már korábban kifejtettük, e portfoliók várható megtérülése és szórása a fenti ábra R_FMZ hatékony sorozatot tartalmazó egyenesére esik. Egyszerűen bizonyítható, hogy mind az iM_i', mind pedig az LMO függvénye differenciálható M pontban. Mivel az R_FMZ a hatékony sorozat, ezért az iM_i' és LMO görbe M pontban egymást szükségképpen érinti, vagyis:

$$\frac{d\sigma_c}{dE(R_c)} = \frac{d\sigma_D}{dE(R_D)} \quad \text{ha } w = 0 \tag{6}$$

A (6) képlet közgazdasági magyarázata jól ismert. A $d\sigma_D / dE(R_D)$ az R_FMZ hatékony sorozatmenti várható értékekhez tartozó *szórások átváltási határárfolyama*. Mivel mindegyik befektető ugyanúgy vélekedik a hatékony sorozatról, ezért a $d\sigma_D / dE(R_D)$ hányados valójában a piaci átváltási árfolyam.

A másik oldalon a $d\sigma_c / dE(R_c)$ a piaci portfolió várható értékeihez tartozó szórás átváltási határárfolyama, mivel i eszköz piaci portfolióbeli aránya. Egyensúly esetén az i eszköz iránti többlet kereslet zéró. Ez azonban csak akkor áll fenn, ha w=0 a (4) képletben, azaz i eszköz várható megtérülése olyan, hogy a $d\sigma_c / dE(R_c)$ átváltási határárfolyam egyenlő a

$d\sigma_D / dE(R_D)$ piaci átváltási árfolyammal. Sharpe meglátása abban állt, hogy a (6) egyensúlyi feltételből következik mind az *i* eszköz kockázatának mérése, mind pedig a kockázat-várható megtérülés közti egyensúlyi kapcsolat. A láncszabály alkalmazásával levezethető a $d\sigma_c / dE(R_c)$ és $d\sigma_D / dE(R_D)$ kifejezés, majd $w=0$ értéknél vesszük a kapott eredményt és így a (6) kifejezésből az alábbit kapjuk:

$$\begin{gathered}\frac{d\sigma_c}{dE(R_c)} = \frac{d\sigma_c}{dw} \cdot \frac{dw}{dE(R_c)} \text{ és } \frac{d\sigma_D}{dE(R_D)} = \frac{d\sigma_D}{dw} \cdot \frac{dw}{dE(R_D)} \\ \frac{COV(R_i R_M) - \sigma_M^2}{[E(R_i) - E(R_M)]\sigma_M} = \frac{\sigma_M}{E(R_M) - R_F}\end{gathered} \tag{7}$$

Ahhoz, hogy kifejezzük *i* eszköz várható értékét, elegendő a (7) egyenletet $E(R_i)$-re megoldani:

$$E(R_i) = R_F + \frac{[E(R_M) - R_F]}{\sigma_M^2} COV(R_i R_M) \quad i = 1,2....N \tag{8}$$

ahol N a piacon levő összes eszköz száma.

Ha az *i* eszköz várható megtérülésében rejlő „kockázati prémiumot" fejezzük ki, akkor a következőt kapjuk:

$$E(R_i) - R_F = \frac{[E(R_M) - R_F]}{\sigma_M^2} COV(R_i R_M) = \lambda COV(R_i R_M) \qquad i = 1,2...N \tag{9}$$

A (9) képlet a piacon levő összes N eszközre érvényes, és a λ értéke, ami a piaci portfolió várható értékében rejlő kockázati prémium és e megtérülés varianciájának hányadosa, minden eszköznél ugyanakkora. Tehát a különböző eszközök kockázati prémiuma közötti különbség teljes mértékben a (9) képlet kovariancia tagjától függ. *A λ együttható egységnyi kockázat piaci árának tekinthető, így i eszköz kockázatának megfelelő mértéke $COV(R_i R_M)$.*

Ez a kifejezés ezért közelebbi tanulmányozást igényel. Az eljárás során azt tapasztaljuk, hogy a (9) képlet Sharpe levezetéséből származik, és megegyezik Lintner kockázati prémium képletével.

Abból indulunk ki, hogy $E(R_M)$ definíció szerint a piaci portfolió megtérülése, a piacon levő összes egyedi eszköz megtérülésének súlyozott átlaga, vagyis:

$$E(R_M) = \sum_{j=1}^{N} w_j R_j \tag{10}$$

ahol w_j az összes eszköz teljes piaci értékének j eszközre eső része. Ebből következően:

$$\begin{aligned} COV\ (R_i R_M) &= E\{[R_M - E(R_M)][R_i - E(R_i)]\} \\ &= E\left\{\sum_{j=1}^{N} w_j [R_j - E(R_j)][R_i - E(R_i)]\right\} \\ &= \sum_{j=1}^{N} w_j COV\ (R_j R_i) \end{aligned} \tag{11}$$

Ha a (11) kifejezést a (9) képletbe helyettesítjük, akkor a következőt kapjuk:

$$E(R_i)-R_F=\lambda\sum_{j=1}^{N}w_jCOV(R_jR_i)\quad i=1,2....N \tag{12}$$

amely pontosan Lintner egyenlete, ami azonban Sharpe modelljéből került levezetésre.

Sharpe modelljének összefüggésében a (12) képlet tulajdonképpen logikus. A (10) képletből kiindulva felírható az alábbi kifejezés:

$$\sigma_M^2=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}w_kw_jCOV(R_jR_k)=\sum_{k=1}^{N}w_k\sum_{j=1}^{N}w_jCOV(R_jR_k) \tag{13}$$

$k=i$ kifejezés pedig a (13) képletben az alábbi eredményt adja:

$$w_i\sum_{j=1}^{N}w_jCOV(R_jR_i)=w_iCOV(R_iR_M)$$

Így $w_iCOV(R_iR_M)$ azt mutatja meg, hogy i eszköz mennyivel járul hozzá a piaci portfolió megtérülésének varianciájához. Mivel ez a hozzájárulás (részesedés) arányos a $COV(R_iR_M)$ kovarianciával, s mivel a piaci portfolió az egyetlen sztochasztikus elem az összes hatékony portfolióban, ezért logikusan adódik, hogy i eszköz kockázati prémiuma arányos a $COV(R_iR_M)$ kovarianciával.

Megjegyezzük, hogy a (9) és (12) képlet lehetőséget ad arra, hogy rangsoroljuk a különböző eszközök várható megtérülésének kockázati prémiumát, azonban nem kapunk információt a prémium nagyságáról. Ezek az $E(R_M)-R_F$ különbségtől függnek, ami viszont a piacon levő összes befektető kockázattal és megtérüléssel szembeni magatartásától függ. Anélkül, hogy többet tudnánk a kockázattal szembeni magatartásról, csak anynyit mondhatunk, hogy az $E(R_M)-R_F$ különbségnek olyannak kell lenni, hogy egyensúly esetén az összes kockázatos eszközt megveszik és a kölcsönadási-kölcsönvételi piac üres lesz. Így tehát megfelelő értelmezéssel Sharpe és Lintner modellje azonos eredményre vezet az egyedi eszköz kockázatának megfelelő mértékét, valamint az eszköz kockázata és várható értéke közti egyensúlyi kapcsolatot illetően.

6.4.3. A kockázat és megtérülés közötti kapcsolat a piaci modellben

Sharpe a „piaci modellben", amit a tőkeértékelés modelljének bemutatására használt, feltételezi, hogy lineáris kapcsolat áll fenn az egyedi eszköz egyperiódusú megtérülése és az M portfolió megtérülése között, vagyis:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i \qquad i = 1,2....N \tag{15}$$

ahol α_i és β_i i eszköz jellemző paraméterei. Sharpe azt is feltételezi, hogy az ε_i véletlen hiba, az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

$$E(\varepsilon_i) = 0 \qquad i = 1, 2, ...N \tag{16a}$$

$$COV(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \qquad i, j = 1, 2, ...N \qquad i \neq j \tag{16b}$$

$$COV(\varepsilon_i R_M) = 0 \qquad i = 1, 2, ...N \tag{16c}$$

Tehát a feltételezés az, hogy az egyedi kockázatos eszközök megtérülése közötti egyetlen kapcsolat abból a tényből ered, hogy minden egyes eszköz megtérülése a (15) képlettel kapcsolódik az M piaci portfolió megtérüléséhez.

Ha a piaci modell (15) és (16) képletét az egyensúlyi kockázati prémium (9) és (12) képletére alkalmazzuk, akkor ez lehetőséget ad arra, hogy rámutassunk Sharpe és Lintner eredményei közti konfliktus nyilvánvaló forrására. A (15) és (16) képletből a következők adódnak:

$$COV(R_i R_M) = E\{\beta_i[R_M - E(R_M)] + \varepsilon_i[R_M - E(R_M)]\} \qquad (17a)$$

$$= \beta_i \sigma_M^2 + COV(\varepsilon_i R_M) \qquad (17b)$$

$$= \beta_i \sigma_M^2 \qquad (17c)$$

A (17c) összefüggést a (9) képletbe behelyettesítve, a következőt kapjuk:

$$E(R_i) - R_F = \beta_i \sigma_M^2 = [E(R_M) - R_F]\beta_i \quad 1,2....N \qquad (18)$$

Ha tehát a megtérülést előállító sztochasztikus eljárás olyan, mint ahogy azt a (15) és (16) képletben foglalt piaci modell leírja, akkor adott eszköz várható megtérülésének kockázati prémiuma arányos ezen eszköz β érzékenységi együtthatójával. Minél érzékenyebb az eszköz a piaci portfolió megtérülésére, annál nagyobb a kockázati prémiuma.

Sharpe a tőkeértékelési modell következtetéseinek tárgyalásakor a (18) egyenlőségre összpontosít. Nem szabad azonban elfelejteni, hogy a piaci modell egy nagyon különös eljárást feltételez az eszközök megtérülését illetően, ami nem szerepelt feltételként, amikor a kockázati prémiumra a tőkeértékelési modellben levezettük a (9) és (12) jelű általános kifejezéseket. A tőkeértékelési modell maga, ahogy a (9) és (12) képlet összegzi, sokkal általánosabb sztochasztikus eljárásokra áll fenn, mint azok, amelyeket a piaci modell és ez alapján a (18) képlet is feltételez. Ez a tény különösen jelentős, mivel látni fogjuk, hogy a (15) és (16) képlettel meghatározott piaci modell inkonzisztens.

A (18) képletet úgy kaptuk, hogy a piaci modellt alkalmaztuk a (9) képletre. Mivel a (12) és (9) képlet ugyanúgy fejezi ki i eszköz várható megtérülésének kockázati prémiumát, ezért a piaci modellt alkalmazhatjuk a (12) képletre és így a (18) kifejezéshez jutunk.

$$E(R_i)-R_F=\lambda\sum_{j=1}^{N}w_j COV(R_j R_i) \tag{19}$$

$$=\lambda\left\{\beta_i\sum_{j=1}^{N}w_j\beta_j\sigma_M^2+w_i\sigma_{\varepsilon_i}^2\right\}. \tag{20}$$

ami megegyezik Lintner képletével.

Hamarosan bizonyítjuk, hogy a piaci modellből következően $\sum w_j\beta_j=1$. Így a (20) képlet az alábbi formulára egyszerűsödik:

$$E(R_i)-R_F=\lambda\left(\beta_i\sigma_M^2+w_i\sigma_{\varepsilon_i}^2\right) \tag{21}$$

$$E(R_i)-R_F=\left[E(R_M)-R_F\right]\left[\beta_i+\frac{w_i\sigma_{\varepsilon_i}^2}{\sigma_M^2}\right] \tag{22}$$

A (22) képletben szerepel egy olyan tag, ami a $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ reziduális varianciát tartalmazza, de nincs jelen a (18) képletben és ez a Lintner és Sharpe közti ellentmondás fő forrása. Az értékelési eljárás piaci modellre történő alkalmazásakor Sharpe a (18) képlethez jut, Lintner pedig a (20), illetve az ezzel egyenértékű (22) képletet kapja eredményként. Lintner úgy véli, hogy Sharpe azt az esetet veszi figyelembe, ahol az összes reziduális variancia $\sigma^2_{\varepsilon_i}$ értéke 0. Sharpe-nak azonban nem állt szándékában ilyen korlátot szerepeltetni modelljében. Ezen kívül a (18) képlet közvetlenül a (9), (15) és (16) képletből következik és a levezetésben nem szerepel olyan feltétel, hogy a reziduális varianciák értéke 0.

A (18) és (22) képlet közti ellentmondás valójában abból ered, hogy a piaci modell leírásában inkonzisztencia található. E képletek közül egyik sem helyesen határozza meg a kockázati prémiumot. Megjegyezzük, hogy a (10) és (15) képlet együtt az alábbi eredményt adja:

$$E(R_M) = \sum_{j=1}^{N} w_j R_j = \sum_{j=1}^{N} w_j [\alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i] \tag{23}$$

Mivel az ε_i az R_M piaci megtérülés egyik tagja, így a (16c) inkonzisztens a piaci modell többi feltételével. Minthogy a (16c) képletet mind a (18), mind pedig a (22) formula levezetéséhez felhasználták, ezért ez a két kifejezés egyaránt alkalmatlan a kockázati prémium piaci modellbeli meghatározására.

Sajnos a (16c) képlet nem az egyetlen inkonzisztencia a (15), (16) és (23) képlet által meghatározott piaci modellben. Könnyen bizonyítható, hogy a (15), (16b) és (23) képlet egyidejűleg nem állhat fenn. Felidézve, hogy α_j és β_j állandó, ekkor a (23) képlet a következőt eredményezi:

$$\sum_{j=1}^{N} w_j \alpha_j = 0, \qquad \sum_{j=1}^{N} w_j \beta_j = 1, \tag{23a}$$

$$\sum_{j=1}^{N} w_j \varepsilon_j = 0. \tag{23b}$$

A (24a) kifejezésben foglalt korlátok nem jelentenek problémát, a (24b) azonban nem konzisztens a (16b) kifejezéssel, azaz nem feltételezhetnénk, hogy a véletlen hibatényezők függetlenek, s nem korlátozhatjuk nullára súlyozott összegüket.

A piaci modell egyik olyan lehetséges meghatározása, amely nem vezet a fent tárgyalt problémákhoz, az alábbi:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i \quad = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots N \tag{25a}$$

$$E(\varepsilon_i) \quad = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots N \tag{25b}$$

$$COV(\varepsilon_i \varepsilon_j) \quad = 0 \qquad i, j = 1, 2, \ldots N \qquad i \neq j \tag{25c}$$

$$COV(\varepsilon_i R_M) \quad = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots N \tag{25d}$$

Ebben a modellben az R_M úgy értelmezhető, mint egy általában fennálló piaci tényező, amely mindegyik eszköz megtérülését befolyásolja. Az R_M és a piaci portfolió megtérülése közötti kapcsolat így írható fel:

$$E(R_M) = \sum_{j=1}^{N} w_j R_j = \sum_{j=1}^{N} w_j \left[\alpha_j + \beta_j R_M + \varepsilon_j\right] \tag{26}$$

A (9) és (12) képletből egyaránt az következik, hogy ebben a modellben az *i* eszköz kockázati prémiuma így alakul:

$$E(R_i) - R_F = \lambda \sum_{j=1}^{N} w_j COV(R_j R_i)$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{N} w_j E\{(\beta_j [R_M - E(R_M)] + \varepsilon_j) \beta_i [R_M - E(R_M)] + \varepsilon_i)\} \quad (27)$$

$$E(R_i) - R_F = \lambda \left\{ \beta_i \sum_{j=1}^{N} w_j \beta_j \sigma_M^2 + w_i \sigma_{\varepsilon_i}^2 \right\}$$

amely megegyezik Lintner kockázati prémium képletével, a piaci modellnek ebben a sokkal általánosabb változatában. Ismételten fontos megjegyezni, hogy Lintner eredményei közvetlenül a (9) és (12) képletből erednek, azaz a Sharpe modellben kidolgozott általános kockázati prémium képletekből.

Empirikus bizonyítékok[65] azt mutatják, hogy nagy átlagban a $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ és a σ_M^2 megközelítően egyenlő. Így tehát a reziduális kifejezés nagyságát a (22) képletben elsősorban w_i határozza meg, vagyis az az arány, amivel *i* eszköz részesedik az összes eszköz teljes piaci értékéből. Ez általában meglehetősen alacsony β_j -hez viszonyítva, amely értéke átlagosan 1. Ezért a (18) és (22) képletben a kockázati prémium megközelítőleg azonos.

[65] Hamada, R. S.: Portfolio Analysis, Market Equilibrium and Corporate Finance. Journal of Finance, March 1969 c. cikke analizálja a Sharpe-Lintner-Mossin piaci egyensúlyi modellt a Markowitz-Tobin modell kiterjesztéseként.

Következő megjegyzésünk az, hogy mindig lehetséges r_M mérése, így

$\sum w_j \alpha_j = 0$ és $\sum w_j \beta_j = 1$, s ekkor

$$\sigma_M^2 = \sigma_M^2 + \sum_{j=1}^{N} w_j^2 \sigma_{\varepsilon_j}^2 \qquad (28)$$

A reziduális varianciák súlyozott összege azonban viszonylag kicsi σ_M^2 értékhez képest és így $\sigma_M^2 \cong \sigma_M^2$, ami azt eredményezi, hogy a (22) és (27) képletben a kockázati prémium megközelítőleg azonos.

6.5. Az egytényezős modellek áttekintése[66]

A részvényárak eseti megfigyelése feltárja, hogy ha a részvénypiaci index emelkedőben van, akkor a részvények többségének ára növekedni fog, ha viszont a piac leszálló ágba kerül, akkor a legtöbb részvény ára csökkenni fog. Ez arra mutat, hogy az értékpapírok megtérülése közötti korreláció, a piaci változásra adott közös válaszon alapul. E korreláció alkalmas mértéke úgy állítható elő, ha adott részvény hozamát viszonyítjuk a részvénypiaci index által nyújtott megtérüléshez. A piaci modell logikáját követve, adott részvény megtérülése a következők szerint írható fel:

$$\tilde{R}_i = a_i + \beta_i \tilde{R}_M$$

[66] Mossin, J.: Security Pricing and Investment Criteria in Competitive Markets. American Economic Review, December 1969 c. cikke elsőként elemzi a piac szerepét és annak hatását a beruházási döntésekre. Mossin modellt prezentál a piacra vonatkozóan, formulát a piac értékelő szerepére vonatkozóan, valamint elemzi a formula szerepét a vállalat beruházási politikájához.

ahol

a_i = az i értékpapír megtérülésének a piaci teljesítménytől független komponense, amely véletlen változó

$\tilde{R}_M$ = a piaci indexen nyerhető megtérülési ráta mint véletlen változó

β_i = konstans érték, amely R_i várható változását méri R_M adott változása mellett.

Az egyenlet alapján adott részvény megtérülése két komponensre – egy piactól függőre és egy piactól függetlenre – bomlik. A kifejezés β_i tényezője azt méri, hogy milyen érzékeny a részvény-megtérülés a piaci hozam változására. A 2 értékü β_i például azt jelenti, hogy a részvény megtérülése várhatóan 2%-kal nő (csökken), ha a piaci hozam 1%-kal nő (csökken). A 0.5 értékű β_i viszont arra mutat, hogy a részvény-megtérülés várhatóan az 1% felével változik a piaci hozam változása hatására. Az a_i tényező a megtérülés piaci hozamra érzéketlen (attól független) komponensét reprezentálja.

Az a_i tag két további alkotóelemre bontható fel. Jelöljük α_i –vel az a_i várható értékét, az ε_i pedig a_i véletlen (bizonytalan) elemét reprezentálja. Ebben az esetben felírható a következő kifejezés:

$$a_i = \alpha_i + \varepsilon_i$$

ahol ε_i várható értéke zéró.

A részvény-megtérülés egyenlete ezek után így írható fel:

$$\tilde{R}_i = \alpha_i + \beta_i \tilde{R}_M + \tilde{\varepsilon}_i$$

Újra szükséges említeni, hogy mind az R_M, mind az ε_i véletlen változó, mindegyiknek van valószínűségi eloszlása, várható értéke és szórása. Jelöljük szórásukat σ_{ε_i} és σ_M szimbólummal.

Eddig nem tettünk egyszerűsítő feltevéseket. A megtérülést komponensek összegeként írtuk fel, amelyeknek – definíció szerint – összeadódva ki kell adni a teljes megtérülést. Célszerű, ha az ε_i nem korrelál az R_M értékkel. Ez formulával a következők szerint írható fel:

$$COV(\varepsilon_i R_M) = E\left[(\varepsilon_i - 0)(R_M - \overline{R}_M)\right] = 0$$

Ha ε_i nem korrelál az R_M tényezővel, akkor az azt mutatja, hogy az (1) egyenlet mennyire valósághűen írja le azt, hogy valamely értékpapír megtérülése független a piacon realizálható hozamtól. Az α_i, β_i és $\sigma^2_{\varepsilon_i}$ becslése rendszerint idősor regressziós analízissel végezhető el. *A regressziós analízis az egyetlen eljárás, amely garantálja azt, hogy az ε_i és R_M nem korrelál egymással, legalábbis abban a periódusban, amelyre az egyenlet illeszkedik.*

Az egytényezős modell itt leírt alakjának jellemzői vagy definíciók, vagy konstruált formációk. E modell másik jellegzetessége, hogy csak megkötésekkel érvényes. E feltevés az egytényezős modell ama jellemzője, amely megkülönbözteti azt a kovariancia-struktúrát leíró egyéb modellektől. Az egytényezős modell alapfeltevése az, hogy ε_i független ε_j–től i és j összes értékére nézve, ami az $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ formulával fejezhető ki. Ez azt jelenti, hogy a részvények együttes változásának rendszerbelileg az az egyetlen oka, hogy együtt mozognak a piaccal. A piacon kívül nincs másik olyan hatás, amely az értékpapírok közötti együttmozgást kiválthatná. Ebben az összefüggésben, eltekintve az ε_i és R_M közötti függetlenségtől, nincs semmi olyan, az α_i, β_i és $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ becslésére szolgáló normális regressziós módszerben, ami annak érvényességét igazolná. Ez olyan egyszerűsítő feltevés, ami annak realitáshoz közeliségét mutatja. A modell jóságát részben az határozza meg, hogy milyen jó (rossz) ez a közelítés.

A továbbiakban úgy származtatjuk a várható megtérülést, a szórást és a kovarianciát, hogy az egytényezős modell hivatott reprezentálni az értékpapírok megtérülésének együttes mozgását.

Adott értékpapír *várható megtérülése* így írható fel:

$$E(R_i)=[\alpha_i+\beta_i R_M+\varepsilon_i]$$

Mivel a véletlen változók összegének várható értéke megegyezik a várható értékek összegével, így fennáll a következő összefüggés:

$$E(R_i)=E(\alpha_i)+E(\beta_i R_M)+E(\varepsilon_i)$$

Tekintettel arra, hogy α_i és β_i konstans, az ε_j várható értéke pedig zéró, így ezek alapján a várható érték a következők szerint írható fel:

$$\boxed{E(R_i)=\alpha_i+\beta_i\overline{R}_M}$$

Valamely értékpapír megtérülésének *varianciája* ekként alakul:

$$\sigma_i^2=E\left(R_i-\overline{R}_i\right)^2$$

Behelyettesítve R_i és $\overline{R}_i$ helyére a korábban nyert kifejezéseket, a következőt kapjuk:

$$\sigma_i^2 = E\left[(\alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i) - (\alpha_i + \beta_i \overline{R}_M)\right]^2$$

Egyszerűsítve és rendezve az alábbi kifejezés adódik:

$$\sigma_i^2 = E\left[\beta_i (R_M - \overline{R}_M) + \varepsilon_i\right]^2$$

Elvégezve a kijelölt műveletet, a következő relációt kapjuk:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 (R_M - \overline{R}_M)^2 + 2\beta_i E\left[\varepsilon_i (R_M - \overline{R}_M)\right] + E(\varepsilon_i)^2$$

Mivel feltevés szerint $E\left[\varepsilon_i (R_M - \overline{R}_M)\right] = 0$, így ebből adódóan fennáll az alábbi összefüggés:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 (R_M - \overline{R}_M)^2 + E(\varepsilon_i)^2$$

továbbá

$$\boxed{\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2}$$

Bármely két értékpapír közötti kovariancia a következők szerint írható fel:

$$\sigma_{ij} = E\left[(R_i - \overline{R}_i)(R_j - \overline{R}_j)\right]$$

Behelyettesítve $R_i, \overline{R}_i, R_j$, és $\overline{R}_j$ ismert értékeit, a következő relációt írhatjuk fel:

$$\sigma_{ij} = E\{[(\alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i) - (\alpha_i + \beta_i \overline{R}_M)] \cdot [(\alpha_j + \beta_j R_M + \varepsilon_j) - (\alpha_j + \beta_j \overline{R}_M)]\}$$

Összevonással egyszerűsítve és a bétát tartalmazó tagokat csoportosítva a következőt kapjuk:

$$\sigma_{ij} = E\{[\beta_i (R_M - \overline{R}_M) + \varepsilon_i] \cdot [\beta_j (R_M - \overline{R}_M) + \varepsilon_j]\}$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j E(R_M - \overline{R}_M)^2 + \beta_j E[\varepsilon_i (R_M - \overline{R}_M)] + \beta_i E[\varepsilon_j (R_M - \overline{R}_M)] + E(\varepsilon_i \varepsilon_j)$$

Minthogy az utolsó három tag zéró, így ennek figyelembevételével adódik a végeredmény:

$$\boxed{\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_M^2}$$

A bekeretezett kifejezések fontos következtetéseket engednek meg. Látható, hogy a várható megtérülésnek két komponense van: az α_i önálló rész és a $\beta_i \overline{R}_M$ piacalapú alkotóelem. Hasonlóképpen az értékpapír varianciájának is ugyancsak két része van: a $\sigma^2_{\varepsilon_i}$ önálló kockázati elem és a $\beta_i^2 \sigma_M^2$ piacalapú kockázat. Végül a kovariancia viszont csak a piaci kockázattól függ. Emiatt érvényes az, amit korábban mondtunk, hogy az egytényezős modell implikációi szerint, az értékpapírok együttmozgásának egyetlen oka, a piaci változásokra adott közös válasz.

A fenti eredmények egyszerű példával illusztrálhatók. Tekintsük a 71. tábla első két oszlopában a részvény-megtérülés és a piaci index adatait. E megtérülési adatokat a befektető a megelőző öt hónap során figyelte meg.

Most nézzük az egytényezős modell további oszlopokban bemutatott értékeit. Pillanatnyilag feltételezzük a $\beta_i = 1.5$ értéket, így az (5) oszlop értékei a (2) és a béta szorzataként képezhetők. Honnan származik az ε_i érték? Felidézzük, hogy az ε_i várható értéke zéró, így ezen értékek összege is ugyanakkora kell legyen. A részvény öt periódusra számított megtérülése 40%, amiből 30% piacalapú hozam, ezért 10%-nak nem piacalapú vagy önálló megtérülésnek kell lenni. Amennyiben az ε_i értékek összege nullát ad, akkor az egytényezős modell egyenlőség lesz, s az α_i értékek összege 10%-ot kell adjon eredményül. Mivel α_i konstans és 5 periódus van, így az α_i 10/5 = 2 periódusonként. Az adott α_i és $\beta_i R_M$ értékek mellett, figyelembe véve azt, hogy az egytényezős modell egyenlőség, így az ε_i mindenképpen egyenlővé kell hogy tegye a bal és jobb oldalt. Például az első periódusban α_i és $\beta_i R_M$ összege 8%. Mivel az értékpapír megtérülése az első periódusban 10%, így az $\varepsilon_i = +2\%$. Most már megérthetjük, hogy honnan származnak az egytényezős modell értékei (a β_i kivételével).

71. tábla Az egytényezős modell megtérülésének tényezőkre bontása

Adatok %-ban

Hónap	Részvény megtérülés	Piaci megtérülés	R_i	=	α_i	+	$\beta_i R_M$	+	ε_i
	(1)	(2)	(3)		(4)		(5)		(6)
1	10	4	10	=	2	+	6	+	2
2	3	2	3	=	2	+	3	-	2
3	15	8	15	=	2	+	12	+	1
4	9	6	9	=	2	+	9	-	2
5	3	0	3	=	2	+	0	+	1
	40	20	40		10		30		0

A β_i a megtérülést piacalapú és önálló komponensre bontja. Amikor a β_i értéke 1.5, akkor a piaci megtérülés független az ε_i reziduális tényezőtől. Az ε_i alacsonyabb értéke bizonyos piaci megtérülést hagy ε_i–ben, továbbá az ε_i és a piac közötti kovariancia pozitív. A β_i 1.5-nél nagyobb értéke ellenben túl nagy piaci megtérülést mozgat és negatív kovarianciát okoz az ε_i és a piac között. Ezek szerint a β_i értéke független, s az az érték, amely pontosan elválasztja egymástól a piaci és az önálló megtérülést úgy, hogy az R_M és az ε_i közötti kovarianciát zéróvá teszi.

Végül alkalmazzuk a korábban bemutatott formulákat. Az értékpapír várható megtérülése

$$\overline{R}_i = 40/5 = 8$$

Alkalmazva az egytényezős formulát

$$\overline{R}_i = \alpha_i + \beta_i \overline{R}_M = 2 + 1.5(4) = 8$$

Az i értékpapír varianciáját az egytényezős modellből származtatott formulával számíthatjuk

$$\begin{aligned}\sigma_i^2 &= \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \\ &= (1.5)^2 (8) + 2.8 \\ &= 20.8\end{aligned}$$

6.5.1. Az egytényezős modell alkalmazása

Az egytényezős modellt legalább két dologra lehet használni. Egyrészt a Markowitz variancia-kovariancia modell input becsléseinek egyszerűsítéséhez; másrészt a portfolió analízis probléma direkt megoldására: azaz a portfolió-megtérülés és kockázat előállítására.

Az egytényezős modell alkalmazható az alapvető Markowitz modell input-becslési igényeinek jelentős egyszerűsítésére. Ismeretes, hogy a portfoliók hatékony sorozatának előállításához szükség van az egyes értékpapírok várható megtérülésére, varianciájára és a páronkénti kovarianciákra.

Az egytényezős modellre alapozva, az inputok előállításához a következő – fentebb levezetett – egyenletek szükségesek:

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i E(R_M) \tag{1}$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_M^2 \tag{3}$$

Az egyenletek felírásához szükség van α_i, β_i és $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ értékre, a piaci index várható megtérülésére valamint jövőbeli varianciájának becslésére. Mindeme változók becsülhetők történeti adatokra támaszkodva, jövőbeli valószínűségi feltevésre alapozva, vagy a kettő kombinációjára.

A modell alkalmazását illusztráljuk számpéldával, amelyben a befektető *A* és *B* részvényt birtokol.

	α_i (%)	β_i
A	16.0	1.2
B	5.0	0.8

Feltételezzük, hogy a várható piaci megtérülés 10%-os, 20%-os szórással (így a variancia 400%-os). Az egyes értékpapírok várható megtérülése így alakul:

$$\overline{R}_A = 16.0 + 1.2(10) = 28.0\%$$
$$\overline{R}_B = 5.0 + 0.8(10) = 13.0\%$$

A varianciák és kovarianciák ugyanígy számíthatók, felhasználva a $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ értéket az egytényezős modell becsléséből. Tudjuk, hogy a kovariancia esetében a számítás a két béta és a piaci variancia szorzatára egyszerűsödik. A két vállalatra vonatkozóan ez a következőt adja:

$$\sigma_{ij} = (1.2)(0.8)(400) = 384$$

Az egytényezős modell kritikus feltevése szerint az értékpapírok kizárólag a piaci indexre adott közös válaszon keresztül kapcsolódnak egymáshoz. Az i részvény reziduális hibatényezője nem korrelál a j részvény reziduális hibafaktorával. Az értékpapír-hozamértékek közötti összes korreláció a béta tényezőben visszatükröződik. Ha ez a valóságban nem érvényesül, akkor a modell pontatlan. Az egytényezős modell alkalmazásakor egy 250 értékpapíros mintában csupán 250 darab β_i becslésre valamint a piaci index varianciájának előrejelzésére van szükség a kovariancia eléréséhez. A Markowitz modell ellenben [250(249)]/2 darab különálló kovariancia-becslést igényel. Látható, hogy az egytényezős modell jelentősen leegyszerűsíti a kovariancia előállításának problémáját.

6.5.2. A modell alkalmazása portfolió-analízis céljára

Az egytényezős modell közvetlenül alkalmazható a portfolió probléma megoldására, azaz a portfolió analízis dolga átformálható a piaci index várható megtérülése és varianciája alapján. Ahelyett, hogy becsülnénk a Markowitz modell inputjait, közvetlen becslési lehetőség nyílik a portfolió várható megtérülése és kockázata olyan meghatározására, amely az egytényezős modell relációin alapul. Mivel egy portfolió várható megtérülése az egyes értékpapírok várható megtérülésének súlyozott átlaga, így az $E(R_p)$ értéket az egyedi értékpapírok várható megtérülésére vonatkozó egytényezős modell-egyenletek súlyozott átlagaként számíthatjuk.

$$\begin{aligned} E(R_p) &= \sum_{i=1}^{n} w_i [E(R_i)] = \sum_{i=1}^{n} w_i E[\alpha_i + \beta_i E(R_M)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} w_j \beta_j E(R_M) \end{aligned} \tag{4}$$

Az egytényezős modell karaktere olyan, hogy érvényesül az alábbi két reláció:

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i \tag{5}$$

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i \tag{6}$$

Más szavakkal: a portfolió α_p alfája az egyedi értékpapír α_i értékek súlyozott átlaga, a portfolió β_p bétája az egyedi β_i paraméterek súlyozott értéke. Ezért egy portfolió várható megtérülését így írhatjuk át:

$$E(R_p) = \alpha_p + \beta_p \cdot E(R_M) \tag{7}$$

Az egytényezős modell az egyedi értékpapír kockázatát két részre bontja (a korábban levezetett összefüggésnek megfelelően).

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \tag{8}$$

A portfolió varianciájának közvetlen becsléséhez szükségünk van e két rész súlyozott átlagára. Alapul véve a (6) egyenletben foglalt portfolió béta összefüggést, a σ_p^2 az alábbiak szerint fejezhető ki:

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_M^2 + \sum w_i^2 \sigma_{\varepsilon_i} \tag{9}$$

Amennyiben adott portfolió fokozottan diverzifikált, akkor a (9) egyenlet második tagja a portfolió súlyozott, nem szisztematikus kockázata egészen kicsire csökken. Az első tag, a portfolió szisztematikus kockázata, nem tüntethető el diverzifikációval. Így, amint a reziduális kockázat diverzifikáció révén csökkenthető, egy jól diverzifikált portfolió esetében a kockázat a következő kifejezést közelíti:

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_M^2 \tag{10}$$

továbbá fennáll a

$$\sigma_p = \beta_p \sigma_M \tag{11}$$

reláció is.

Ahogy a Markowitz modellel is tettük, becsülhető az A és B részvényt magában foglaló kételemű portfolió várható megtérülése és kockázata. Feltételezzük, hogy a befektetőnek 20000 dollár beruházható pénzalapja van, amit fele-fele arányban kíván megosztani a két részvény között. A várható piaci megtérülés 10%-os, 20%-os szórással. A két részvényre a következő értékeket feltételezzük:

	α	β	$\sigma_{\varepsilon_i}^2$
A	16	1.2	850
B	5	0.8	310

Ennek alapján a portfolió várható megtérülése a következők szerint írható fel:

$$E(R_p) = (0.5) \cdot [16 + 1.2(10)] + (0.5) \cdot [5 + 0.8(10)] = 20.5$$

Alkalmazva a fenti egyenleteket α, β és a várható megtérülés kiszámításához, az alábbi eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} E(R_p) &= \alpha + \beta_p E(R_M) \\ &= 10.5 + 1.0(10) = 20.5 \end{aligned}$$

E portfolió kockázatának számításakor látható, hogy a súlyozott szisztematikus kockázat a következő lesz:

$$\beta_p^2 \sigma_M^2 = 1.0(400) = 400$$

ugyanakkor a súlyozott, nem szisztematikus kockázat

$$(0.5)^2(850) + (0.5)^2(310) = 290$$

A portfolió teljes kockázata ezért a két komponens összege:

$$\sigma_p^2 = 400 + 290 = 690$$

továbbá

$$\sigma_p = \sqrt{690} = 26.3\%$$

Ha a kételemű portfolió esetét általánosítjuk, akkor az egytényezős modell felhasználható a két értékpapírból álló portfolió várható megtérülésének és kockázatának különböző befektetési arányok melletti meghatározására. Alkalmazva az *A* és *B* értékpapírra korábban feltételezett adatokat, a 72. tábla oszlopainak értékei a következők szerint számíthatók:

Alfa = $16w_i + 5w_j = \alpha_p$

Béta $= 1.2w_i + 0.8w_j = \beta_p$

Várható megtérülés $= \alpha_p + \beta_p(10) = E(R_p)$

Szisztematikus kockázat $= 400\beta_p^2 = S$

Nem szisztematikus kockázat $= 850w_i^2 + 310w_j^2 = N$

Variancia = 4 + 5 oszlop

Szórás = 6 oszlop négyzetgyöke

72. tábla *Az egytényezős modell alkalmazása*

Súlyok		**(1)**	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**
w_i	w_j	α_p	β_p	R_p (%)	**S**	**N**	σ^2	σ
1.0	0.0	16.0	1.20	28.0	576	850.0	1426	37.8
0.8	0.2	13.8	1.12	25.0	502	556.4	1058	32.5
0.6	0.4	11.6	1.04	22.0	433	355.6	788	28.1
0.4	0.6	9.4	0.96	19.0	369	247.6	616	24.8
0.2	0.8	7.2	0.88	16.0	310	232.4	542	23.3

6.5.3. A lineáris modellek alkalmazása[67]

Nézzük meg egy kockázatos eszköz megtérülését, ha adott a tőkepiaci átfogó megtérülés értéke. Az alábbi példában kis részvények portfoliójának megtérülését keressük a piaci portfolió megtérülésének ismeretében. Ehhez induljunk ki a következő lineáris regressziós egyenletből:

$$\tilde{R}_{St} = \alpha_S + \beta_S \tilde{R}_{Mt} + \varepsilon_{St}$$

ahol

$\tilde{R}_{St}$ = kis részvények portfoliójának megtérülése a t-edik évben

$\tilde{R}_{Mt}$ = a tőkepiaci kompozíció megtérülése

α_S és β_S konstansok

A kis részvények éves megtérülése két részre osztható, egyrészt az $\alpha_S + \beta_S \tilde{R}_{Mt}$ piacalapú megtérülésre, másrészt az ε_{St} nem piacalapú hibatényezőre. Az α_S és β_S értéke statisztikai úton meghatározható; ezek $\tilde{R}_{Mt}$ adott értéke mellett a legjobb becslést adják. E konstansok a lineáris modell paraméterei. A lineáris modell felépítését az alábbiakban mutatjuk be. A lehetséges megtérülési adatokat a következő tábla mutatja.

[67] A lineáris modellek alkalmazását Ross, S. A., Westerfield, R.W: Corporate Finance (1988) c. müve alapján mutatjuk be.

73. tábla *Egyedi részvény és piaci portfolió adatok*

Év	Kis részvények megtérülése $\tilde{R}_{St}$ (%)	Piaci kompozíció megtérülése $\tilde{R}_{Mt}$ (%)
5.	-6.7	6.3
4.	39.7	22.5
3.	28.0	21.4
2.	13.9	-4.9
1.	39.9	32.4

Ha úgy választjuk meg α_S és β_S értékét, hogy azok minimalizálják a hibatényező $\sum_t (\varepsilon_{St})^2$ négyzetes értékét, akkor a következő adódik:

$$\beta_S = \frac{COV(R_{St} R_{Mt})}{VAR(R_{Mt})} \qquad \text{(iránytangens)}$$

$$\alpha_S = \overline{R}_{St} - \beta_S \overline{R}_{Mt} \qquad \text{(metszéspont)}$$

További felbontással az R_{St} teljes varianciája két részre, piactól függő és piactól független variabilitásra, a következők szerint:

$$VAR_{St} = \beta_S^2 VAR(R_{Mt}) + VAR(\varepsilon_{St})$$

ahol

$\beta_S^2 VAR(R_{Mt}) =$ az R_{St} varianciájának az a része, amely kapcsolódik a nagy piaci portfolió variabilitásához,

$VAR(\varepsilon_{St}) =$ a hibatényező varianciája.

Statisztikailag az R^2 annak leírására alkalmas, hogy az $\tilde{R}_{St}$ variabilitása milyen mértékben magyarázható a lineáris modellel. E koefficiens a következő formulával számítható:

$$R^2 = \frac{\beta_S^2 \, VAR(R_{Mt})}{VAR(R_{St})}$$

Az R^2 a korrelációs koefficiens négyzeteként is ismert. A lineáris modell paraméterei az alábbiak szerint számíthatók:

74. tábla *A lineáris modell paramétereinek számítása*

Év	Kis részvények megtérülése (%)	Eltérés az átlagos megtérüléstől	Négyzetes eltérés	Piaci kompozíció megtérülése (%)	Eltérés az átlagos megtérüléstől	Négyzetes eltérés	Eltérések szorzata
	R_{St}	$(R_{St}-\bar{R}_S)$	$(R_{St}-\bar{R}_S)^2$	R_{Mt}	$(R_{Mt}-\bar{R}_M)$	$(R_{St}-\bar{R}_S)^2$	$(R_{Mt}-\bar{R}_M)$
5	-6.7	-29.7	882.1	6.3	-9.2	84.6	273.2
4	39.7	16.7	278.9	22.5	7.0	49.0	116.9
3	28.0	5.0	25.0	21.4	5.9	34.8	29.5
2	13.9	-9.1	82.8	-4.9	-20.4	416.2	185.6
1	39.9	16.9	285.6	32.4	16.9	285.6	285.6
Σ	**114.8**		**1554.4**	**77.7**		**870.4**	**890.8**

$$\overline{R}_{St} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{5} R_{St} = \frac{114.8}{5} = 23 \qquad \overline{R}_M = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{5} R_{Mt} = \frac{77.7}{5} = 15.5$$

$$VAR(R_{St}) = \frac{\sum_{t=1}^{5}\left(R_{St} - \overline{R}_S\right)^2}{T-1} \qquad VAR(R_{Mt}) = \frac{\sum_{t=1}^{5}\left(R_{Mt} - \overline{R}_M\right)^2}{T-1}$$

$$= \frac{1554.4}{4} = 388.6 \qquad = \frac{870.4}{4} = 217.6$$

$$\sigma_{St} = \sqrt{VAR(R_{St})} = 19.7 \qquad \sigma_{Mt} = \sqrt{VAR(R_{St})} = 14.7$$

$$COV(R_{St}R_{Mt}) = \frac{\sum_{t=1}^{5}\left(R_{St} - \overline{R}_S\right)\left(R_{Mt} - \overline{R}_M\right)}{T-1} = \frac{890.8}{4} = 222.7$$

$$CORR(R_{St}R_{Mt}) = \frac{COV(R_{St}R_{Mt})}{\sigma D(R_{St})\sigma D(R_{Mt})} = \frac{222.7}{(19.7)(14.7)} = 0.77$$

$$\hat{\alpha}_S = \overline{R}_{St} - \hat{\beta}_S \overline{R}_{Mt} = 23.0 - (1.02)(15.55) = 7.19$$

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}_S^2\, VAR(R_{Mt})}{VAR(R_{St})} = \frac{(1.02)^2(217.6)}{388.6} = 0.59$$

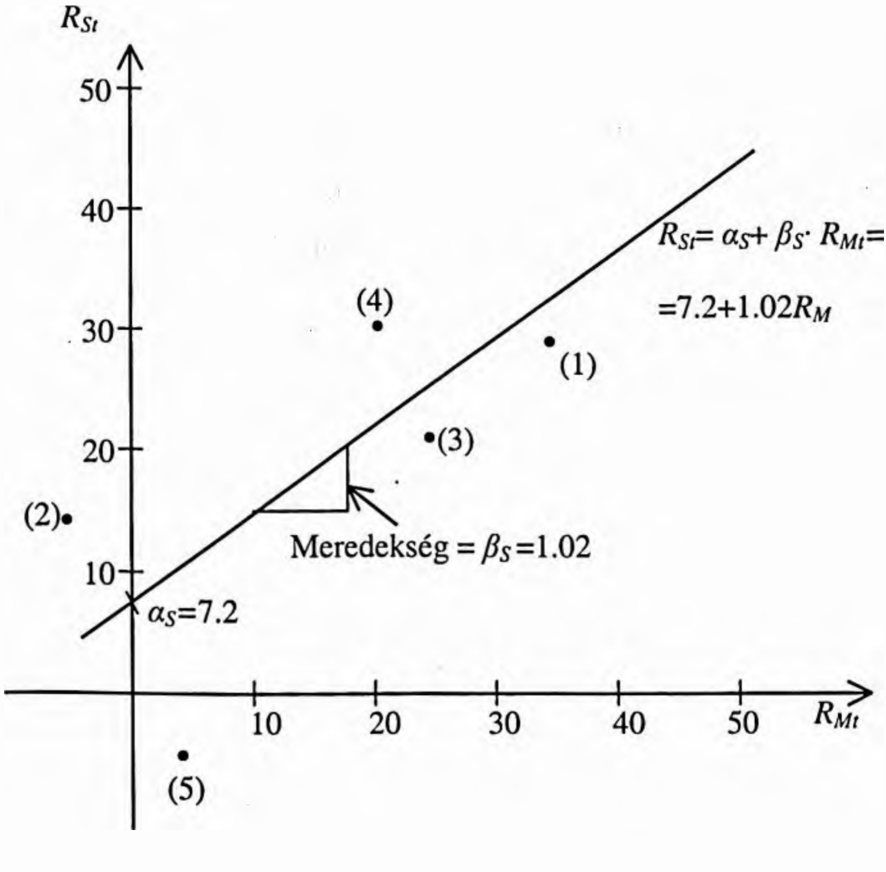
Ezek szerint a kis részvényekre vonatkozó lineáris modell így írható fel:

$$R_{St} = 7.19 + 1{,}02 R_{Mt} + \varepsilon_{St}$$

A modell $R^2 = \dfrac{\hat{\beta}_S^2\, VAR(R_{Mt})}{VAR(R_{St})} = 0.59$ érték mellett érvényesül

A lineáris modell egyenlete a következő ábrán mutatható be.

80. ábra *Lineáris regressziós modell grafikonjai*



6.6. A tőkepiaci egyensúlyi értékelés modellje: a szintézis

Az elmúlt évtizedekben jelentős lépések történtek annak érdekében, hogy a finanszírozási elméletben a bizonytalanságot is kezelni lehessen. A legfontosabb eredmények bizonyíthatóan a modern portfolió-elmélet kutatási területén születtek.

A modern portfolió-elmélet csak korlátozott mértékben képes kezelni a bizonytalansági tényezőt. E megközelítés szerint vizsgálhatók a befektetők portfolió döntéseinek implikációi, ehhez azonban a kiindulási feltételek körét leszűkítik és így nem tűnik túlságosan vonzó gazdasági elméletnek.

A modern portfolió-elmélet azonban meglepően sikeresnek bizonyult, azoknak az egyenleteknek a felállításában, amelyek az értékpapírok megtérülési rátáinak különbségét a kockázati differenciákra alapozzák.

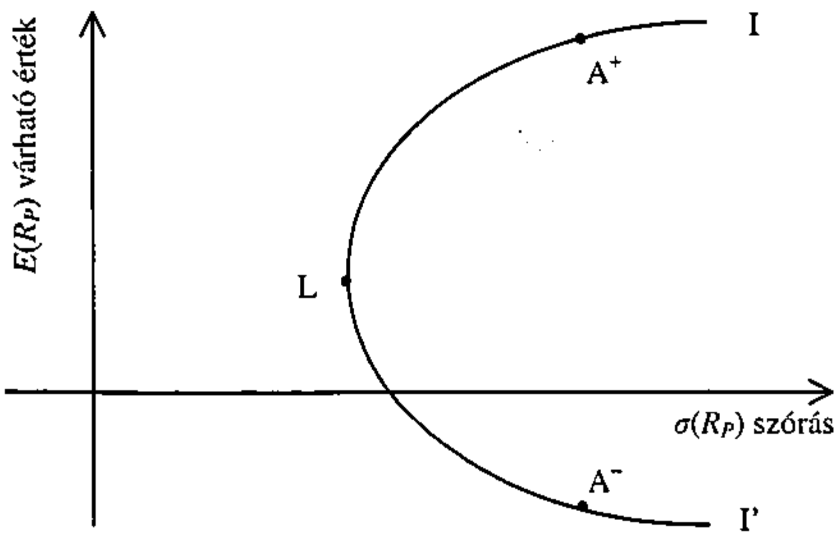
A CAPM modell széles körben alkalmazható eszköz

- a befektetési értékelésre,
- a befektetések minimális megtérülési rátájának meghatározására,
- a közszolgáltató cégek árainak szakértői véleményezésére,
- annak értékelésére, hogy a tőzsde miként reagál a különböző információkra.

6.6.1. A Sharpe-Lintner-Mossin modell

Feltételezzük, hogy a befektetők kockázat-kerülő egyének, akik az elkövetkező időszakban vagyonuk hasznosságát kívánják maximalizálni, valamint azt, hogy mindegyikük a nagyobb vagyont előnyben részesíti a kisebbel szemben. A befektető döntési problémája a rendelkezésre álló tőkejavak közüli portfolió-választás. Feltételezzük, hogy a tőkejavak menynyisége meghatározott, s hogy azok mindegyike értékesíthető és tökéletesen osztható. Amennyiben azt is feltételezzük, hogy a befektetők egy adott periódus bizonytalan megtérülési rátájára vonatkozó várakozásai normális eloszlással jellemezhetők, akkor a befektető választása mindössze két paraméteren alapul: a várható megtérülésen és annak varianciáján (szórásán). Ennek értelmében az egyes portfoliók jövőbeni kilátásait két paraméter határozza meg: $E(R_p)$ várható érték és a $\sigma(R_p)$ szórás, az alábbi ábrán látható módon.

81. ábra *A portfoliók helyzetét meghatározó paraméterek*



Az ábra *I I'* görbéje hatékony portfoliókat tartalmaz és a hatékony határfelület nevet viseli.

- Minden hatékony portfolió rendelkezik azzal a fontos tulajdonsággal, hogy nem létezik olyan másik portfolió, amely ugyanazon $E(R_p)$ értéknél alacsonyabb $\sigma(R_p)$ értékkel bírna.

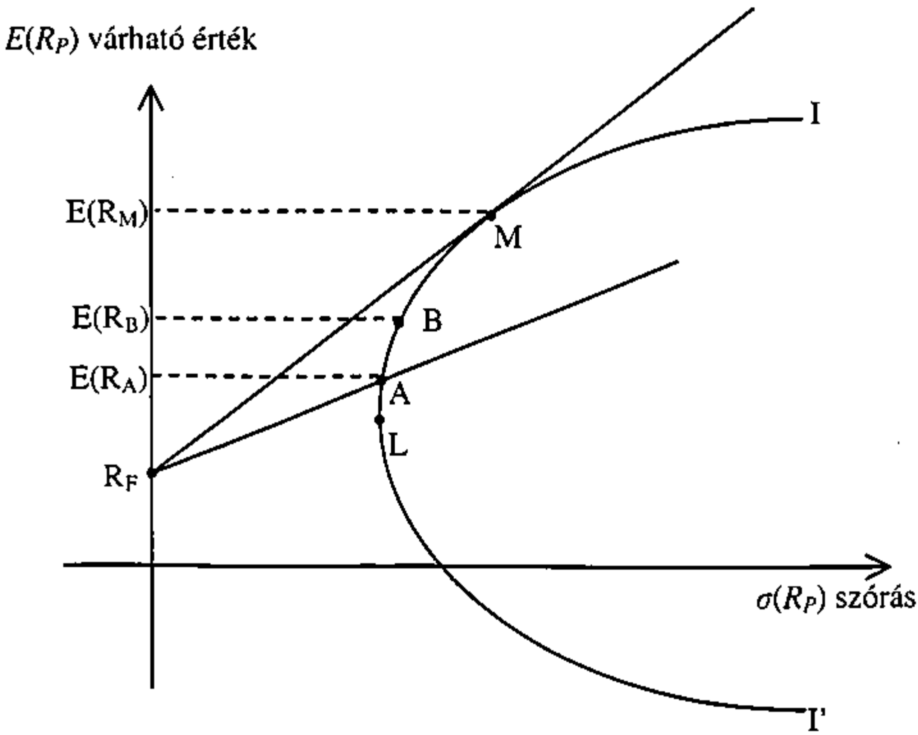
- Ebből következően a befektetők csupán az *I I'* görbe hatékony határfelületére eső portfoliókat veszik számításba, hiszen a görbétől jobbra eső portfoliók nem hatékonyak.

- Megfigyelhető, hogy a határfelület csökkenő ágán található A^- portfolió azonos kockázati A^+ párral rendelkezik az emelkedő ágon. Minthogy A^+ magasabb várható értékkel rendelkezik, mint A^-, ezért a racionális befektető A^+-ot részesíti előnyben. Így a végső döntés az előző görbe *I I'* egy részletére korlátozódik, s ez a görberész magában foglalja az *L* pontot, a legkisebb varianciával rendelkező portfoliót.

A 82. ábra a kockázatmentes értékpapírok és a hatékony kockázatos portfoliók kombinációját mutatja.

Feltételezzük, hogy a befektető R_F kockázatmentes kamatláb mellett adhat és vehet kölcsönt. Amennyiben a befektető összes pénzét a kockázatmentes *F* jószágba fekteti, akkor a kockázat nullára csökken. A 82. ábra bemutatja, hogy az *F* bármely más portfolióval kombinálható úgy, hogy a kombinált portfoliók mind ugyanazon, az *A*-t *F*-fel összekötő egyenesre esnek. Az adott kombinált portfolió elhelyezkedése az *F*-be fektetett tőke arányától függ.

82. ábra Kockázatmentes értékpapír és hatékony kockázatos portfoliók kombinációja



- Ha a rendelkezésre álló pénz 10%-át fektetjük *F*-be, akkor a várható megtérülés: $0.1R_F + 0.9E(R_A)$, a kockázat pedig $0.9\sigma_A$ lesz. A befektető újabb forrás kölcsönvételével túlléphet az egyenes *A* pontján – mondjuk 10%-kal, (10%-kal kevesebbet fektet be *F*-be, és 110%-ot pedig *A*-ba). A kockázatmentes jószág bevezetése nyilvánvalóan szélesíti a befektetési lehetőségek körét. Még ennél is fontosabb az, hogy az *I I'* görbe A pontja alatt elhelyezkedő portfoliók mindegyikét az *FA* kombinációi dominálják.

- A befektető a fentebb leírtaknál sikeresebben is választhat. Ha F-et nem A-val, hanem mondjuk B-vel kombinálja, akkor egy olyan új FB egyenes keletkezik, amelynek portfoliói uralják az FA egyenesen található kombinációkat. Az F ponttal leghatékonyabban kombinálható portfolió természetesen az M, amely abban a pontban található, ahol az F-ből húzott egyenes az I I' görbét érinti (de azt nem metszi). Levonhatjuk azt a következtetést, hogy a befektető ezen az úton a kockázatmentes F tőkejavak és a kockázatos M portfolió kombinációját szerzi meg.

Feltételezzük, hogy minden befektető azonos várakozással van a befektetések megtérülését illetően.

- Mindegyikük F és M bizonyos kombinációjával rendelkezik, a portfolió összetétele azonban egyénenként változó. Mindegyikük kíván részesedni a kockázatos tőkejavak M portfoliójából, de ha még egyikük sem birtokolja M-et, akkor egyensúly-eltolódás lép fel.

- Ha feltételezzük, hogy a befektetők mindegyike árelfogadó, s a piac tökéletesen működik (nincsenek adók, tranzakciós költségek, s nem korlátozzák a fedezetlen eladást), akkor olyan egyensúlynak kell fennállni, ahol mindegyik befektető ugyanazzal a kockázatos M portfolióval rendelkezik.

- Az egyensúlyi helyzetben minden értékpapírt megvásároltak, s irántuk nem tapasztalható pótlólagos kereslet. Ebből következően, ha minden befektető M portfolióval rendelkezik, akkor az M minden értékpapírt tartalmaz. Az egyedi értékpapírok M-en belüli súlya megegyezik azzal az aránnyal, amelyet azok piaci értéke az összes értékpapír aggregált piaci értékével szemben képvisel. Más szóval, az *M* nem más, mint a piaci érték szerint súlyozott portfolió.

A hatékony határfelület *M* pontban mért meredekségének mérésére két lehetőség kínálkozik:

- Egyrészt közvetlenül megkaphatjuk az *FM* egyenesre felállított egyenletből

$$\frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma_p} = \frac{E(R_M) - R_F}{\sigma_M}$$

- A meredekséget megkaphatjuk egy új portfolió létrehozásával is. A rendelkezésre álló tőke 100*w* százalékát *i* kockázatos értékpapírba fektetjük, a maradék 100(1-*w*) százalékát pedig *M*-be. Az új portfolió-nál mért meredekséget úgy kaphatjuk meg, hogy vesszük az *E*(*Rp*) és σ(*Rp*) *w* beruházási súly szerinti deriváltjának hányadosát, azaz:

$$\frac{\partial E(R_p)/\partial w}{\partial \sigma_p / \partial w} = \frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma_p} \tag{1}$$

ha $w = 0$, akkor természetesen $p = M$

Eszerint az *M* ponthoz tartozó meredekséget úgy is megkaphatjuk, hogy a w=0-nál számított deriváltakat meghatározzuk és az (1) egyenletbe az alábbiak szerint helyettesítjük be:

$$\frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma_p} = \frac{E(R_i) - R_F}{\left[\sigma_{iM} - \sigma_M^2\right] / \sigma_M} \tag{2}$$

ahol σ_{iM} az i és M közötti kovariancia.

Az $I\,I'$ görbe M ponthoz tartozó meredekségének kiszámítására felállított két egyenlet ugyanarra az eredményre kell vezessen.

$$\frac{E(R_M)-R_F}{\sigma_M}=\frac{E(R_i)-R_F}{\left[\sigma_{iM}-\sigma_M^2\right]/\sigma_M}$$

A Capital Asset Pricing Model a fenti egyenlőség $E(R_i)$-re történő kifejezésével kapható meg:

$$E(R_i)=R_F+\left[E(R_M)-R_F\right]\beta_i \tag{3}$$

ahol

$$\beta_i=\sigma_{iM}/\sigma_M^2$$

A (3) egyenlet kifejezi bármely kockázatos i értékpapír (vagy ilyen portfolió) átlagos megtérülését a kockázatmentes ráta, a piaci portfolió várható megtérülése és a finanszírozási körökben egyetemlegesen bétával jelzett kockázati mérték függvényében. A CAPM modellben a bétával mért kockázatok differenciája megmagyarázza az értékpapírok várható megtérülésében tapasztalható, ex ante különbségeket.[68]

A kockázatos értékpapír várható megtérülését a legkézenfekvőbben a kockázatmentes ráta és a kockázati kompenzáció összegeként vizsgálhatjuk. Ez sokkal világosabban látható, ha a (3) egyenletet más formába rendezzük át:

[68] A (3) egyenlet felállítása Sharpe és Lintner érdeme, s ez akkor is használható, amikor az értékpapírok megtérülésének várható értékét béta függvényében akarjuk ábrázolni. Ilyenkor minden értékpapír az R_F és $E(R_M\text{-}R_F)$ által meghatározott egyenesre esik. Ezt nevezzük Security Market Line egyenesnek.

$$E(R_i) = R_F + \lambda\sigma_{iM} \tag{4}$$

ahol:

$$\lambda = [E(R_M) - R_F]/\sigma_M^2$$

A λ a piaci többlethozam és σ_M^2 piaci kockázat hányadosaként , azaz a kockázat piaci áraként is értelmezhető. A σ_{iM} a kovarianciát méri, mint az egyedi értékpapír hozzájárulását a piaci portfolió kockázatosságához.

Az egyenlet újabb átrendezése további betekintést nyújt a CAPM modellbe.

$$E(R_i) = (1 - \beta_i)R_F + \beta_i E(R_M) \tag{5}$$

Ez utóbbi egyenlet az *i* értékpapír várható megtérülését a kockázatmentes értékpapírból és a piaci portfolióból álló kompozíció átlagos hozamaként mutatja be.

6.6.2. A CAPM modell származtatása

A CAPM modell felépítése hipotetikus környezetben történik, ahol a következő feltevéseket fogalmazzák meg a befektetőkkel és a portfoliók lehetséges sorozatával kapcsolatban:

1. A befektető egyén kockázat-kerülő, aki saját periódusvégi gazdagságának várható hasznosságát igyekszik maximalizálni.

2. A befektetők árelfogadók és homogén várakozásaik vannak az eszközök megtérüléséről, aminek kapcsolódó normális eloszlása van.

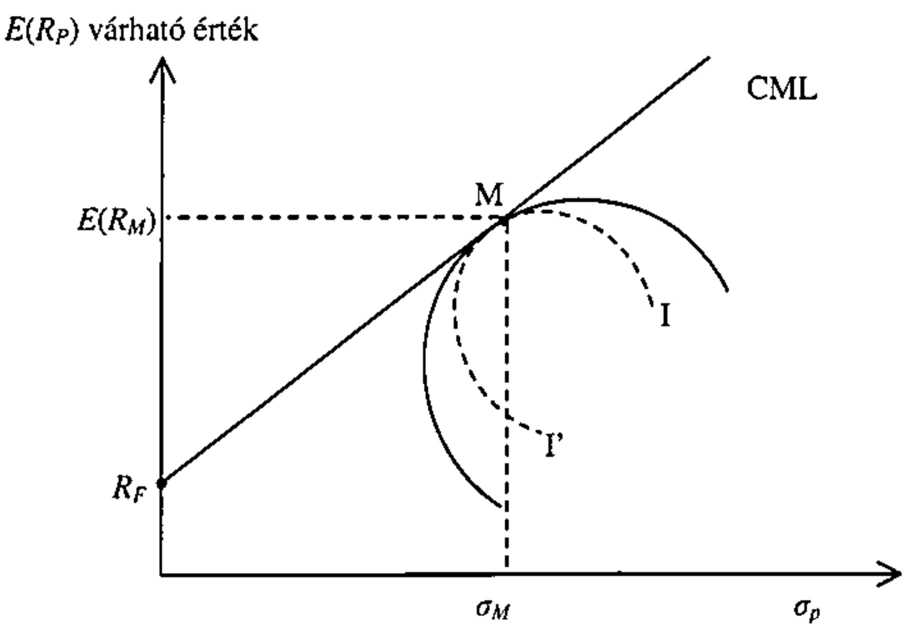
3. Léteznek kockázatmentes eszközök, s a befektetők korlátlan összegben kölcsönvehetnek és –adhatnak kockázatmentes ráta mellett.

4. A kockázatos eszközök mennyisége rögzített, továbbá mindegyik eszköz piacképes és korlátlanul osztható.

5. Az értékpapír-piacok feszültségmentesek, az információk ingyenesek, s egyidejűleg minden befektető rendelkezésére állnak.

6. Nincsenek piaci tökéletlenségek, adók, szabályozások vagy korlátozások az azonnali eladást illetően.

83. ábra *A tőkepiaci egyenes megközelítése*



Habár e feltevések sok tekintetben nem valósághűek, többségük azonban anélkül feloldható, hogy változtatna a CAPM lényegi sajátosságain. A 83. ábra az M piaci portfolió, az R_F kockázatmentes eszköz, valamint az I

nem hatékony kockázatos eszköz várható megtérülését és szórását mutatja. A kockázatmentes eszközt és a piaci portfoliót a CML egyenes köti össze. Az ábra az *I* nem hatékony kockázatos eszköz és az *M* piaci portfolió kombinációit a hatékony határvonallal együtt mutatja.

Amennyiben létezik piaci egyensúly, akkor az összes befektetés árát addig szükséges korrigálni, amíg azok iránt már nem nyilvánul meg fölös kereslet. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy *az árakat úgy kell alakítani, hogy az összes eszköz kínálata azonos legyen az irántuk megnyilvánuló kereslettel. Következésképpen: egyensúlyi helyzetben a piaci portfolió az összes eszközt értéksúlya arányában fogja tartalmazni.*

$$w_i = \frac{i\text{ egyedi eszköz piaci értéke}}{\text{összes eszköz piaci értéke}} \tag{1}$$

Az a portfolió, amely *a %*-ban *I* kockázatos eszközt és (1-a)%-ban piaci portfoliót tartalmaz, a következő várható értékkel és szórással jellemezhető:

$$E(R_p) = aE(R_i) + (1-a)E(R_M) \tag{2}$$

$$\sigma_p = \left[a^2\sigma_i^2 + 2a(1-a)\sigma_{iM} + (1-a)^2\sigma_M^2\right]^{1/2} \tag{3}$$

ahol

σ_i^2 = *i*-edik kockázatmentes eszköz varianciája,

σ_M^2 = *M* piaci portfolió varianciája,

σ_{iM} = *i*-edik eszköz és a piaci portfolió közötti kovariancia.

Fontos tudni, hogy a piaci portfolió saját piaci értéksúlya arányában már tartalmazza az I befektetést. A befektetési lehetőségek görbéjét a kockázatos eszközök és a piaci portfolió IMI' vonalon található, különböző kombinációi szolgáltatják. Hogy az I eszközbe befektetett a portfolióarány hatására milyen változás következik be a várható megtérülésben és szórásban, az meghatározható a (2) és (3) egyenlet parciális deriválásával.

$$\frac{\partial E(R_p)}{\partial a} = E(R_i) - E(R_M)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma(R_p)}{\partial a} = \frac{1}{2}\left[a^2\sigma_i^2 + 2a(1-a)\sigma_{iM} + (1-a)^2\sigma_M^2\right]^{-1/2}\cdot \\ \cdot\left[2a\sigma_i^2 + 2a\sigma_{iM} - 4a\sigma_{iM} - 2\sigma_M^2 + 2a\sigma_M^2\right]\end{aligned} \qquad (5)$$

Hogy e tényt miért hasznosíthatjuk a kockázat piaci egyensúlyi árának meghatározásához, az azzal magyarázható, hogy egyensúlyi helyzetben a piaci portfolió már tartalmazza a w_i súlyt, ami az I kockázatmentes eszközbe irányuló beruházást jelöli. Emiatt az a százalékos arány a fenti egyenletben az egyedi kockázatos eszköz iránti fölös keresletként is interpretálható. Ugyanakkor tudjuk, hogy *egyensúlyi helyzetben bármely eszközzel szemben, a fölös kereslet szükségképpen zéró kell legyen* (azaz, egyensúlyi helyzetben $a=0$). Az árakat mindaddig korrigálni szükséges, amíg az összes eszközt piaci értéksúlyának megfelelő arányban birtokolják. Ezért a (4) és (5) egyenletet ama értéknél vehetjük alapul, ahol a fölös kereslet a aránya zéróval egyenlő. Eredményül az egyensúlyi értékelés relációját kapjuk:

$$\left.\frac{\partial E(R_p)}{\partial a}\right|_{a=0} = E(R_i) - E(R_M)$$

$$\left.\frac{\partial E(R_p)}{\partial a}\right|_{a=0} = \frac{1}{2}\left[\sigma_M^2\right]^{-1/2}\left[-2\sigma_M^2 + 2\sigma_{iM}\right] = \frac{\sigma_{iM} - \sigma_M^2}{\sigma_M}$$

A kockázat-megtérülés átváltás meredeksége az *M* pontnál értelmezve, piaci egyensúlyban, a következő lesz:

$$\left.\frac{\partial E(R_p)/\partial a}{\partial \sigma(R_p)/\partial a}\right|_{a=0} = \frac{E(R_i) - E(R_M)}{\left(\sigma_{iM} - \sigma_M^2\right)/\sigma_M} \qquad (6)$$

Végül figyelembe kell venni, hogy az *IMI'* lehetőség-görbe meredeksége az *M* pontban szükségképpen azonos kell legyen a *CML* egyenes meredekségével. Mint ismeretes, a *CML* egyenes ugyanannak a piaci egyensúlynak a leírása, s ennek alapján az egyenes meredeksége az

$$\frac{E(R_M) - R_F}{\sigma_M} \qquad (7)$$

hányadossal írható le. A (6) és (7) egyenlet különböző, mégis azonos értékű definíciója az *IMI'* lehetőség-görbét *M* pontban érintő egyenes meredekségének. A két egyenletet egymással egyenlővé téve, a következőt kapjuk:

$$\frac{E(R_M) - R_F}{\sigma_M} = \frac{E(R_i) - E(R_M)}{\left(\sigma_{iM} - \sigma_M^2\right)/\sigma_M}$$

E reláció átrendezhető és $E(Ri)$ értékre megadható, az alábbiak szerint:

$$E(R_i) = R_F + \left[E(R_M) - R_F\right]\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

Ez utóbbi pedig a CAPM modell alapegyenlete. Eszerint, valamely eszköz megkövetelt egyensúlyi megtérülési rátája egyenlő, a kockázatmentes ráta és a kockázati prémium összegével; ez utóbbi függvénye a σ_{iM} kovarianciának, amely az i-edik eszköznek a piaci index portfolió-változására való reagálását mutatja.

6.6.3. Kiterjesztett CAPM modellek

Az eredeti CAPM modellnek erősen korlátozó feltevései és implikációi vannak. Azok a modellek, amelyek a feltevéseket a hasznossági alapú befektetői preferenciákra építik, kiterjesztett CAPM modelleknek nevezhetők.

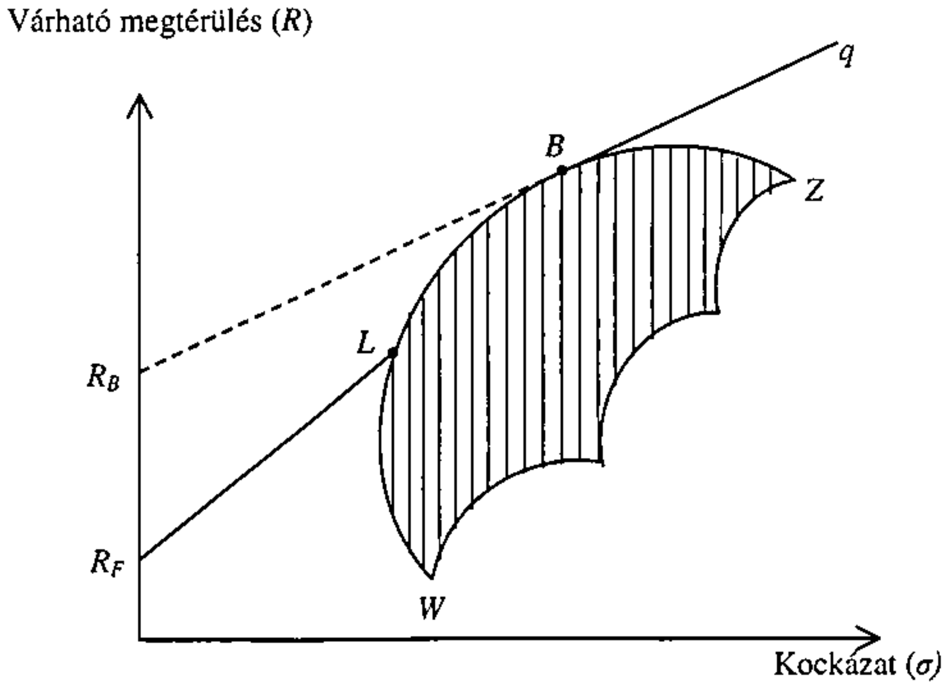
6.6.3.1. Hatékony befektetési politika, korlátozott vagy visszterhes kölcsönvétel esetén

Az eredeti CAPM modell feltételezése szerint a befektető korlátozás nélkül vehet kölcsön, a pénzalapok beruházási minimum-követelményét jelentő kockázatmentes ráta mellett. A valóságban természetesen az ilyen kölcsönvétel vagy nem áll rendelkezésre, vagy mennyiségét tekintve korlátozott. Milyen hatása lehet ennek a beruházási politikára és az értékpapír-árakra, ha a piac egyébként hatékony? A kérdés megválaszolásához a következő hipotézisekre van szükség:

- A befektetők kölcsönadhatnak, azaz vásárolhatnak eszközöket R_F kockázatmentes ráta mellett.
- Korlátozás nélkül kölcsönvehetnek magasabb, R_B kamatráta mellett.

Ezek az értékek láthatók az alábbi ábra függőleges tengelyén.

84. ábra *Eltérő kölcsönadási és kölcsönvételi ráták*



Az ábra arra az esetre mutat példát, ahol a hatékony beruházási stratégia úgy áll fenn, hogy a kölcsönvételi költségek nagyobbak a kockázatmentes értékpapírba történő befektetés ráfordításánál. A sávozott terület ama kockázat-megtérülés kombinációkat reprezentálja, amelyek kizárólag kockázatos eszközöket magukban foglaló beruházásokból adódnak. Ahol nincs lehetőség kölcsönvenni vagy kölcsönadni (beruházni kockázatmentes eszközbe), ott a hatékony felület a *WLBZ* görbe lesz, s ennek alapján az értékpapírok sok kombinációja lehetne hatékony. Mindazonáltal az R_B megtérülést biztosító kockázatmentes eszköz létezése nyomán, kockázatos portfoliók formálhatók a *W* és az *L* kockázatmentes eszköz nem hatékony kombinációira alapozva, s az *L* pontban ábrázolt portfolió ugyanarra a kockázatra nagyobb megtérülést ad. Így az *L* portfolió bármely olyan kockázatos értékpapír optimális keveréke, amelynél a befektető kockázati attitűdje bármilyen mértékben igényli kockázatmentes eszközök birtoklását (kölcsönadás). Az *L* pontot grafikusan úgy kapjuk meg, hogy érintő egyenest bocsátunk az R_F pontból egészen addig, amíg el nem érjük a hatékony kombinációk eredeti határfelületét.

Az R_B ráta mellett történő kölcsönvétel lehetősége egy másik, *B* portfoliót teremt, ami viszont figyelemre méltó. A *B* és *Z* közötti – korábban hatékony – portfoliók most érdektelenné válnak: a *B* áttételes finanszírozású kombinációi dominálják azokat, nagyobb megtérülést ígérve ugyanakkora kockázatra. A *B* portfolió olyan kockázatos értékpapírok optimális keveréke, amelyek közül bármelyik meghatározott mértékű kölcsönvételt diktál (részvények marginális vétele). A *B* pont grafikusan úgy kapható meg, hogy az R_B pontból kibocsátott egyenes éppen elérje a hatékony kombinációk eredeti határfelületét. Ama beruházók, akiknek kockázati attitűdje sem kölcsönvételt sem kölcsönadást nem diktál, azoknak a kockázatos értékpapírok *LB* görbeszakasza mentén található kombinációkból kell birtokolni.

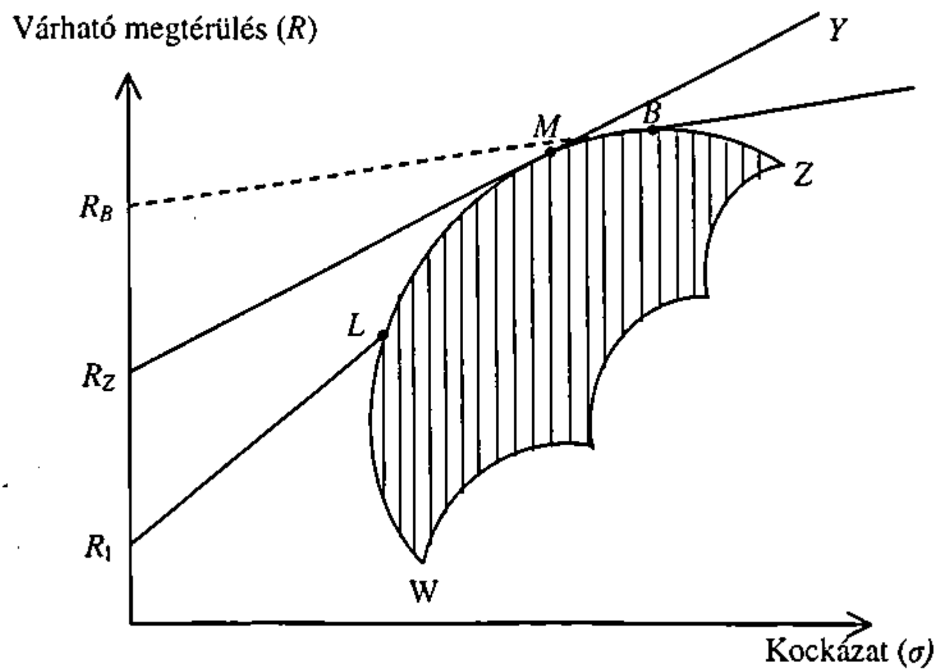
Az így kapott befektetési kombinációk úgy kell képződjenek, hogy összhangban legyenek a kockázati tartózkodás fokában meglevő különbségekkel. A tőkepiaci egyenes (*CML*) ebben az esetben két egyenes és egy görbeszakasz együttese, az ábrán az R_F *LBq* képződmény.

6.6.3.2. Az SML egyenes „zéró-béta" változata

Mivé alakul át az *SML* egyenes, ha a kölcsönvételi ráta meghaladja a kockázatmentes rátát? A válasz attól függ, hogy a piaci portfolió a valóságban az *L* és *B* közötti határfelület kockázatos értékpapír hatékony kombinációi között van-e.[69] Ha nem lenne ott, akkor többet, ha ott lenne, akkor nagyot lehetne mondani. Az alábbi ábra két része olyan esetet mutat, ahol az *M* ponttal jelölt piaci portfolió hatékony.

85. ábra Kockázat és megtérülés a piaci portfolió hatékonysága esetén

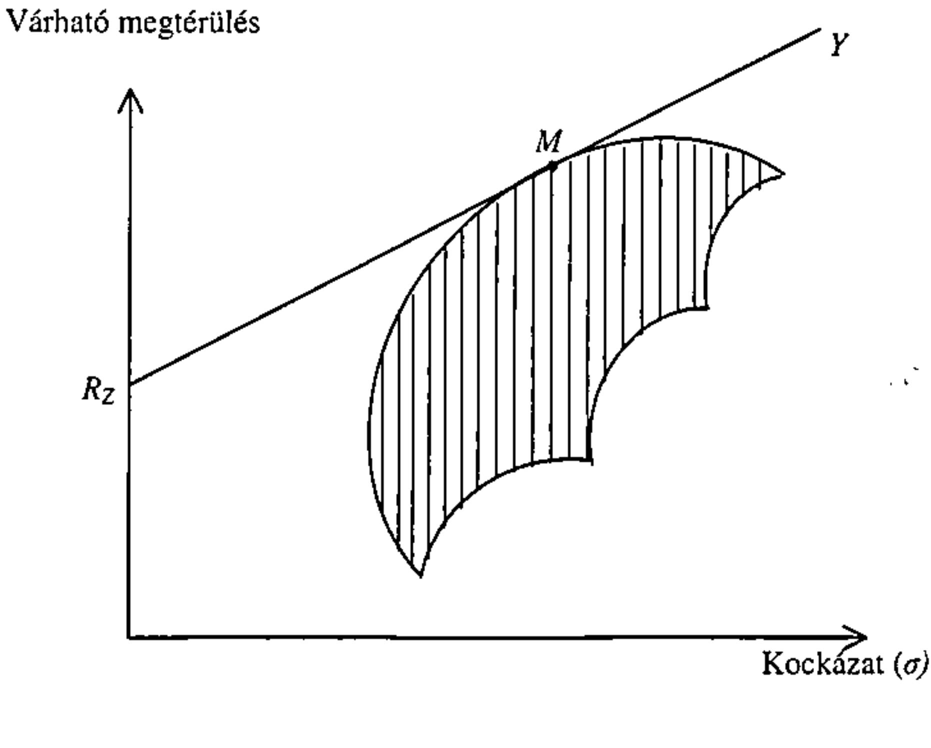
A)



[69] Ha befektetők bevételhez juthatnak fedezetlen eladásból, s erre nem vonatkozik korlátozás, akkor a piaci portfolió határozottan rajta lenne az *L* és *B* közötti hatékony felületen.

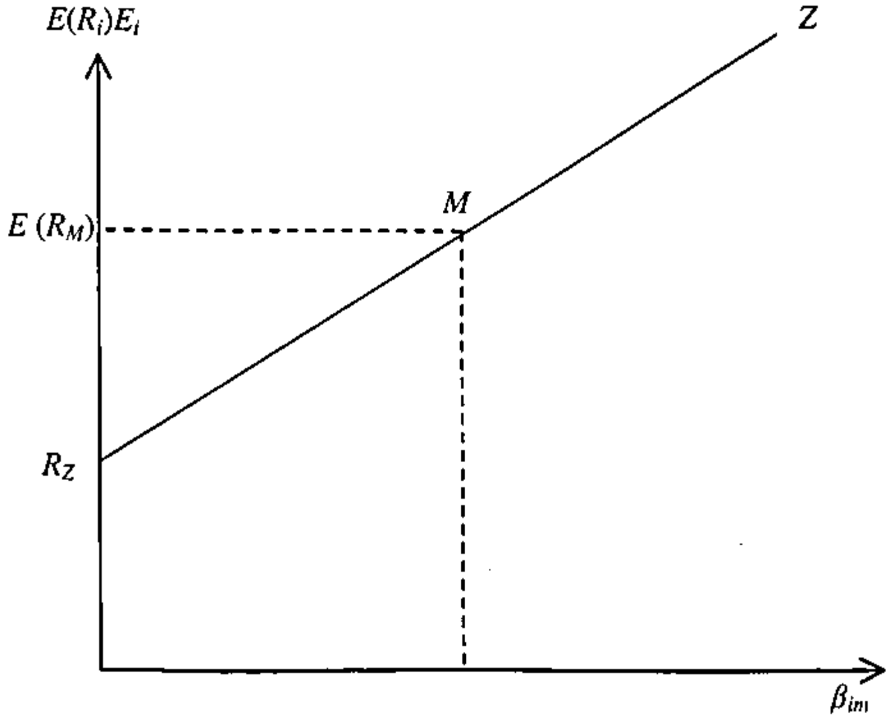
Az R_zMY egyenes a hatékony felületet az M pontban érinti, a függőleges tengelyt az R_z megtérülés pontjában metszi. Az ábra B) része csak az új alkotórészeket mutatja.

B)



Az 85. ábra B) részének jellemzői a következők. A kapott ábra pontosan ugyanolyan, amilyen azon a piacon keletkezne, ahol a befektetők R_z kockázatmentes ráta mellett, korlátozás nélkül kölcsönadhatnak és kölcsönvehetnek. Természetesen az R_zMZ egyenes mentén csupán az M pont elérhető, így az értékpapír-árak ugyanolyanok lennének, mintha olyan piacon lennének, ahol R_z ráta mellett történik kölcsönvétel és kölcsönadás. Az összes értékpapír és portfolió az *SML* egyenes mentén értékelődik, amely átmegy az R_z ponton, ahogy a 86. ábra mutatja.

86. ábra *Zéró-bétájú SML egyenes*



Az *SML* egyenes függőleges tengellyel való metszése egy értékpapír vagy portfolió várható megtérülését mutatja zéró bétával; a papír bármilyen (pozitív vagy negatív) mennyiségben birtokolható. Mivel a kockázatmentes értékpapír birtoklása nem negatív mennyiségekre korlátozott, így az R_z pontban ábrázolható. Ezt a megközelítést zéró-béta, vagy kétparaméteres CAPM modellnek nevezzük. E változat implikációja szerint az *SML* egyenes kevésbé meredek lesz, mint amilyen az eredeti elméletben szerepel, mivel az R_z az R_F felett van. Gyakorlati megközelítésben ez azt jelenti, hogy az R_z metszéspontot kockázatos értékpapírok árából lehet levezetni, mivel közvetlenül nem kapható meg a kincstári kötvények folyó megtérülési jegyzéseiből. Több beruházás-analízissel foglalkozó szervezet becsül ilyen *SML* egyenest, s általában úgy találják, hogy az jobban összhangban van a zéró-bétájú, mint az eredeti CAPM modellel. Azokban az esetekben, ahol a kölcsönvétel nem lehetséges, vagy nagyobb összeg esetén nagyobb költséggel jár, akkor a következtetések kevésbé módosulnak. Mindaddig, amíg a piaci portfolió hatékony, az összes értékpapír az *SML* egyenesre kerül, s a zéró-bétájú megtérülés meghaladhatja azt a kockázatos rátát, amely mellett a pénzalapok befektethetők.

6.6.3.3. A CAPM feltételek feloldása

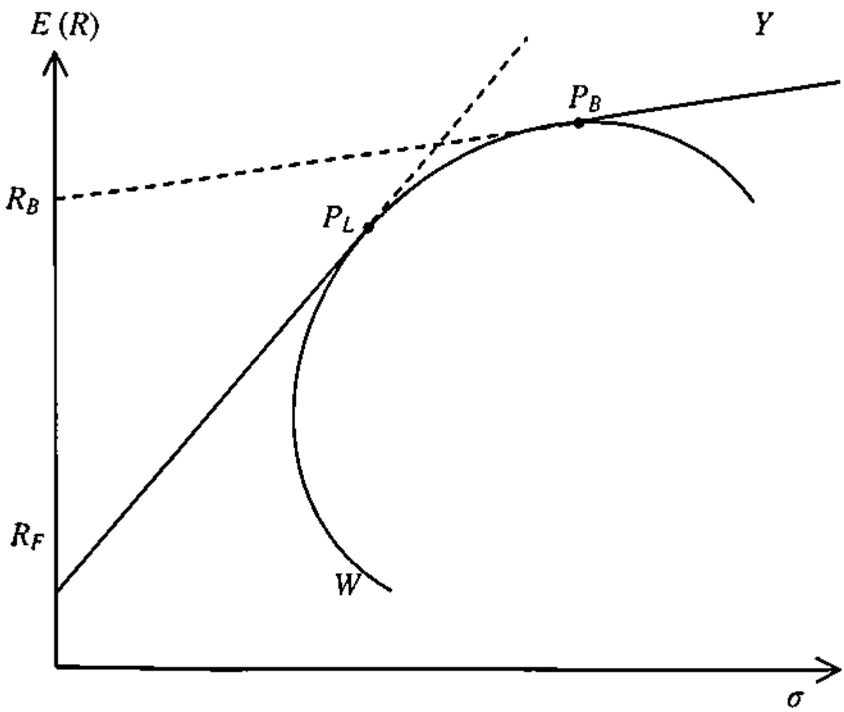
A CAPM modellt megalapozó feltételek némelyike nem áll összhangban a valós körülményekkel. A modell érvényessége kiterjeszthető az által, ha bizonyos feltevéseket reálisabb kondíciókkal helyettesítünk. A feloldás, bizonyos feltevések esetén, nyilvánvaló hatással jár.

6.6.3.3.1. Eltérő kölcsönadási és kölcsönvételi ráták

Nagyon valószínű, hogy a befektető nem tud ugyanolyan ráta mellett kölcsönt nyújtani és felvenni. Reálisabb azt feltételezni, hogy a kölcsönvételi ráta nagyobb a kölcsönadásinál. Az eltérő kölcsönadási és kölcsönvételi ráták implikációinak bemutatásához érdemes újra megvizsgálni a CML diagramot.

Ha a pénzalapokat R_F kockázatmentes kamatráta mellett adják kölcsön, akkor az R_F pontból induló egyenes a P_L pontban érinti a Markowitz-féle hatékony határvonalat, amit a P_L pontig terjedő szakaszban határoz meg. Az R_FP_L egyenes szakasz uralja a kockázatos eszközök hatékony határvonalának P_L ponttól balra eső minden egyes pontját.

87. ábra *CML egyenes: eltérő kölcsönvételi és kölcsönadási ráták*



Ha pedig az R_B az a ráta, amely mellett a pénzalapokat kölcsönveszik, s $R_B > R_F$, akkor az az optimális kockázatos portfolió, amelybe a kölcsönvett összeget befektették, a P_B ponttal adható meg, annál a pontnál, ahol az R_B pontból induló egyenes érinti a Markowitz hatékony határvonalat. Így az R_B pontból induló és a P_B ponton áthaladó egyenes P_B ponton túli pontjai uralják a kockázatos eszköz hatékony határvonalának P_B –től jobbra eső minden egyes pontját. Ebből adódóan három szegmensből áll az új hatékony pontsorozat.

- Ha az egyén olyan várható megtérülés-kockázat kompozíciót igényel, ami nagyobb vagy egyenlő mint $E(R_L)$, σ_L kockázat-megtérülés pont-párnál, akkor az $R_F P_L$ egyenesen választ pontot.

- Ha viszont olyan várható megtérülés-kockázat kombinációt óhajt, ami nagyobb vagy egyenlő mint az $E(R_B)$, σ_B kockázat-megtérülés kombináció, akkor a befektető az R_BP_B egyenesen a P_B ponttól jobbra választ portfoliót.

- Ha pedig a befektető az $E(R_L)$, σ_L és $E(R_B)$, σ_B pont-pár közé eső várható megtérülés-kockázat kombinációt igényel, akkor a Markowitz hatékony határvonalon a P_L és P_B pont között kell portfoliót választania, mivel az eredeti hatékony határvonalon az e két pont között elhelyezkedő kombinációkat nem uralják más pont-párok.

Így tehát, ha eltérő kölcsönadási és kölcsönvételi rátákat engedünk meg, akkor nem egyetlen piaci portfolió létezik, mivel a P_L és P_B közötti bármelyik, kockázatos portfolió. Minthogy ilyen esetben nem egy piaci portfolió létezik, így a *CML* egyenes sem lehet egyenes vonal. Ha eltérő kölcsönadási és kölcsönvételi rátákat vezetünk be, akkor a CAPM elmélet magyarázó ereje mérséklődik, érvényessége azonban teljesen mégsem kérdőjeleződik meg.

6.6.3.3.2. Egyensúlytalanság a tőkepiacon

A tökepiacok általában az egyensúlytalanság állapotában vannak. Az új információk jelentkezése például a várakozások változásához vezet, mivel folytonos piaci kiigazítás az eredménye. Az valószínűtlen, hogy mindegyik értékpapír mindig pontosan értékelődik, s ilyen helyzetben az SML érvényessége ne állna fenn. Ha viszont a korrekt értéktől való eltérések kicsik, akkor az SML közelítő alkalmazásához nem fér kétség.

Következtetések

- Amikor a CAPM modellt megalapozó feltevéseket feloldjuk, akkor annak hitelessége megkérdőjeleződik, az elmélet ennek ellenére alkalmas az eszközértékelés közelítő magyarázatára.
- A feltevések feloldásával a CAPM alternatív változatai származtathatók, ezekben azonban kissé más definíciója lesz a β szisztematikus kockázatnak és az R_F kockázatmentes rátának.
- Mindegyik esetben a CAPM pozitív lineáris kapcsolatot mutat a várható megtérülés és a szisztematikus kockázat között.

6.6.3.3. A portfolió-teljesítmény mérése

A tudatosan menedzselt portfoliók megtérülése a CAPM felhasználásával összehasonlítható a nem menedzselt portfoliók hozamával. Amennyiben az előbbi meghaladja az utóbbit, akkor a portfolió-menedzser jobb teljesítményt ér el, mint a piac. Hasonlóképpen: ha egy menedzselt portfolió megtérülése kisebb a teljesítmény-kritériumként szabott hozamnál, akkor a portfolió-menedzser a piaci nívó alatt teljesít. Az összehasonlítási alapként szolgáló portfoliók, amelyekhez a menedzselt portfoliók teljesítményét hasonlítják, azok a kockázatmentes eszköz és a piaci index kombinációi.

Emlékeztetve a CAPM korábban felírt egyenletére:

$$E(R_p) = R_F + \beta_p \left[E(R_M) - R_F \right] \tag{1}$$

ahol

$E(R_p)=$ a portfolió várható megtérülése β_p tényező mellett

$E(R_M)=$ a piaci portfolió várható megtérülése

R_F = kockázatmentes ráta

A fenti egyenlet inkább a befektető várakozásai alapján épül fel, s nem a realizált megtérülésre alapozódik. Ha viszont a realizált megtérülést rögzítjük elég nagy számú periódusra vonatkozóan, és átlagos realizált megtérülést számítunk, akkor az alábbi reláció érvényesül:

$$\overline{R} = \overline{R}_F + \beta_p\left(\overline{R}_M - \overline{R}_F\right) \tag{2}$$

ahol $\overline{R}, \overline{R}_M$ és $\overline{R}_F$ a portfolió, a piac és a kockázatmentes ráta átlagos realizált megtérülési értékét jelöli. Így a β_p kockázatú, menedzselt portfolió teljesítmény-kritériumként tekintett megtérülése a következők szerint adható meg:

$$\overline{R}_S = \overline{R}_F + \beta_p\left(\overline{R}_M - \overline{R}_F\right) \tag{3}$$

ahol $\overline{R}_S$ = a teljesítmény-kritérium átlagos realizált megtérülési rátája.

Amennyiben $\overline{R}_p$ jelöli a menedzselt portfolió átlagos realizált megtérülési rátáját, akkor a portfolió-menedzser teljesítményét a következők szerint mérhetjük:

$$\overline{\alpha}_p^* = \overline{R}_p - \overline{R}_S \tag{4}$$

Azok a menedzselt portfoliók, amelyekre $\overline{\alpha}_p^*$ pozitív érték, ott a kritériumot túlhaladták, melyeknél viszont negatív, ott az alatt teljesítettek.

A CAPM modell természetesen azt feltételezi, hogy $E(\overline{R}_p) = E(\overline{R}_S)$, azaz $E(\overline{\alpha}_p^*) = 0$. Egy menedzselt portfolió megtérülése a piaci modellel a következők szerint adható meg:

$$R_p = [\alpha_p - R_F(1-\beta_p)] + R_F + \beta_p(R_M - R_F) + \varepsilon_p$$

Amennyiben a realizált megtérülési értékeket megfelelően nagy számú periódusra rögzítjük, továbbá átlagos realizált megtérülést kalkulálunk, akkor a következő alakban felírható piaci modell érvényesül:

$$\overline{R}_p = [\alpha_p - \overline{R}_F(1-\beta_p)] + \overline{R}_F + \beta_p(\overline{R}_M - \overline{R}_F) \tag{5}$$

Kivonva a (3) egyenletet az (5) jelű kifejezésből, az alábbi alakot kapjuk:

$$\overline{R}_p - \overline{R}_S = \alpha_p - \overline{R}_F(1-\beta_p) \tag{6}$$

Így fennáll mindkét alábbi változat:

$$\overline{\alpha}_p^* = \alpha_p - \overline{R}_F(1-\beta_p) \tag{7}$$

$$\alpha_p^* = \alpha_p - R_F(1-\beta_p) \tag{8}$$

A piaci modellre vonatkozó korábbi analízisünkben az $[\alpha_p - R_F(1-\beta_p)]$ kifejezés a kockázattal korrigált többlet-megtérülést jelölte. Ennek megfelelően, egy menedzselt portfolió pozitív becsült kockázattal korrigált többlet-megtérüléssel *felülmúlja* a teljesítmény-kritériumot, ugyanígy egy másik portfolió negatív értékkel, *alulmúlja* azt.

6.6.4. A CAPM modell kritikája

Roll a következő tesztelés alapján kritizálta a CAPM modellt[70]:

- *Először* azt mondja, hogy csupán tesztelhető hipotézis kapcsolható ama elméleti feltevéshez, hogy a piaci portfolió várható érték-variancia hatékony-e, vagy nem. Amennyiben az hatékony, akkor a CAPM egyéb implikációi – különösen a várható érték és a kockázat közötti reláció – közvetlen konzekvenciaként adódik.

- *Másodszor,* az empirikus tesztelésben a piaci portfolió közelítő mértékét szükséges alkalmazni. Ha viszont a piaci portfolió nem azonosítható, (vagy egy olyan portfolió, amelynél a megtérülési értékek tökéletesen korrelálnak a piaci portfolió megtérülésével), akkor lehetetlen a CAPM modell akár elfogadása, akár elutasítása.

- *Harmadszor,* bármely helyettesítő lehet is meg nem is várható érték-variancia hatékony, ami azonban nem is bizonyítja, de nem is cáfolja a várható megtérülés és a kockázat közötti lineáris relációt.

A tesztelésnek ezek szerint igen nagy fontossága van. *Roll* szintén bírálta a CAPM alkalmazását a portfolió-menedzserek teljesítmény értékelésében. Ebben az esetben a menedzselt portfolió megtérülését összehasonlítják az ugyanolyan kockázati szintű, nem menedzselt portfolió megtérülé-

[70] Lásd többek között, Roll, R.: A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests. Journal of Financial Economics, March 1977; Ambiquity when Performance is Measured by the Security Market Line. Journal of Finance, September 1978.

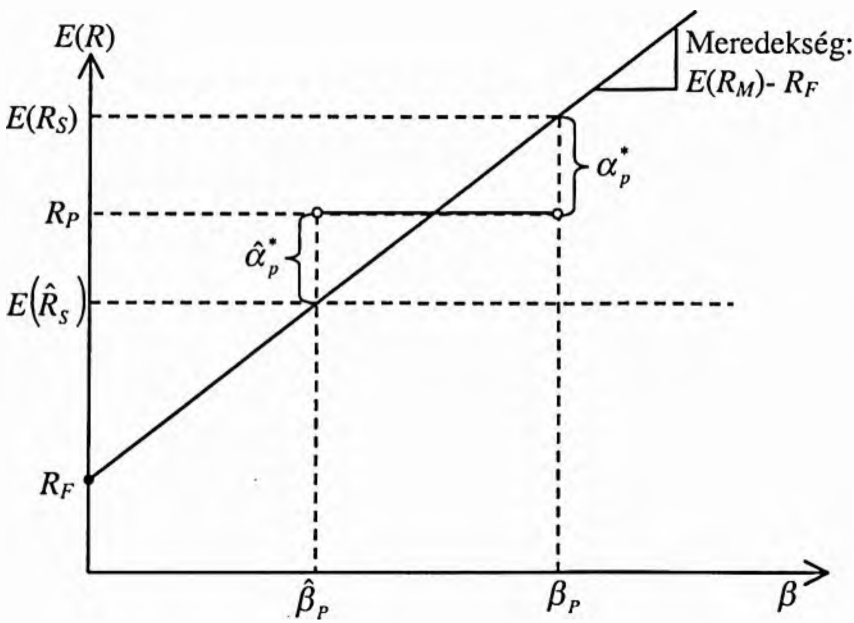
sével. *Ross*[71] úgy véli, hogy a piaci portfolió teljesítményének helyettesítésére alkalmazott mérték nem hiteles. Mivel a piacot helyettesítő részvény-index nincs rajta a hatékony határvonalon (azaz nem tekinthető várható érték-variancia hatékonynak), így lehetetlen következtetni, hogy egy ilyen indexre hivatkozó, kockázattal korrigált többlet-megtérülés a portfolió-menedzser befektetési képességeinek köszönhető, vagy egyszerűen a nem hatékony index alkalmazásából következik. *Roll* továbbá azt is kimutatja, hogy ha két menedzselt portfolió teljesítményét különböző piachelyettesítők alapján hasonlítjuk össze, akkor a kockázattal korrigált többlet-megtérülés (azaz a teljesítmény) rangsorolása az ellenkezőjére fordul. A teljesítménymérés hibáit véletlen változások és az ex ante CAPM mérce egyaránt előidézhetik. Ha a hibák véletlen hatásoknak tulajdoníthatók, akkor azok ismételt értékeléssel felszámolhatók, s ezek nem a mérce hibái. Így előfordulhat, hogy egy befektetési menedzser „negatív mércéjű, hibás portfoliót" választ, akkor úgy tűnik, hogy felülmúlta a piacot, ellenben a „pozitív mércéjű, hibás portfolió" a piachoz viszonyítva, alulteljesítésnek tűnik.

Roll először azt az esetet tekintette, amikor a portfolió vonatkozó kockázati szintjét pontatlanul határozták meg. Ez akkor történik, ha a piaci index nem hatékony, s a hiba a béta kalkulált értéke és a hatékony index alkalmazásával nyerhető érték közötti különbség. A kockázat pontatlan felmérése oda vezet, hogy a valós teljesítmény különbözni fog a mért teljesítménytől, amint azt az alábbi ábra mutatja. Mint alább látható, a telje-

[71] Erről ír Ross, S. A.: The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing. Journal of Economic Theory, December 1976. c. művében.

sítmény mérése a portfolió megfigyelt megtérülése és az SML egyenes által előrejelzett mérték közötti különbséggel történik.

88. ábra A portfolió kockázati szint pontatlan felmérése által okozott, helytelen teljesítmény-megállapítás



A pontatlanul felmért $\hat{\beta}_p$ kockázati szintnél a portfolió-menedzser úgy mutatkozik, mint aki felülmúlta a piacot, mivel a megfigyelt megtérülés R_p, s fölötte van az SML által diktált $E\left(\hat{R}_S\right)$ szintnek, a mért teljesítmény:

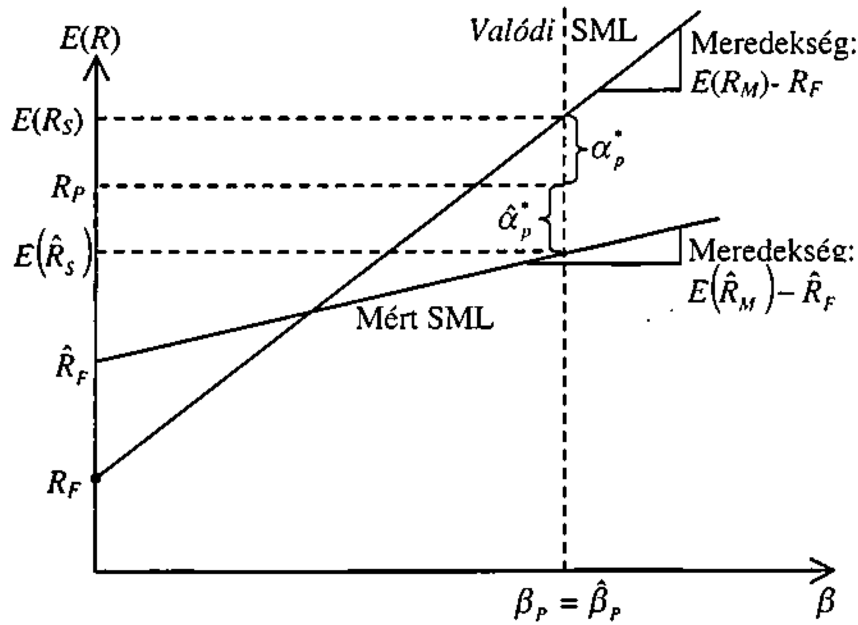
$$\hat{\alpha}_P^* = R_P - E\left(\hat{R}_S\right)$$

pozitív érték. A portfolióhoz kapcsolódó tényleges kockázat azonban nagyobb a mért kockázatnál, s a β_p tényleges kockázati szinten az $E(R_S)$ várható megtérülés a megfigyelt megtérülés fölött helyezkedik el, s így a valós teljesítmény negatív és $(-\alpha_p^*) = R_p - E(R_S)$ értéket ad.

Roll ezután azt az esetet tekinti, ahol a valódi és a mért teljesítmény különbsége az SML egyenes hibás pozíciója miatt következik be. Ez előfordulhat egyrészt azért, mert nem hatékony piaci indexet alkalmaznak, azaz amikor az $E(\hat{R}_M)$ várható megtérülés eltér az átlagos varianciájú hatékony piaci index $E(R_M)$ megtérülésétől; másrészt amiatt, mert a normális kockázatmentes eszköz $E(R_F)$ megtérülése különbözik a valódi kockázatmentes eszköz R_F megtérülésétől. Egy ilyen szituációt mutat be a 89. ábra.

Az ábrán a mért teljesítmény újra pozitív, és $\alpha_p^* = R_p - E(\hat{R}_S)$ különbséggel azonos, a valóságban azonban a tényleges teljesítmény negatív és azonos a $[(-\alpha_p^*) = R_p - E(R_S)]$ értékkel. A tényleges és a becsült teljesítmény közötti különbséget előidézheti az SML három komponense: a béta koefficiens, a piaci index várható értéke, vagy a kockázatmentes kamatráta közül bármelyiknek a pontatlan felmérése.

89. ábra Az SML egyenes hibás pozíciója által előidézett, helytelen teljesítmény-mérés



Roll kimutatja, hogy a valós és a mért teljesítmény közötti különbség előidézésének kritikus alkotóeleme a piaci index optimális, vagy attól eltérő megválasztása (azaz, hogy a választott index várható érték-variancia hatékony-e, vagy nem). A CAPM mérték hibája így minden olyan esetben jelen van, amikor a piaci index ex ante nem várható érték-variancia hatékony portfolió, s e hiba megismételt menedzseri iterációval sem átlagolható ki. Roll a CAPM modellhez kapcsolódó lényeges problémákat hangsúlyozott, mégis, ahhoz hogy széles körben elismert és átfogó piaci indexet alkalmazhassunk, teljességgel le kell mondanunk arról, hogy mérjük a kockázattal korrigált relatív teljesítményt.

6.6.5. A CAPM és a piaci modell összehasonlítása

Az egyedi értékpapírra vonatkozó piaci modell a következő egyenlettel adható meg:

$$\tilde{R}_i = \alpha_i + \beta_i \tilde{R}_M + \varepsilon_i \tag{1}$$

A portfolióra vonatkozó, megfelelő piaci modell így írható fel:

$$\tilde{R}_p = \alpha_p + \beta_p \tilde{R}_M + \varepsilon_p \tag{2}$$

ahol

$\tilde{R}_p$ = a portfolió megtérülése

$\tilde{R}_M$ = a piaci index megtérülése

α_p és β_p = paraméterek

ε_p = véletlen hibatényező

A (2) egyenlet kockázati prémium formában így fejezhető ki:

$$R_p - R_F = [\alpha_p - R_F(1-\beta_p)] + \beta_p(R_M - R_F) + \varepsilon_p) \tag{3}$$

A (2) és (3) egyenlet összehasonlításából kiderül, hogy az egyenes meredeksége β_p és változatlan. Ellenben a metszéspontot kifejező tag a (2) egyenletbeli α_p-ről a (3) egyenletben $[\alpha_p - R_F(1-\beta_p)]$ kifejezésre változik. A (2) egyenlettel adott piaci modellben az α_p a portfolió várható megtérüléseként interpretálható olyan esetre, amikor a piaci megtérülés zéró. A (3) egyenletben a piaci modell $[\alpha_p - R_F(1-\beta_p)]$ kockázati prémium formája portfolió várható kockázati prémiumként értelmezhető (vagy a kockázatmentes ráta fölötti többlet-megtérülésként), amikor is a piaci megtérülés megegyezik a kockázatmentes rátával, azaz amikor a piaci kockázati prémium (vagy a kockázatmentes kamatráta fölötti többlet-megtérülés) éppen zéró. Az $[\alpha_p - R_F(1-\beta_p)]$ kifejezés kockázattal korrigált többlet-megtérülésnek is nevezhető.

A (3) egyenlet kockázati prémium formában kifejezett piaci modellje az alábbiak szerint átrendezhető:

$$R_p = [\alpha_p - R_F(1-\beta_p)] + R_F + \beta_p(R_M - R_F) + \varepsilon_p \tag{4}$$

Ha a (4) kifejezésre alkalmazzuk a várható érték operátort, akkor a következőt kapjuk:

$$E(R_p) = [\alpha_p - R_F(1-\beta_p)] + R_F + \beta_p[E(R_M - R_F)] \tag{5}$$

Az (5) egyenlettel adott piaci előrejelzési modell összehasonlítható a CAPM modell alapegyenletével:

$$E(R_p) = R_F + \beta_p[E(R_M - R_F)]$$

Világosan látható, hogy ha a portfoliónak pozitív kockázattal korrigált többlet-megtérülése van, azaz $\alpha_p > R_F(1-\beta_p)$, akkor a várható megtérülés nagyobb annál, mint amit a CAPM modell előrejelez. Azt mondhatjuk, hogy az ilyen portfolió alulteljesít a piaci színvonalhoz viszonyítva. Az (5) egyenlettel kifejezett piaci modell azt igazolja, hogy a kockázattal korrigált többlet-megtérülés lehet pozitív, negatív, vagy zéró. Amikor a kockázattal korrigált többlet-megtérülés zéró, akkor a piaci modell a CAPM modell alapegyenletére egyszerűsödik.

A piaci modell kockázati prémium formájában kifejezett alakját idézzük fel újra:

$$R_p - R_F = [\alpha_p - R_F(1-\beta_p)] + \beta_p(R_M - R_F) + \varepsilon_p$$

Erre alapozva, a piaci portfolióra vonatkozó karakter egyenes az alábbi formációra egyszerűsödik:

$$R_p - R_F = 0 + 1(R_M - R_F) \tag{6}$$

A (6) egyenlet azt mutatja, hogy $\{[\alpha_p - R_F(1-\beta_p) + \varepsilon_p]\} = 0$ a piaci portfolióra vonatkozóan. E feltétel értékpapír megtérülésre vonatkozó implikációi a következők. A (4) egyenlettel adott piaci modellt átírva, az *i* egyedi értékpapírra vonatkoztatva a következőt kapjuk:

$$R_i = \{R_F + [\alpha_i - R_F(1-\beta_i)] + \varepsilon_i\} + \beta_i(R_M - R_F) \tag{7}$$

Az egyenlet jobb oldalának kapcsos zárójeles tagja reprezentálja az *i* értékpapír *nem piaci* karakterű befektetésének megtérülését. A második tag az értékpapír-befektetés piaci karakterének megtérülését mutatja. Ha az egyén β_i összegű forrást vesz kölcsön kockázatmentes ráta mellett, s az összeget befekteti piaci portfolióba, akkor nettó hozadéka

$$\beta_i R_M - \beta_i R_F = \beta_i(R_M - R_F)$$

összegű lesz. A (7) egyenlet jobb oldalának második tagja a piaci portfolióba irányuló beruházás hozamaként tekinthető, így bármely értékpapír egységnyi beruházása két komponensre bontható: az egyik egységnyi forrás befektetése az értékpapír nem piaci karakterébe, a másik a β_i összeg kölcsönvétele kockázatmentes kamatráta mellett, majd annak befektetése a piaci portfolióba. Az értékpapír-befektetés utóbbi komponenséhez kapcsolódó megtérülés ugyanakkora kell legyen, mint a piaci portfolióba irányuló közvetlen beruházás.

Ahhoz, hogy meghatározhassuk az értékpapír nem piaci karakterébe irányuló befektetés várható megtérülését, szükséges felidézni, hogy a piaci portfolióra fennáll a következő reláció: $\{[\alpha_p - R_F(1-\beta_p)] + \varepsilon_p\} = 0$, így a piaci portfolió nem piaci karakterébe irányuló beruházás megtérülése valójában a kockázatmentes kamatráta. Tudjuk azt is, hogy hatékony piacon mindegyik értékpapír pontosan értékelődik. Továbbá ismeretes, hogy bármely értékpapírhoz kapcsolódó nem szisztematikus kockázat – tökéletesen diverzifikált portfolió birtoklásával – eliminálható. Ilyen a piaci portfolió is, s ezért a nem szisztematikus kockázat kompenzálására nem várható jutalom. Így az értékpapír nem piaci karakterébe irányuló beruházás várható megtérülése maga a kockázatmentes ráta. Eszerint:

$$E\{[\alpha_i - R_F(1-\beta_i)] + \varepsilon_i\} = 0 \tag{8}$$

ahonnan

$$\alpha_i - R_F(1-\beta_i) = 0$$

Ez az oka annak, hogy hatékony piacon minden egyes értékpapír úgy értékelődik, hogy a kockázattal korrigált többlet-megtérülés zéró legyen, s így bármely portfolió kockázattal korrigált többlet-megtérülése szükségképpen zéró kell legyen. Így hatékony piacon az (5) formulával adott piaci modell a CAPM alapegyenletére egyszerűsödik.

6.7. CAPM és portfolió gazdálkodás

Ahogy az egyedi értékpapírnak van béta tényezője, ugyanúgy van az értékpapírok portfoliójának is. Az a portfolió, amely a tőkepiacon forgalmazott összes értékpapírt tartalmazza (ugyanolyan arányokban, mint a piac egésze), kizárva a kockázatmentes értékpapírokat, olyan remélt megtérüléssel rendelkezik, mint a piac egészének várható megtérülése, ezért béta tényezője 1 lesz. Az a portfolió, amely kizárólag kockázatmentes értékpapírokat foglal magában, annak béta tényezője 0. A befektető portfoliójának béta tényezője a portfolióban szereplő értékpapírok béta tényezőjének súlyozott átlaga.

Az öt értékpapírból álló portfolió béta tényezője a következők szerint számítható:

75. tábla *Portfolió béta számítása*

Értékpapír	**Portfolió-beli arány (%)**	**Értékpapír béta tényező**	**Súlyozott béta tényező**
A	20	0.90	0.180
B	10	1.25	0.125
C	15	1.10	0.165
D	20	1.15	0.230
E	35	0.70	0.245
		Portfolió béta =	**0.945**

Ha a kockázatmentes megtérülési ráta 12%, a várható piaci megtérülés 20%, a portfolióból származó remélt megtérülés:

$$12\% + 0.945(20\text{-}2)\% = 19.56\%.$$

A számítást az alábbi módon is lehetne végezni:

76. tábla *Elvárt megtérülési ráta számítása*

Érték-papír	**Béta tényező**	**Remélt megtérülés (%)** $[R_F + \beta(R_M - R_F)]$	**Súlyok (%)**	**Súlyozott megtérülés (%)**
A	0.90	19.2	20	3.84
B	1.25	22.0	10	2.20
C	1.10	20.8	15	3.12
D	1.15	21.2	20	4.24
E	0.70	17.6	35	6.16
			100	19.56

6.7.1. Áttétel és a vállalati részvénytőke béta értéke

A vállalati áttétel befolyásolja a részvénytőke kockázatát. Ha egy vállalat áttétellel ösztönzött, s ezért finanszírozási kockázata magasabb a kizárólag részvényből finanszírozott vállalaténál, akkor az áttételes vállalat részvénytőkéjének béta értéke magasabb lesz, mint a hasonló, nem áttételes vállalat részvénytőkéjének béta értéke.

6.7.2. A CAPM modell és a Modigliani-Miller tételek

Modigliani és Miller szerint, ha az áttétel fokozódik, akkor a részvénytőke költsége növekszik, hogy kompenzálja azt az extra finanszírozási kockázatot, amely az áttételes vállalatba történt befektetés miatt keletkezik. A finanszírozási kockázat, a kockázat egy megnyilvánulási formája, amelynek vissza kell tükröződni a vállalati béta tényezőjében. A modell alkalmazásának illusztrálására tekintsünk egy példát.

Egy kizárólag részvényből finanszírozott vállalat tőkeköltsége 15%. Egy minden tekintetben hasonló, csak az áttételben különböző vállalat részvénytőke/kölcsöntőke aránya 4:1. A kölcsöntőke költsége, amely virtuálisan kockázatmentes, 5%. A vállalati adóráta 33%. A piaci portfolióból származó megtérülés 10%. (A kockázatmentes ráta – mint említettük, 5%.)

A nem áttételes vállalat béta tényezője a CAPM modell segítségével kalkulálható.

$$15\% = 5\% + \beta(10\% - 5\%)$$

$$\beta = 2$$

Alkalmazva a Modigliani-Miller formulát az áttételes vállalat részvénytőke költségére, e példában a tőkeköltség így számítható:

$$\begin{aligned} K_S^L &= K_u + (1-T)\left[(K_{uB} - K_b)\frac{B}{S}\right] \\ &= 15\% + (1-0.33)\left[(15\% - 5\%)\cdot\frac{1}{4}\right] \\ &= 16.675\% \end{aligned}$$

Az áttételes vállalat béta tényezőjét a következők szerint határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} 16.675\% &= 5\% + \beta(10\% - 5\%) \\ \beta &= 2.335 \end{aligned}$$

Amint azt várni lehetett, az áttételes vállalat - extra finanszírozási kockázata miatt – béta tényezője nagyobb, mint a nem áttételes vállalat bétája.

Az áttételes vállalat részvénytöke költsége más módon is kiszámítható. Modigliani és Miller II. tétele szerint az áttételes vállalat részvénytőke költsége egyenlő a hasonló, nem áttételes vállalat (ugyanolyan kockázati jellemzővel) részvénytőke költsége, plusz a finanszírozási kockázatot kompenzáló prémium. Ennek alapján felírható a következő összefüggés:

$$K_S^L = K_u + (1-T)\left[(K_u - K_B)\frac{B}{S}\right]$$

A K_B kölcsöntőke költséget Modigliani és Miller kockázatmentes költségnek (R_F) feltételezte. Így, mivel a CAPM modell $K_u = R_F + \beta_u(\overline{R}_M - R_F)$ alakban adható meg, ahol a β_u a nem áttételes vállalat béta tényezője. Ez utóbbi kifejezés behelyettesíthető az előzőbe, s eredményül a következőt kapjuk:

$$K_S^L = R_F + \beta_u(\overline{R}_M - R_F)\left[1 + \frac{(1-T)B}{S}\right]$$

Ez az egyenlet azt mondja, hogy az áttételes vállalat részvénytőke költsége hasonló a nem áttételes vállalatéhoz, annyi különbséggel, hogy a kockázatmentes megtérülési ráta fölötti $\beta_u(\overline{R}_M - R_F)$ prémiumot korrigálni kell az

$$\left[1 + \frac{(1-T)B}{S}\right]$$

tényezővel. Illusztráljuk ezt egy példával.

Feltételezzük, hogy a vállalatot részben kölcsöntőkével (piaci értéke 5000000 dollár), részben részvénytőkével (piaci értéke 20000000 dollár) finanszírozzák. Üzleti kockázata hasonlatos egy másik vállalatéhoz, amelyet kizárólag részvénytőkével finanszíroznak. A vállalat béta értéke 1.1, a várható piaci megtérülés 12%, a kockázatmentes megtérülési ráta 8%.

Az áttételes vállalat részvénytöke költsége (amit magasabbnak feltételezünk a nem áttételes vállalat részvénytöke költségénél – a nagyobb finanszírozási kockázat miatt) a következők szerint számítható, 33%-os adóráta feltételezésével.

$$K_u = 8\% + 1.1(12\% - 8\%) = 12.4\%$$

$$K_S^L = 8\% + 1.1(12\% - 8\%) \cdot \left[1 + \frac{0.67 \cdot 5}{20}\right]$$

$$= 13.137\%$$

6.7.3. Áttételes és áttétel nélküli béták

A Modigliani-Miller elmélet és a CAPM modell közötti kapcsolat azt jelenti, hogy számszerű összefüggés mutatható ki a nem áttételes és a hozzá hasonló, de áttételes vállalat béta értéke között. A hitelezett vállalat béta értéke magasabb lesz a vele minden tekintetben azonos vállalaténál, a különbség csak az, hogy az utóbbit kizárólag részvénytőkével finanszírozzák. A különbség oka az extra finanszírozási kockázat. A nem áttételes és áttételes béta közötti kapcsolat a következők szerint mutatható ki:

$$\beta_u = \frac{\beta_L}{\left[1 + \frac{B(1-T)}{S}\right]}$$

ahol

β_u = a nem hitelezett vállalat béta tényezője

β_L = a hasonló, de hitelezett vállalat béta tényezője

B = a kölcsöntőke piaci értéke a hitelezett vállalatban

S = a részvénytőke piaci értéke a hitelezett vállalatban

T = vállalati adóráta

Az előző egyenlet átrendezésével a következőket kapjuk:

$$\beta_L = \beta_u \left[1 + \frac{B(1-T)}{S}\right]$$

$$\beta_g = \beta_u + \beta_u \left[\frac{B(1-T)}{V_{eg}}\right]$$

Látható, hogy az áttételes béta egyenlő a nem áttételes béta és a finanszírozási kockázat miatt kapott prémium összegével; ez utóbbi tényező

$$\beta_u = \left[\frac{B(1-T)}{S}\right]$$

alakban fejezhető ki. Az elmondottakat illusztráljuk a következő példával.

Két vállalat minden tekintetben azonos, kivéve tőkestruktúrájukat. Piaci értékük egyensúlyi helyzetben a 77. tábla szerint alakul.

A hitelezett vállalat teljes értéke magasabb, mint a nem hitelezett vállalaté, ami konzisztens Modigliani és Miller $V_L = V_u + BT$ formulával felírható I. tételével. Az összes adózás utáni profitot osztalékként kifizetik, s emiatt nem számolnak növekedéssel. A nem hitelezett vállalat béta értéke 1.0. A hitelezett vállalat kölcsöntőkéje kockázatmentesnek tekinthető.

77. tábla *Eltérő tőkestruktúrájú vállalatok*

	Hitelezett vállalat	**Nem hitelezett vállalat**
	ezer dollár	
Éves profit kamat és adó előtt	1000	1000
Levonva a kamat (4000·8%)	320	0
	680	1000
Levonva az adót (T = 33%)	224	330
Adózás utáni profit = osztalék	456	670
Részvénytőke piaci értéke	3900	6700
Kölcsöntőke piaci értéke	4180	0
Vállalat teljes piaci értéke	8080	6700

Számítsuk ki a hitelezett vállalat részvénytőke költségét, az R_M piaci megtérülést, valamint a hitelezett vállalat béta értékét.

Mivel a piaci érték egyensúlyi állapotot tükröz, a részvénytőke költsége a hitelezett vállalat esetében az osztalék és a vállalati érték hányadosaként számítható:

$$\frac{\text{Osztalék}}{\text{Piaci érték}} = \frac{456\,000}{3\,900\,000} = 11.69\%$$

A nem áttételes vállalat béta értéke 1.0, ami azt jelenti, hogy az ilyen vállalatból származó remélt megtérülés pontosan megegyezik a piaci hozammal, így $\overline{R}_M$ =10%. Az áttételes béta számítása a következők szerint történik:

$$\begin{aligned}\beta_L &= \left[1+\frac{(1-T)B}{S}\right] \\ &= 1.0\left[1+\frac{0.67\cdot(4180)}{3900}\right] \\ &= 1.72\end{aligned}$$

Amint azt várni lehetett, az áttételes vállalat bétája magasabb a nem áttételes vállalaténál.

A CAPM modell és a Modigliani-Miller elmélet összekapcsolásában a legfontosabb egyszerűsítő feltevés a kölcsöntőke költségének (K_B) kockázatmentes megtérülési rátaként kezelése. Ez nyilvánvalóan távol áll a realitástól. A vállalatok mind a kamatfizetésben, mind a hitelek visszafizetésében képtelenné válhatnak kötelezettségeik teljesítésére. Becsléssel meghatározható, hogy a vállalati kölcsöntőke béta értéke 0.2-0.3 körül van. A kölcsöntőke kockázatmentes jellegének feltételezése olyan követelménnyel jár, hogy a formula alábecsüli a K_u értékét és ezért egyrészt túlbecsüli a finanszírozási kockázatot az áttételes vállalatban, másrészt alábecsüli az üzleti kockázatot az áttételes és nem áttételes vállalatokban érvényesülő kompenzáló mennyiséggel. Más szavakkal: a β_u egy kicsivel nagyobb, a β_L egy kicsivel alacsonyabb lesz annál, amit a formula sugall.

6.7.4. A CAPM gyakorlati implikációi

A CAPM elmélet implikációi a befektető számára a következők. El kell döntenie, milyen béta faktorú portfoliót szeretne. Preferálhatná az 1-nél nagyobb béta tényezővel rendelkező portfoliót, hogy átlagon felüli megtérülést remélhessen akkor, ha a piaci megtérülés meghaladja a kockázatmentes rátát, habár így komoly veszteséget szenvedne a piaci megtérülés csökkenésekor. Másik oldalról viszont preferálhatná az 1 béta faktorú portfoliót, vagy éppen kisebbet is. Alternatív lehetőségként a befektetőnek törekednie kellene beruházni alacsony béta faktorú részvényekbe a piaci hozamok esésekor, ugyanakkor el kellene adnia magas béta faktorú részvényeit. Ezzel szemben törekednie kell befektetni magas béta értékű részvényekbe a piaci hozamok emelkedésekor. A befektető portfoliójának béta tényezője mérhető az egyedi értékpapírok béta értékeiről szerzett információk segítségével.

6.7.4.1. A CAPM modell korlátai az értékpapír-portfoliók szelekciójában

A CAPM modell feltételei között az értékpapírból várható megtérülés inkább annak szisztematikus kockázatához kapcsolódik, s nem annak teljes kockázatához. A modellt megalapozó néhány feltétel feloldásakor a teljes kockázat is fontos lehet. Különösen az alábbi megfontolásokat célszerű figyelembe venni.

- A modell feltételezi, hogy a vállalati fizetésképtelenségnek nincs költsége, más szóval: az eszközök összessége „going concern" árakon adható el, nincsenek értékesítési, peres és egyéb kiadások. A gyakorlatban azonban a fizetésképtelenség költségei nem elhanyagolhatók. Továbbá a fizetésképtelenség kockázata inkább a vállalat teljes, semmint annak szisztematikus kockázatához kapcsolódik.

- A modell feltevése szerint a befektetési piac hatékony. Ha ez nem állna fenn, akkor ez korlátozza azt a mértéket, amelyben a befektető eliminálni képes saját portfoliójából a nem szisztematikus kockázatot.

- A modell azt is feltételezi, hogy a portfoliók jól diverzifikáltak, s így elegendő csak a szisztematikus kockázatra figyelni. Mindazonáltal ez nem feltétlenül áll fenn s a nem, vagy csak részben diverzifikált portfoliót birtokló részvényesek ugyancsak figyelemmel kell legyenek a nem szisztematikus kockázatra: s olyan teljes megtérülésre kell törekedniük, amely a velük szemben álló teljes kockázatnak megfelel.

6.7.4.2. A CAPM modell gyakorlati alkalmazásának főbb nehézségei

Az egyik probléma az $\left(\overline{R}_M - R_F\right)$ többlet-megtérülés meghatározásához kapcsolódik. A gyakorlatban célszerűbb remélt megtérülési értékeket alkalmazni történetiek helyett, habár gyakran előfordul a múltbeli értékek használata. Egy másik gond a kockázatmentes ráta kiválasztásával függ össze. Ehhez a leggyakrabban a kormányzati értékpapírt veszik alapul, habár e ráta sem állandó, mivel a kamatlábak a hitelezési futamidő változásával módosulnak. Becslési hibák a béta értékek számítására szolgáló statisztikai analízisben is előfordulhatnak.

6.7.5. A CAPM és a projekt-értékelés[72]

A CAPM modellel meghatározott részvénytőke-költség alkalmazható a beruházási projektek értékelésében is. Ilyen esetben a tőkeköltség a $K_S = R_F + \beta_S\left(\overline{R}_M - R_F\right)$ formulával határozható meg, ahol a β_S a vállalati részvénytőke béta értéke. Vegyünk egy példát a modell ilyen célú alkalmazására.

A vállalatot részvénytőke és kölcsöntőke kombinációjával finanszírozzák; a két komponens piaci értéke 3:1 arányú. A kockázatmentesnek tekinthető kölcsöntőke 10%-os adózás előtti jövedelmet hoz. A részvénytőke átlagos piaci megtérülési rátája 18%-os. A vállalati részvénytőke béta értékét 0.9 nagyságúra becsülik. Az adóráta 33%-os. Milyen lehetne az új beruházási projekt értékeléséhez használható tőkeköltség, ha a projekt szisztematikus kockázati jellemzői ugyanolyanok, mint a vállalat jelenlegi beruházási portfoliójáé?

Ha nincs változás a vállalati finanszírozási áttétel fokában, akkor a megfelelő tőkeköltség a vállalat súlyozott átlagos tőkeköltsége (WACC). A CAPM a következők szerint használható fel a vállalati részvénytőke-költségek becslésére:

$$\begin{aligned} K_S &= 10\% + 0.95(16 - 10) \\ &= 15.7\% \end{aligned}$$

A kölcsöntőke adózás utáni költsége 0.67·10% =6.7%, ezért a súlyozott átlagköltség a következők szerint számítható:

[72] A CAPM modell tőke-költségvetésbeli alkalmazásával részletesebben később foglalkozunk.

$$WACC = \left(\tfrac{3}{4} \cdot 15.7\%\right) + \left(\tfrac{1}{4} \cdot 6.7\%\right) = 13.45\%$$

Miben áll valójában a WACC eltérő alkalmazása a CAPM modell használata esetén? A valóságban az egyetlen különbség a vállalati részvénytőke költségének számítási módjában van, azaz osztalékértékelési vagy CAPM modellel számolunk. A részvénytőke költségének méréséhez használt különböző eljárások két értéket állítanak elő. Az osztalékértékelési modell az osztalék és a folyó részvényérték remélt adataival dolgozik. Az osztalék extra vagy alacsonyabb megtérülést foglalhat magában, amelyet a nem szisztematikus kockázat változatai, vagy ugyanígy a szisztematikus kockázat idéz elő. Előadódhat, hogy a részvényárak éppen nincsenek egyensúlyban. Másik oldalról, a CAPM modell csak a szisztematikus kockázatot veszi számításba, s egyensúlyt feltételez a részvénypiacon. Amennyiben az osztalék csak a szisztematikus kockázatra reflektál, s a részvénypiaci árak egyensúlyban vannak, akkor az osztalék-értékelési és CAPM modell nagyjából ugyanolyan becslést kell adjon mind a vállalati részvénytőke költségére, mind pedig a WACC értékére.

6.7.6. A CAPM alkalmazása diverzifikációs projekt diszkontrátájának előállítására

Ha egy vállalat befektetést tervez olyan projektbe, amely új üzleti területre irányuló diverzifikációt céloz, akkor a vállalat e beruházása a szisztematikus kockázat eltérő szintjét hordozza, mint amilyet a vállalat meglevő projektjeinél figyelembe vesznek. A projektre specifikusan jellemző diszkontrátát kell számítani, amely egyaránt figyelembe veszi a projekt szisztematikus kockázatát és a vállalati áttétel szintjét.

A CAPM alkalmazásával kapható diszkontráta, de az így kapott érték nem minden tekintetben korrekt. Az alkalmazható módszer a következőként írható le. Az első lépésben becslést kell kapni a projekt működési pénzárama szisztematikus kockázatának jellemzőiről úgy, hogy megszerzik ama vállalatok publikált béta adatait, amelyek a vállalat által diverzifikációval megcélzott ágazatban tevékenykednek. Második lépésben a vállalati áttétel fokának megfelelően korrigálni kell a béta értékeket. E korrekció két fázisban történik. Először, ha az ágazat más vállalatainak béta értékét nem áttételes bétává akarjuk konvertálni, akkor a következő formulát kell alkalmazni:

$$\beta_u = \frac{\beta_L}{\left[1 + \frac{B(1-T)}{S}\right]}$$

Másodszor, előállítani egy nem áttételes béta értéket, majd visszaalakítani azt olyan áttételes bétává, amely tükrözi a vállalat saját áttételi arányát, a következő formulával:

$$\beta_L = \beta_u \left[1 + \frac{B(1-T)}{S}\right]$$

A projekt specifikus áttételes béta becslését követően a CAPM felhasználható a projekt-specifikus részvénytőke költségbecsléséhez, valamint a projekt-specifikus tőkeköltség meghatározására, ez utóbbit a részvénytőke és kölcsöntőke költség súlyozására alapozva. Mutassuk be az elmondottakat az alábbi példa segítségével.

A vállalati kölcsöntőke/részvénytőke arány a piaci értékre alapozva 2:5. A feltehetően kockázatmentes vállalati kölcsöntőke 11%-os adózás előtti jövedelmet hoz. A vállalati részvénytőke jelenlegi béta értéke 1.1. A tőkepiaci részvényeken nyerhető átlagos megtérülés 16%. A vállalat éppen most készül beruházni olyan projektbe, amely diverzifikációt jelentene egy új ágazatba, s erről a következő információk állnak rendelkezésre. A részvénytőke átlagos béta koefficiense 1.59. Az átlagos kölcsöntőke/részvénytőke az ágazatban 1:2 (piaci értéken). A vállalati adó rátája 33%. Mekkora lehetne a projektre alkalmazható tőkeköltség?

Konvertáljuk az ágazatra vonatkozó áttételes béta értéket nem áttételes béta értékké.

$$\beta_u = \frac{1.59}{1 + \frac{1(1-0.33)}{2}}$$

Konvertáljuk ezt a nem áttételes ágazati bétát áttételes bétává, amely tükrözi a vállalat saját 2:5 áttételi szintjét.

$$\begin{aligned} \beta_L &= 1.19\left[1 + \frac{2(1-0.33)}{5}\right] \\ &= 1.51 \end{aligned}$$

Ez a projekt-specifikus béta a vállalati részvénytőkére vonatkozik, s a CAPM modell alkalmazásával becsülhetjük a projekt-specifikus részvénytőke költséget a következők szerint:

$$\begin{aligned} K_S &= 11\% + 1.51(16\% - 11\%) \\ &= 18.55\% \end{aligned}$$

A projektet feltételezhetően 2:5 kölcsöntőke/részvénytőke áttételi arány mellett finanszírozzák, s emiatt a projekt-specifikus tőkeköltség az alábbiak szerint alakul:

$$\left[\tfrac{5}{7} \cdot 18.55\%\right] + \left[\tfrac{2}{7} \cdot 67\% \cdot 11\%\right] = 15.4\%$$

Egy átfogó példa segítségével világítsuk meg a tőkeköltség -és béta becslés főbb összefüggéseit. Egy részvénytársaság tőkestruktúrája 10 000 000 darab közönséges részvényből és 5 000 000 dollár értékű, 8%-os kamatozású adósságlevélből áll. A részvények piaci értéke (osztalék nélkül) 2 dollár, s évente 0.4 dollár részvényenkénti osztalék fizetésére lehet számítani örökjáradékként. Az adósságlevél kockázatmentesnek tekinthető, s névértéken kerül számbavételre. A vállalat olyan projekt megvalósítását mérlegeli, amely 2 000 000 dollár beruházást igényelne, s évente 380 000 adózás előtti jövedelmet hozna örökjáradékként. A projekt becsült béta értéke 1.25. Egy jól diverzifikált portfolió megtérülése 16%-os. Az adózástól eltekintünk.

- Határozzuk meg a vállalat tőkeköltségét!
- Számítsuk ki a vállalati béta értékét!
- Határozzuk meg egy ekvivalens, nem áttételes vállalat béta értékét!
- Milyen tanács adható a vállalatnak: el kell fogadni a projektet vagy el kell utasítani?

A részvénytőke költsége a 0.4/2·100% = 20% számítással határozható meg, a kölcsöntőke költsége 8%. A vállalati tőke súlyozott átlagköltsége a következők szerint írható fel:

$$\text{WACC} = 20/25 \cdot 0.20 + 5/25 \cdot 0.08 = 0.176$$

A vállalati béta az alábbi számítással határozható meg:

$$\begin{aligned} K_s &= R_F + \beta(R_M - R_F) \\ 0.20 &= 0.08 + \beta(0.16 - 0.08) \\ 0.08 \cdot \beta &= 0.12 \\ \beta &= 0.15 \end{aligned}$$

A nem áttételes béta értéke, adók nélkül így számítható:

$$\begin{aligned} \beta_u &= \frac{\beta_L}{\left[1 + \frac{B}{S}\right]} = \frac{1.5}{\left(1 + \frac{15}{20}\right)} \\ &= 1.2 \end{aligned}$$

Az 1.25 béta értékű projekt megkövetelt megtérülése

0.08 + 1.25(0.16 – 0.08) = 0.18 lenne, a projekt tényleges megtérülése a 380 000/2 000 000 = 0.19 számítással kapható meg, s ez magasabb a 18%-os megkövetelt megtérülésnél, így a projekt megvalósítható.

6.8. A karakter egyenes

Egy eszköz teljes kockázata a megtérülés teljes variabilitásával azonos. A teljes kockázat két komponensre, diverzifikálható és nem diverzifikálható részre bontható.

A diverzifikálható kockázat a teljes kockázat ama része, amely az értékpapírt kibocsátó vállalatra egyedileg jellemző. Az olyan események, mint a sztrájk, a vezetési hiba, az invenciók, a reklámkampány, a fogyasztói ízlés változása, a vállalatot érintő peres ügyek a piaci eszközök értékének nem szisztematikus változói. Mivel a nem szisztematikus változások egyetlen, vagy legfeljebb néhány vállalatra vonatkoznak, így azokat minden vállalatra és eseményre egyenként szükséges előrejelezni. A nem szisztematikus értékpapír ármozgások statisztikailag függetlenek egymástól, így azok zéróra átlagolódhatnak, ha különböző eszközöket diverzifikált portfolióba foglalunk. Ezért nevezhetjük a nem szisztematikus kockázatot egyben diverzifikálhatónak is.

Konkrétabban, az i-edik értékpapír megtérülési rátája a t-edik periódusban két komponens összegeként írható fel:

$$R_{it} = E(R_i) + \varepsilon_{it} \qquad (1)$$

teljes megtérülési ráta = várható megtérülés rátája + diverzifikálható megtérülés.

Az i-edik eszköz teljes megtérülésének az a része, amely a saját várható értéke körüli ingadozást fejez ki, ε_{it} szimbólummal szerepel a képletben. A diverzifikálható megtérülés egyaránt jelenthet pozitív vagy negatív hozzájárulást az eszköz teljes megtérüléséhez egy adott periódusban; ennek várható értéke: $E(\varepsilon_{it}) = 0$. Az eszköz-megtérülés eme része egyedül az i-edik eszközre jellemző, s zéróig diverzifikálható különböző értékpapírok portfoliójának részeként.

A nem diverzifikálható kockázat a megtérülés teljes variabilitásának az a része, amelyet piaci tényezők idéznek elő, s amelyek az összes értékpapír árát egyidejűleg befolyásolják.[73]

Eme ármozgások szisztematikus természete immunissá tesz a diverzifikáció kockázatcsökkentő hatásának többségével szemben. Ezért a szisztematikus kockázatot nem diverzifikálhatónak is nevezik. A szisztematikus kockázat forrásai az értékpapír-piacot befolyásoló olyan hatások, amelyek az ökonómiai, politikai és szociológiai környezetben mennek végbe. A megtérülés szisztematikus variabilitása csaknem mindegyik értékpapírban felfedezhető, mégpedig változó mértékben, mivel az értékpapírok többsége hajlamos szisztematikus jellegű együttmozgásra.

Az értékpapír-megtérülés nem diverzifikálható részének szisztematikus természete formalizáltan a következő alakban fejezhető ki:

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i E(R_M) \qquad (2)$$

Az egyenlet azt fejezi ki, hogy az i-edik eszköz várható megtérülése egyszerű lineáris függvénye az $E(R_M)$ értéknek, ami a fokozottan diverzifikált piaci portfolió várható megtérülése. Az α_i konstans tag, amelyet az

[73] A szisztematikus részvényár-mozgások szimultán jellegét havi adatokra alapozva mutatja (Francis I. C. 1975).

eszköz alfa értékének neveznek; az alfa értéke zéróhoz közeli az eszközök többsége esetében. A β_i tagot bétának nevezik. Az eszközök többségének bétája a pozitív egységnyi értékhez közelít. A béta a nem diverzifikálható kockázat indexe, ami azt mutatja, ahogyan az *i*-edik eszköz megtérülése reagál a piaci portfolió megtérülésében bekövetkező változásra.[74]

A portfolió-elmélet matematikai levezetése a karakter egyenesre történő utalás nélkül történt. A karakter egyenes vizsgálata mindazonáltal fontos, hiszen egyszerű módját adja a portfolió-elmélet elemzésből való profitálásnak.

Ha a (2) egyenletet behelyettesítjük az (1) jelű kifejezésbe, akkor az (1a) egyenletet kapjuk.

$$R_{it} = E(R_i) + \varepsilon_{it} \tag{1}$$

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i E(R_M) + \varepsilon_{it} \tag{1a}$$

Az (1a) egyenletben a várható érték könnyen konvertálható idő-sorozat változóvá, ha az $E(R_M)$ piaci változó megtérülést R_{Mt} szimbólummal, a *t*-edik periódus piaci megtérülési rátájával helyettesítjük, s megkapjuk a (3) egyenletet.

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{Mt} + \varepsilon_{it} \tag{3}$$

[74] Markowitz (1952), Tobin (1958), Treynor (1961, 1965), Sharpe (1964) egyaránt rámutatott, hogy a racionális befektető eltekinthet az egyedi eszközök beruházási jellemzőitől, s a figyelmet a diverzifikált portfoliók felé fordították.

A (3) egyenletet az *i*-edik eszköz karakter egyenesének nevezik. Statisztikailag az α_i és β_i a regressziós egyenes függőleges tengellyel alkotott metszéseként, illetve az egyenes meredekségeként fejezhető ki, az ε_{it} pedig a regressziós modell nem megmagyarázható reziduális megtérülése, amely a *t*-edik periódusban merül fel. A karakter egyenes felhasználható az egyedi eszközök és portfoliók nem diverzifikálható és diverzifikálható kockázatának statisztikai kifejezésére.

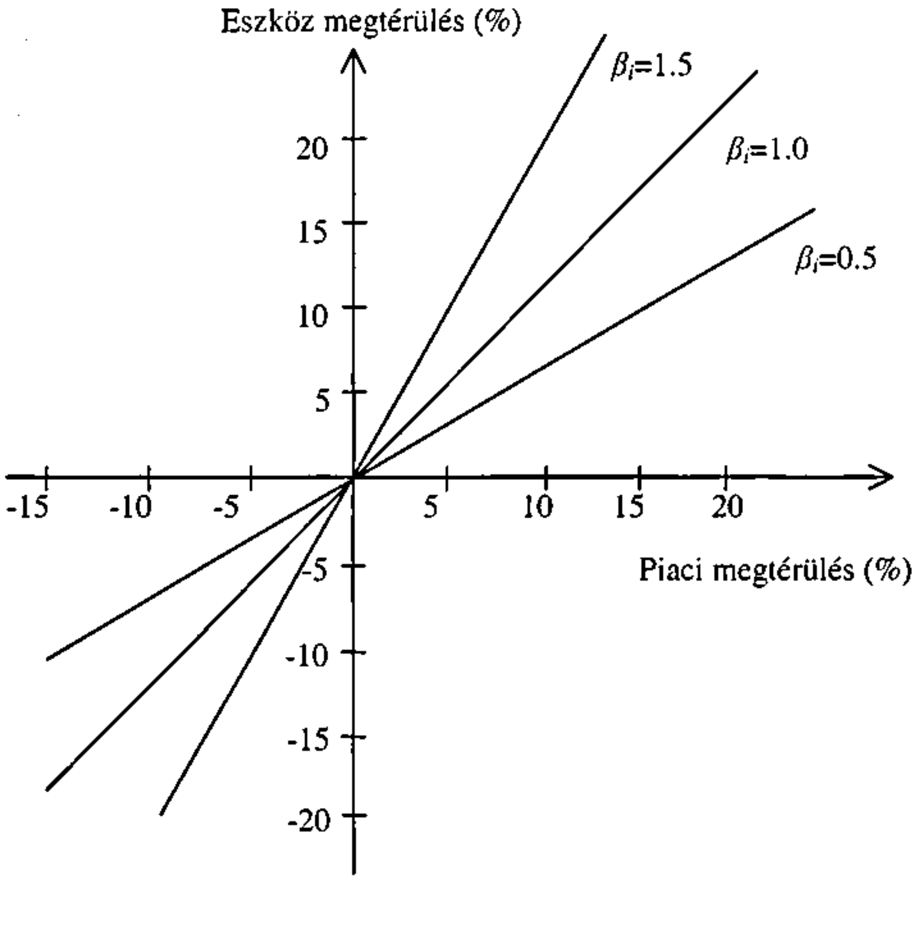
Ha a (3) egyenletet célirányosan átrendezzük, akkor az eszköz-megtérülés nem diverzifikálható és diverzifikálható forrása az alábbiak szerint csoportosítható:

$$R_{it} \quad = \quad \beta_i R_{Mt} \quad + \alpha_i + \varepsilon_{it} \tag{3a}$$

R_{it}	$\beta_i R_{Mt}$	$+\alpha_i + \varepsilon_{it}$
Teljes megtérülés a *t*. periódusban	Nem diverzifikálható megtérülés a *t*. periódusban	Diverzifikálható megtérülés a *t*. periódusban

A 90. ábra három különböző eszköz karakter egyenesét mutatja, a szisztematikus kockázat alacsony, közepes és magas szintjét feltételezve. Statisztikailag a karakter egyenes a szokványos, legkisebb négyzetek módszerével számított regressziós egyenes alakját ölti, ahogy az a (3) egyenletben megfogalmazódik.

90. ábra Alacsony, közepes és magas kockázatú eszközök karakter egyenese



6.8.1. A piaci megtérülés: a karakter egyenes független változója

A tőkejavak piacán generált exogén erők a bemutatott ábra vízszintes tengelyére mérhetők fel. A különböző periódusokra vonatkozó, R_{Mt} szimbólummal jelölt piaci megtérülési ráták a karakter egyenes magyarázó változói. Az alábbi (4) egyenlet megmutatja, hogyan számíthatók a részvénypiaci megtérülés változását kifejező ráták a piaci index alkalmazásával.

$$R_{Mt} = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \tag{4}$$

ahol P_t a periódus-eleji piaci ár, a P_{t+1} a periódusvégi piaci index érték. E modell nem tartalmazza az osztalékot, bár nincs ok arra, hogy az osztalék ne foglaltassék benne a piaci megtérülési indexben.

6.8.2. Eszköz megtérülés: a karakter egyenes függő változója

Az a megtérülési ráta, amire a karakter egyenest vonatkoztatják, az alábbi egyenlet segítségével fejezhető ki, részvényekre vagy más típusú eszközökre vonatkozóan:

$$R_{it} = \frac{P_{t+1} - P_t + D_t}{p_t}$$

ahol

D_t = az i-edik részvény t-edik periódusbeli pénzben kifejezett osztaléka

P_t = t-edik periódus kezdetének piaci részaránya

P_{t+1} = t-edik periódusvégi ár (vagy a t+1. periódus-eleji ár)

Az i-edik eszköz megtérülése a függő változó, amit a függőleges tengelyre mérünk fel. Amennyiben az i-edik eszköz tartalmaz valamennyi szisztematikus kockázatot, akkor a megtérülési ráták ingadozásának egy része függ a piactól mint független változótól.

6.8.3. A karakter egyenes a legjobb illeszkedést mutató grafikon

A (2) egyenlet adott eszköz karakter egyenesét reprezentálja. Az $E\left(r_i \middle| R_{M,} \alpha, \beta\right)$ szimbólum azt mutatja, hogy mekkora az i eszköz várható megtérülése, ha adott a piaci megtérülés, az alfa és a béta értéke. A (2) egyenlet csak az ε_{it} szimbólummal különbözik a (3) egyenlettől; az ε_{it} reziduális megtérülési értékek a megfigyelések összességére vonatkozóan zéró összértéket adnak, s ezért az ε_{it} tag el is tűnik. Az időre vonatkozó indexek a (3) egyenletből elhagyhatók, mivel az alábbi (2a) egyenlet különböző periódusokra és állapotokra vonatkozik.

$$E\left(R_i \middle| R_{Mt} \alpha, \beta\right) = \alpha_i + \beta_i R_M \tag{2a}$$

Ez utóbbi formulát feltételes várakozásnak nevezzük, mivel az i-edik eszköz megtérülése feltétele az alfa, a béta és a piaci megtérülés értékének.

A 78. tábla az IBM vállalat karakter egyenesének számításához szükséges kockázat és megtérülés adatokat mutatja, mint a regressziós számítás alapadatait[75].

[75] A karakter egyenes kifejezést először Treynor J. L.: „How to Rate Management of Investment Funds" (Harvard Business Review, January-February 1965 pp. 63-75.) c. munkájában alkalmazta.

78. tábla Kockázat és megtérülés adatok az IBM karakter egyenesének regressziós egyenlettel történő meghatározásához

	IBM	**Piaci portfolió**
Várható megtérülés = $E(R)$ = átlag	0.03108	0.04064
Teljes kockázat, vagyis $VAR(R)$	0.01389	0.00749
Teljes kockázat, vagy szórás	0.11785	0.08654
Két ekvivalens szisztematikus kockázati mérték		
$\beta_i^2 VAR(R_M) = \rho^2 VAR(R_i)$	0.007802	NA
Nem szisztematikus kockázati mérték		
Reziduális variancia = $VAR(\varepsilon)$	0.00609	NA
Standard hiba = $\sqrt{VAR(\varepsilon)}$	0.07803	NA
Béta = szisztematikus kockázat indexe	1.021	NA
Alfa = metszéspont	-0.0104	NA
Piaccal alkotott korreláció = ρ	0.7495	NA
Szisztematikus kockázat százalék = R^2	0.56176	1.0

Alfa

A (3) egyenletben az egyetlen az alfa metszéspont, ahol a karakter egyenes metszi a függőleges tengelyt. Az alfa az *i*-edik eszköz megtérülési rátájának becslése, amikor a piac stacionárius, azaz $R_{Mt}=0$. Az alfa metszéspont statisztikai meghatározása a következők szerint történik:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \overline{R}_i - \beta_i \overline{R}_M = E(R_i) - \beta_i E(R_M) \\ -1.04\% &= 3{,}108\% - (1.021)(4.064\%) \end{aligned} \tag{5}$$

Béta

A β_i szimbólum a béta koefficiens, ami méri a karakter egyenes meredekségét. A béta koefficiens az alábbi egyenlettel definiálható:

$$\begin{aligned} \beta_i &= \frac{COV(R_i R_M)}{VAR(R_M)} \\ &= \frac{0.007647}{0.00749} = 1.021 \\ \beta_i &= \frac{\text{emelkedés egységei}}{\text{vízszintes elmozdulás egységei}} = \text{karakter egyenes meredeksége} \end{aligned} \tag{6}$$

A $VAR(R_M)$ tag a piaci portfolió megtérülésének varianciáját reprezentálja, a $COV(R_i R_M)$ szimbólum pedig az i-edik eszköz megtérülésének a piaccal való kovarianciája.

Kovariancia

Az i-edik eszköz és a piac megtérülése közötti ex post a (7) egyenlettel határozhatjuk meg:

$$COV\,(R_i R_M) = \left(\frac{1}{T}\right) \sum_{i=1}^{T} [R_{it} - E(R_i)][R_{Mt} - E(R_M)] \tag{7}$$

A (7a) egyenlet ex ante definíciót ad, a (7b) egyenlet egy intuitívebb, bár numerikusan azonos definíciót ad a kovarianciára.

$$COV\left(R_i R_M\right) = \left\{\left[R_{it} - E\left(R_i\right)\right]\left[R_{mt} - E\left(R_M\right)\right]\right\}$$
$$COV\left(R_i R_M\right) = \rho_{im}\sigma_i\sigma_m \tag{7a}$$
$$0.00764 = (0.74951)(0.11785)(0.08654)$$

Béta mértékek

A béta koefficiens a szisztematikus kockázat indexe. Ez a mutató felhasználható különböző eszközök szisztematikus kockázat szerinti rangsorolására. Ha a béta 1-nél nagyobb, azaz β>1.0, akkor az eszköz megtérülése jobban ingadozik a piacénál, s az ilyen eszközt agresszívnek nevezik. Ha viszont a béta 1-nél kisebb, azaz β<1.0, akkor az eszközt defenzívnek tekintik, mivel annak ingadozása kisebb, mint a piaci megtérülés változékonysága. A korábbi ábra három különböző eszköz karakter egyenesét mutatta, amelyek béta értéke alacsony, közepes illetve magas volt.

A vizsgált vállalat részvényei a szisztematikus kockázat átlagos mennyiségét hordozzák. Az IBM 1.02 értékű bétája azt mutatja, hogy a vállalati megtérülés 2%-kal nagyobb mértékben növekszik a piaci átlagos megtérülésnél, amennyiben a piaci hozam emelkedőben van. Ha a piaci megtérülés esik, akkor a vállalati megtérülés 2%-kal nagyobb mértékben esik a piaci hozamnál. Az IBM karakter egyenese az átlagosnál erősebb korrelációt mutató koefficiensen alapul; a ρ=0.7495 értékű korreláció arra mutat, hogy ezen értékpapír megtérülése az átlagos értékpapírnál valamivel szorosabban követi a karakter egyenest.

6.8.4. A kockázat felbontása

Teljes kockázatot a megtérülés varianciájával mérhetünk, amit VAR(R) szimbólummal jelöltünk. A teljes kockázat e mértéke felbontható egy szisztematikus és egy nem szisztematikus komponensre.

$VAR(R_i)$ = az i-edik eszköz teljes kockázata

$= VAR(\alpha_i + \beta_i R_{Mt} + \varepsilon_{it})$ $\qquad (\alpha_i + \beta_i R_{Mt} + \varepsilon_{ij})$

$= 0 + VAR(\beta_i R_{Mt}) + VAR(\varepsilon_{it})$ $\qquad$ Behelyettesítve R_i helyére

$$VAR(\alpha_i) = 0 \tag{8}$$

$$VAR(R_i) = \beta_i^2 VAR(R_M) + VAR(\varepsilon) \mathrm{VAR}(\beta_i R_M) = \beta_i^2 VAR(R_M)$$

$$R_i = \text{szisztematikus kockázat + nem szisztematikus kockázat}$$

$$0.1389 = 0.00780 + 0.00609$$

A nem szisztematikus kockázat $VAR(\varepsilon)$ mértékét a regressziós kifejezések nyelvén reziduális varianciának, vagy ezzel egyenértékűen négyzetes standard hibának nevezik.

6.8.4.1. A nem diverzifikálható komponens

A teljes kockázat szisztematikus részarányát a determináció R^2 koefficiensével mérhetjük (ami a karakter egyenes korrelációs koefficiensének négyzetével azonos).

$$\frac{\text{Szisztematikus kockázat}}{\text{Teljes kockázat}} = \frac{\beta_i^2 VAR(R_M)}{VAR(R_M)} = \beta^2$$

$$\frac{0.007802}{0.01389} = \frac{(1.021)^2(0.00749)}{0.00749} = 0.5617 \cdot 100 = 56.17\% \qquad (9)$$

6.8.4.2. A diverzifikálható komponens[76]

A nem szisztematikus kockázat százalékos aránya: 1.0 - R^2

$$\frac{\text{Nem szisztematikus kockázat}}{\text{Teljes kockázat}} = \frac{VAR(\varepsilon)}{VAR(R_i)} = \left(1.0 - R^2\right)$$

$$\frac{0.00609}{0.01389} = \left(1.0 - 0.5617\right) = 0.438 \cdot 100 \qquad (10)$$

$$= 43.8\% \text{ nem szisztematikus kockázat}$$

A karakter egyenes (vagy piaci modell, vagy még másként egytényezős modell) elsősorban arra használható, hogy segítségével egy adott eszköz kockázati karakterisztikái értékelhetők legyenek.[77]

6.8.5. Az értékpapír várható megtérülés egyensúlyi elmélete

Az SML egyenes az értékpapír várható értékének egyensúlyi elméletét reprezentálja. Ez a teória kapcsolatot mutat ki a várható megtérülés, valamint egy vagy több tulajdonság között. Az általános formula:

[76] Tőkepiaci tapasztalatok arra mutattak, hogy a ρ értéke 0.5 körül volt, amint az kitűnik Blume (1971) munkájából

[77] Jensen (1968, 1969) munkái újrafogalmazták a karakter egyenest, kockázati prémium formában. Jensen az alfa metszéspontot a karakter egyenesen beruházási teljesítmény mértékként határozta meg.

$$E(R_i^*) = f(\alpha_{i1,}\alpha_{i2,}....)$$
$$\text{ahol } E(R_i^*) = \text{i értékpapír egyensúlyi várható megtérülése} \qquad (1)$$
$$\alpha_{i1,}\alpha_{i2,}... = \text{az értékpapír 1, 2 ... jellemzőkkel}$$

Az eredeti CAPM modell implikációi szerint csupán egyetlen jellemző releváns, a piaci portfolióhoz kapcsolódó béta tényező:

$$E(R_i^*) = f(\beta_i) \qquad (2)$$

Az SML egyenes azt is mutatja, hogy a függvény lineáris relációt ír le:

$$E(R_i^e) = a + b \cdot \beta_i \qquad (3)$$

Mivel a piaci portfolió és a kockázatmentes értékpapír egyaránt rajta van az SML egyenesen, a reláció koefficiense a két befektetés várható megtérülése segítségével felírható:

$$E(R_i^e) = R_F + (E(R_m) - R_F)\beta_i \qquad (4)$$

A (4) egyenlet specifikusabb az (1), (2) és a (3) egyenletnél. Az eredeti CAPM modell így igen tartalmasnak mutatkozik, hiszen belőle fontos következtetések adódnak.

6.8.6. Az alfa értékek szerepe

Az eredeti CAPM modell szerint az eszközárak kiigazítását addig kell folytatni, amíg az összes értékpapír rá nem kerül az SML egyenesre; egyenértékű megfogalmazással: *i* értékpapír várható megtérülését az előző (4) egyenlettel kell meghatározni. Ha valamely értékpapír vagy portfolió a vonalon kívül helyezkedik el, akkor az az egyensúlytalansági helyzet kifejeződése. Értékpapír elemzők és portfolió menedzserek sok időt eltöltenek olyan értékpapírok vizsgálatával, amelyek helytelenül értékeltek. *Egy értékpapír alulértékelt, ha annak várható megtérülése nagyobb, mint amekkora kellene hogy legyen.* Egy másik értékpapír akkor túlértékelt, ha annak várható megtérülése kisebb, mint amekkora kellene hogy legyen. A „kellene hogy legyen" kitételre alapozva definíciót adhatunk. Az értékpapír akkor alulértékelt, ha várható megtérülése nagyobb, mint az összehasonlítható releváns tulajdonságokkal rendelkező értékpapírok várható megtérülése; másrészt akkor túlértékelt, ha várható megtérülése kisebb az összehasonlítható értékpapírok várható megtérülésénél.

Mely tulajdonságok relevánsak, s mi tekinthető megfelelő várható megtérülésnek a jellemzők adott sorozata mellett? A válasz függ az értékpapír várható megtérülés egyensúlyi elméletének alkalmazott változatától. Az eredeti CAPM modellben csupán egyetlen tényező releváns (béta), s a megfelelő várható megtérülés az, amit az SML egyenes mutat. Elvileg előfordulhat, hogy mind az értékpapír árak, mind a várható megtérülési értékek vagy megfelelnek egyensúlyi elméletnek, vagy nem. Amennyiben egyensúlyhiány áll fenn, akkor többféle eset lehetséges. Néhány beruházási elemző úgy véli, hogy az értékpapírok többsége úgy értékelődik, hogy egyensúlyi várható megtérülést biztosítson, néhány közülük azonban túl- vagy alulértékelt. Azt a mértéket, amivel egy értékpapír helytelenül értékelt, *alfa értéknek* nevezzük. A cél az $E(R_i^e)$ egyensúlyi várható megtérülés meghatározása adott értékpapírra vonatkozóan. Ez az az érték, amilyennek a várható megtérülésnek „lennie kell", vagy lenne az értékpapír helyes értékelése esetén, s ez az összehasonlítható releváns jellemzőkkel bíró, helyesen értékelt papírok várható megtérülése.

Az általános egyensúlyi modell így írható fel:

$$E(R_i^e) = f(\alpha_{i1}, \alpha_{i2} \ldots)$$

illetve az eredeti CAPM modell

$$E(R_i^e) = R_F + \left(E(R_m) - R_F\right)\beta_i$$

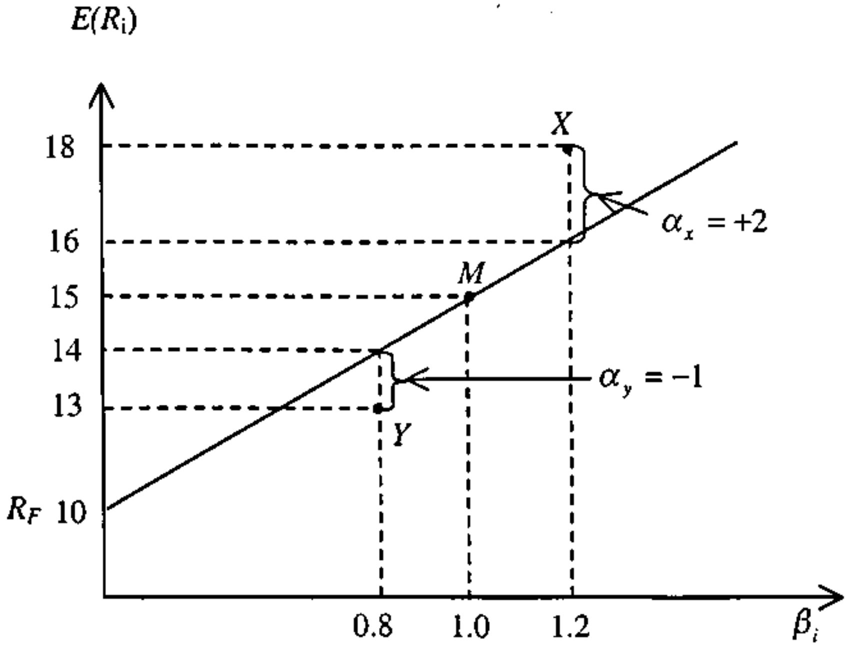
Az értékpapír alfa értéke a várható megtérülési érték és a megfelelő (egyensúlyi) várható megtérülése közötti különbség.

$$\alpha_i = E(R_i) - E(R_i^e)$$

A 91. ábra ennek illusztrálására szolgál.

A piaci portfolió várható megtérülése 15%, a kockázatmentes kamatráta 10%, s ez a két pont meghatározza az SML egyenes pozícióját. Az X értékpapír béta értéke 1.2, várható megtérülése 18%. Az SML egyenes indikációja szerint a helyesen értékelt papíroknak 1.2-es bétával és 16%-os várható megtérüléssel kell rendelkezni. Az ábra szerint az *X* értékpapír 2%-kal nagyobb megtérülést kínál, mint amekkorát kellene, emiatt alfa értéke +2%. Ellenkező példa az *Y* értékpapír birtoklása, melynek béta értéke 0.8, várható megtérülése viszont 13%. Az SML egyenes iránymutatása szerint a pontosan értékelt papírok 0.8-as bétával és 14%-os megtérüléssel kell rendelkezzenek. Így az *Y* értékpapír 1%-kal kisebb várható megtérülést nyújt a szükségesnél, emiatt alfa értéke –1%.

91. ábra *Az alfa értékek ábrázolása*



Az eredeti CAPM modellben az értékpapír alfa értékét az SML egyenes fölötti, illetve alatti függőleges távolsággal mérik. Általánosítva: egy értékpapír alulértékelt, ha annak alfa értéke pozitív; az értékpapír akkor túlértékelt, ha annak alfa értéke negatív, s helyesen értékelt, ha alfa értéke nulla. *Egyensúlyi helyzetben az összes értékpapír helyesen értékelt és az alfa értékek nullával egyenlők.* Mivel a portfolió várható megtérülése a komponens értékpapírok várható megtérülésének súlyozott átlaga, így a portfolió alfa értéke a komponens papírok alfa értékének súlyozott átlaga.

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{N} w_{ip}\alpha_i$$

ahol

α_p = portfolió alfa értéke

w_{ip} = portfolió i értékpapírba befektetett hányada

α_i = *i* értékpapír alfa értéke

Azok a befektetők, akik nyerni akarnak a piacon, pozitív alfájú portfoliók kialakítására törekszenek; azok viszont, akik nem akarnak nyerni a piacon, zéró alfájú portfoliókat hoznak létre. Akik próbálkoznak, mégis hibás döntést hoznak, azok negatív alfájú portfoliók választására törekszenek.

6.8.7. A karakter egyenes kiterjesztése

Az (1) egyenlettel kifejezett karakter egyenest időnként *egytényezős modellnek* is nevezik, mivel az a szisztematikus kockázat egyetlen forrását tartalmazza, R_{Mt} alakjában. Az egyenlet egyszerűsége nyomán azonnal felmerülhet a kérdés, hogy mi a helyzet a kamat-kockázattal, a bukási kockázattal és mindama kockázati tényezőkkel, amelyek jól ismertek?

A karakter egyenes egyenlete komponensekre bontható, ami többtényezős modellt ad, amely magában foglalja a kamat-kockázatot, a bukási kockázatot és egyéb más kockázati tényezőket.

$$\begin{aligned} R_{it} &= \alpha_i + \beta_i R_{Mt} + \varepsilon_{it} \\ R_{it} &= \alpha_i + \beta_{i1} F_{1t} + \beta_{i2} F_{2t} + \beta_{i3} F_{3t} + \ldots + \beta_{iK} F_{Kt} + \varepsilon_{it} \end{aligned} \tag{1}$$

Az utóbbi egyenletet *k*-tényezős megtérülés-generáló függvénynek nevezik. Másképpen kifejezve, az egyenlet olyan karakter egyeneshez hasonlatos, amely *k* különböző faktort tartalmaz az *i*-edik eszköz megtérülésének magyarázatára. Az $F_{K,t}$ véletlen változó *k* különböző kockázati faktort reprezentál, az F_{kt} $k = 1,2 \dots K$ jellel illethető, amely *t* különböző periódusra vonatkozó, $t = 1,2 \dots. T$, megfigyelésen alapul. A *K* regressziós koefficiens a β_{iK} szimbólummal reprezentálható, amely az *i*-edik eszköz megtérülésének a *k*-adik kockázati tényezőre való érzékenységét méri úgy, hogy a β_{i1} lehetne a kamatláb kockázati tényező bétája, a β_{i2} a bukási kockázat béta értéke.

A 79-1.és 79-2. tábla a különböző kockázati tényezőket listázza, amelyek hozzájárulnak az eszköz teljes kockázatához. E tényezők hozzájárulhatnak egy eszköz diverzifikálható, nem diverzifikálható kockázatához, vagy egyszerre mindkettőhöz. Minden eszköz kockázatának felépítése arra az eszközre specifikusan jellemző. Például a bukási kockázat befolyásolhatja a közönséges részvény megtérülésének teljes kockázatát szisztematikus módon, ami azután hozzájárul ama eszköz nem diverzifikálható kockázatához. A kincstári kötvényeknek például zéró értékű a bukási kockázata.

79-1. tábla Az eszköz teljes kockázatához hozzájáruló, lehetséges kockázati kategóriák

1. Nem diverzifikálható kockázat forrásai:

a) Szisztematikus kamatráta kockázat

b) Szisztematikus vásárlóerő kockázat

c) Szisztematikus piaci kockázat

d) Szisztematikus management kockázat

e) Szisztematikus bukási kockázat

f) Szisztematikus piacképességi kockázat

g) Szisztematikus megvásárolhatósági kockázat

h) Szisztematikus konvertibilitási kockázat

i) Egyéb szisztematikus kockázati tényezők

79-2. tábla

2. Diverzifikálható kockázat forrásai:

a) Nem szisztematikus kamatráta kockázat

b) Nem szisztematikus vásárlóerő kockázat

c) Nem szisztematikus piaci kockázat

d) Nem szisztematikus management kockázat

e) Nem szisztematikus bukási kockázat

f) Nem szisztematikus piacképességi kockázat

g) Nem szisztematikus megvásárolhatósági kockázat

h) Nem szisztematikus konvertibilitási kockázat

i) Egyéb nem szisztematikus kockázati tényezők

Aggregáltan: Teljes kockázat

A többtényezős egyenlet azt mutatja, hogy az imént vázolt táblában található kockázati tényezők az (1) egyenlettel adott karakter egyenesen, egyetlen bétához járulhatnak hozzá. Lényegében feltételezhető, hogy a k_i

nem más, mint *k* különböző β_{ik} tényező súlyozott átlaga. Erre alapozva az arbitrázs értékelési elmélet (APT) a többtényezős kockázati modellek eszközértékelési implikációin alapul.

6.9. Arbitrázs értékelési elmélet

E modellt a CAPM modell alternatívájaként S. Ross fejlesztette ki. Ez a változat arbitrázs argumentumokon nyugszik, ezért nevezik az arbitrázs értékelési elmélet (APT) modelljének.[78]

Az APT a CAPM modellhez hasonlóan a tőkeértékelés egyensúlyi modellje. Az arbitrázs értékelési elméleten alapuló modell a CAPM eljárástól eltérően azt feltételezi, hogy a megtérülést többtényezős modell generálja. További különbség, hogy míg a CAPM szigorú kikötéseket tesz a beruházási preferenciákkal kapcsolatban, (például a befektetőket kockázattól tartózkodóknak feltételezi), addig az APT modell nem él ilyen feltevésekkel. Ez azt is jelenti, hogy az APT nem azon az elgondoláson alapul, hogy a befektetők várható megtérüléssel és szórással meghatározott portfoliókat vesznek alapul. Ezzel szemben *az APT modell csupán annyit igényel, hogy a befektető a gazdagság magasabb szintjét részesítse előnyben, annak alacsonyabb szintjével szemben.*

[78] A modell alapjai Ross (1976), Huberman (1982) és Ingersoll (1987) müvében találhatók.

6.9.1. Tényező-portfoliók képzése[79]

Mint arról szó volt az imént, az APT modell feltevése szerint a megtérülést többtényezős modell állítja elő. Ez nem specifikálja azt, hogy hány tényező érvényesül, s azok mit reprezentálnak. A bemutatás egyszerűsítése érdekében azt feltételezzük, hogy két tényező van, F_1 és F_2,, ami azt jelenti, hogy az értékpapír-megtérülés az alábbi egyenlettel írható fel:

$$r_i = a_i + b_{i1} \cdot F_1 + b_{i2} \cdot F_2 + \varepsilon_i$$

ahol F_1 és F_2 a két tényező, melyek közül az F_1 a bruttó nemzeti termelés növekedési arányát, az F_2 az inflációs rátát jelöli.

Azt szintén szükséges feltételezni, hogy az értékpapírok nagy számban vannak jelen, s a tényezőkhöz kapcsolódó érzékenység értékpapíronként jelentősen különbözik. Ilyen körülmények között a beruházási stratégiák széles választéka áll rendelkezésre. Különösen érdekes az a stratégia, amely *egyszerű tényező hatást* reprezentáló portfoliókat foglal magában. Ha elegendő értékpapír áll rendelkezésre eltérő jellemzőkkel, akkor lehet olyan portfoliót konstruálni, amelynek egységnyi érzékenysége van az egyik tényezőre (azaz: érzékenysége 1), nincs érzékenysége egy másik tényezőre és zérus a tényezőn kívüli kockázata. Az ilyen portfolió formálásának az a furcsasága, hogy az értékpapír pozíciókat azért kombinálja, hogy a portfolió összes (itt egyetlen) tényezőre irányuló érzékenységét figyelembe vegye. Továbbá, értékpapírok nagy számát szükséges birtokolni, így elérhető az, hogy ama értékpapírok száma, amelyek „jó" tényezőn

[79] Az alfejezetben bemutatott modell és a példák Alexander, G. J.-Sharpe, W. F.: Fundamentals of Investments. Prentice Hall 1989 c. művéből származnak.

kívüli megtérülést nyújtanak, lényegében ugyanakkora lesz, mint a „rossz" tényezőn kívüli megtérülést biztosítóké. Ez azt eredményezi, hogy a portfoliónak közel zérus nagyságú tényezőn kívüli kockázata lesz.

Példaként feltételezzük, hogy *A*, *B* és *C* értékpapír a következő érzékenységekkel jellemezhető:

80. tábla *Értékpapírok tényező-érzékenysége*

Értékpapír	b_{i1}	b_{i2}
A	-0.40	1.75
B	1.60	-0.75
C	0.67	-0.25

Ha a befektetőnek 1 000 dollár forrás áll rendelkezésére, amiből 300 dollárt az *A*, 700 dollárt a *B* értékpapírba fektet, s egyáltalán nem ruház be a *C* értékpapírba, akkor a befektetési arányok a következők lesznek:

$$w_A = 0.3, \qquad w_B = 0.7, \qquad w_C = 0.0$$

E portfolió 1. és 2. tényezőre érzékenysége a következők szerint számítható:

$$\begin{aligned} b_{p1} &= (-0.40 \cdot 0.3) + (1.60 \cdot 0.7) + (0.67 \cdot 0.0) \\ &= -0.12 + 1.12 + 0.0 \\ &= 1.0 \end{aligned}$$

$$b_{p2} = (1.75 \cdot 0.3) + (-0.75 \cdot 0.7) + (-0.25 \cdot 0.0)$$
$$= 0.525 - 0.525 - 0.0$$
$$= 0.0$$

Amennyiben lehetséges volna ilyen értékpapírok nagy mennyiségébe befektetni, akkor mód nyílna egészen csekély tényezőn kívüli kockázatú portfolió kialakítására, ami azt jelentené, hogy az $\varepsilon_p = 0$. Így a befektetési arányok megfelelő megválasztásával a befektető kreálhatna olyan portfoliót (jelöljük p_l index-szel), amely csupán az 1. faktorra érzékeny.

$$R_{pl} = \alpha_{pl} + F_1$$

Ennek alapján $b_{pl1} = 1$, $b_{pl2} = 0$ és $\varepsilon_{pl} = 0$, s ez tisztán 1 faktoros portfolió lenne. Megtérülése – alakja alapján – teljes összhangban együtt mozogna az 1. faktorral. Alternatív stratégia alapján kreálható tisztán 2 faktoros portfolió is.

Ha a befektető úgy döntene, hogy 1000 dollárjából 625 dollárt az A értékpapírhoz hasonlatos, 375 dollárt a C változathoz hasonló értékpapírba fekteti, akkor az eredményül kapott portfolió érzékenysége az alábbiak szerint számítható:

$$b_{p1} = (-0.40 \cdot 0.625) + (1.60 \cdot 0) + (0.67 \cdot 0.375)$$
$$= -0.25 + 0.00 + 0.25$$
$$= 0.00$$

$$\begin{aligned} b_{p2} &= (1.75 \cdot 0.625) + (-0.75 \cdot 0.0) + (-0.25 \cdot 0.375) \\ &= 1.09 + 0.00 - 0.09 \\ &= 1.00 \end{aligned}$$

Ha ez végbevihető lenne sok értékpapírra, akkor nagyon csekély lenne a tényezőn kívüli kockázat; eredményül olyan portfoliót kapnánk (jelöljük p_{II} indexszel), amelyik csak a 2. faktorra érzékeny.

$$R_{pII} = \alpha_{pII} + F_2$$

Sok, eltérő jellemzőjű értékpapírt magában foglaló piacon elméletileg lehetséges „tiszta faktorú" portfoliót képezni, amely csupán egyetlen faktorra érzékeny, s jelentéktelen a tényezőn kívüli kockázata. A gyakorlatban a megkövetelt kondíciók nem teljesülnek maradéktalanul, arra utalva, hogy csupán „nem tiszta tényezőjű" portfoliók képezhetők, amelyek elsődlegesen (bár nem kizárólag) egy faktorra érzékenyek, viszonylag jelentéktelen tényezőn kívüli kockázattal.

Habár az APT modell azt feltételezi, hogy tiszta portfoliók létrehozhatók, mégis el kell ismerni, hogy e feltevés okszerűsége kétséges. Ehelyett az APT modell előrejelzési pontossága bír jelentőséggel.

6.9.2. A tényező portfoliók várható megtérülése

A tiszta tényező portfolió várható megtérülése a releváns faktor várható értékétől függ. A várható megtérülést célszerű két részre bontani:

1) kockázatmentes kamatrátára

2) a λ-val jelzett maradékra, amit a tényező érzékenység egységére jutó várható megtérülés prémiumnak nevezünk.

Így a tiszta 1. tényezős portfolió várható megtérülése a következő alakban írható fel:

$$\overline{R}_{pI} = R_F + \lambda_1$$

Hasonlóképpen a tiszta 2. tényezős portfolió várható megtérülése is az előző alakban írható fel:

$$\overline{R}_{pII} = R_F + \lambda_2$$

Ha például a kockázatmentes kamatráta 7% és az $\overline{R}_{pI} = 16.6\%$, akkor $\lambda_1 = 16.6 - 7 = 9.6\%$, ha pedig $\overline{R}_{pII} = 13.4\%$, akkor $\lambda_2 = 13.4 - 7 = 6.4\%$. Ez azt jelenti, hogy az 1. és 2. faktor érzékenység egységére jutó várható megtérülés prémium 9.6 illetve 6.4% lesz.

Értékpapírok sok alternatív kombinációja felhasználható tiszta 1. tényezős portfolió konstruálásához. A kérdés az, hogy minden ilyen kombinációnak ugyanakkora lesz-e a várható megtérülése. Elméletileg igen. A tiszta tényező portfoliók – kompozíciójukat tekintve – lehet, hogy nem egységesek, várható értékük tekintetében azonban azok kell legyenek. Képzeljünk el egy olyan szituációt, amelyben két tiszta 1. tényezős portfolió várható megtérülése egymástól eltérő. Ez csupán az α értékekben mutatkozó különbségeknek tulajdonítható (α_{pI} korábbi egyenletünkben).

Most tekintsük az alacsonyabb várható megtérülésű portfolió fedezetlen eladását, s helyébe nagyobb várható megtérülésű portfolió vásárlását. Ilyen helyzetben a befektető anélkül jutna a normálisnál nagyobb megtérüléshez, hogy fontosak lennének az 1. faktorban lejátszódó események. Ez nyilvánvalóan nem folytatódhat, mivel két azonos eszköz (ebben az esetben két tiszta 1. tényezős portfolió) egyensúlyi helyzetben úgy kell értékelődjék, hogy egyforma várható megtérülést hozzon. Ama lehetőségek, amelyek között nem így értékelődnek, bizonyos befektetőket – arbitrazsőröket – cselekvésre indítanak. Ők megvásárolják a magasabb várható megtérülésű portfoliókban elhelyezkedő értékpapírokat és eladják az alacsonyabb várható megtérülésű portfolióban levőket. Ennek eredményeként az előzőek árát a többlet kereslet felhajtja, s a megfelelő portfolió várható megtérülését viszont leszorítja. Ehhez hasonlóan az utóbbiak árát a többlet-kínálat leszorítja, s a megfelelő portfolió várható megtérülését viszont felhajtja. Ez addig folytatódik, amíg a két portfoliónak ugyanakkora lesz a várható megtérülése. Az árak ily módon bekövetkező mozgása eredményeként a befektetők a normálisnál nagyobb megtérüléshez jutnak, s mintha mindez a semmi érdekében történnék, az extra hozam el is tűnik. Az arbitrázs folyamat azt eredményezi, hogy az összes tiszta 1. tényezős portfoliónak ugyanakkora $R_F + \lambda_1$ várható megtérülése lesz. Megjegyezhető, hogy a kockázatmentes kamatráta jelenléte az APT modellben természetesnek tekinthető. Amennyiben elegendően nagy számú divergens értékpapír létezik, akkor konstruálható olyan portfolió, amelyben az összes faktort érintően zérus értékű az érzékenység, s ahhoz elegendő a diverzifikáltsága, hogy jelentéktelen legyen a tényezőn kívüli kockázat. Annak várható megtérülése, amely lényegében kockázatmentes, olyan bázisként használható, amelyhez viszonyítva mérhetők más várható megtérülési értékek.

6.9.3. Értékpapírok várható megtérülése

Amennyiben a forrásokat a kockázatmentes portfolió és a tiszta faktorú portfoliók között osztják meg, akkor a befektetők számára lehetőség nyílik olyan portfolió kialakítására, amelyben minden faktorra jut valamenynyi érzékenység. Továbbá az ilyen portfoliókat úgy kell megformálni, hogy jelentéktelen legyen a tényezőn kívüli kockázatuk. Példaként feltételezzük, hogy k értékpapír megtérülése a következők szerint kapcsolódik az 1. és 2. tényezőhöz:

$$R_k = a_k + 0.8F_1 + 1.5F_2 + \varepsilon_k$$

Így, ha a befektető 1 000 dollár forrással rendelkezik, akkor az egészet k értékpapírba fektethetné, s a következő várható megtérülést nyerné:

$$\overline{R}_k = a_k + 0.8\overline{F}_1 + 1.5\overline{F}_2$$

Most tekintsünk egy alternatív stratégiát, amelynek értelmében 1300 dollárt kölcsönvesznek kockázatmentes ráta mellett, a befektető 1000 dollárjának kiegészítésére. Ez azt jelenti, hogy a kockázatmentes eszközbe beruházott rész súlyaránya $-1300/1000=-1.3=w_F$ lesz. A 2300 dollár értékű forrásból 800 dollárt fektetnek a tiszta 1. tényezős portfolióba és a maradék 1500 dollárt a tiszta 2. tényezős portfolióba. Ennek eredményeként a két portfolióba beruházott forrás súlyaránya $800/1000=0.8=w_I$ és

$1500/1000 = 1.5 = w_{II}$ lesz. A K szimbólummal jelölt új portfolió várható megtérülését a három komponens súlyozott átlagaként számíthatjuk, a következők szerint:

$$\begin{aligned}
\overline{R}_k &= \left(w_F \cdot R_F\right) + \left(w_I \cdot \overline{R}_{pI}\right) + \left(w_{II} \cdot \overline{R}_{pII}\right) \\
&= \left(-1.3 \cdot R_F\right) + \left(0.8 \cdot \overline{R}_{pI}\right) + \left(1.5 \cdot \overline{R}_{pII}\right) \\
&= \left(-1.3 \cdot R_F\right) + \left[0.8 \cdot \left(R_F + \lambda_1\right)\right] + \left[1.5 \cdot \left(R_F + \lambda_2\right)\right] \\
&\ -1.3 \cdot R_F + 0.8 R_F + 0.8\lambda_1 + 1.5 R_F + 1.5\lambda_2 \\
&= R_F + 0.8\lambda_1 + 1.5\lambda_2
\end{aligned}$$

Látható, hogy a két tiszta tényező portfolió korábban megadott várható megtérülését behelyettesítettük $\overline{R}_{pI}$ és $\overline{R}_{pII}$ értékébe az utóbbi számításban. Most hasonlítsuk össze a K portfoliót a k értékpapírral! Mindegyiknek 0.8 értékü érzékenysége van az 1. és 1.5 érzékenysége a 2. faktorra. A k értékpapír ama bizonytalanságnak tulajdonítható pótlólagos kockázatnak is ki van téve, ami az ε_k tényezőn kívüli megtérüléssel kapcsolatos. A K portfoliónak lényegében nincs ilyen típusú kockázata.

Vajon mi történik akkor, ha a k értékpapír várható megtérülése kisebb lesz, mint a K portfolióé? Egyértelmű az, hogy a portfolió uralni fogja az értékpapírt, mivel az nagyobb várható megtérülést ígér kisebb kockázat mellett, mint az értékpapír. Az okos arbitrazsőr fedezetlen eladással megválik a k értékpapírtól és vásárol K portfoliót, profitot remélve a várható megtérülési értékek különbségéből. Ez a megoldás nem volna teljesen kockázatmentes, mivel a k értékpapír faktoron kívüli megtérülése elfedhetné a várható megtérülési értékek különbözőségét. Mindazonáltal, ha van nagyon sok olyan értékpapír, mint az említett k befektetés, akkor a kockázat e forrása diverzifikációval eltüntethető.

S vajon mi történik akkor, ha a *k* értékpapír várható megtérülése nagyobb, mint a *K* portfolióé? Ebben az esetben nincs nyilvánvaló dominancia. Továbbá lehetséges, hogy egy okos arbitrazsőr fedezetlen eladással megválna a portfoliótól és vásárolna értékpapírt, profitot remélve a várható megtérülési értékek különbségéből. Ebben az esetben sem számíthatunk kockázatmentességre, mivel a tényezőn kívüli megtérülés elfedné a megtérülési értékek különbségét. Mindazonáltal, ha volna sok, a *k* értékpapírhoz hasonlatos befektetés, akkor a kockázat e forrása diverzifikációval eltüntethető volna.

A következtetés az, hogy a *k* értékpapír várható megtérülésének – egyensúlyi helyzetben – egyenlőnek kell lenni a *K* portfolió várható megtérülésével. Eszerint az arbitrázs biztosítaná, hogy a *k* értékpapír várható megtérülése a következő legyen:

$$\overline{R}_k = R_F + 0.8\lambda_1 + 1.5\lambda_2$$

Általánosabban kifejezve, bármely *i* értékpapírra érvényesen így írható fel:

$$\overline{R}_i = R_F + b_{i1}\lambda_1 + b_{i2}\lambda_2$$

Ez utóbbi kifejezés az APT modell eszközértékelési egyenlete, amely más szavakkal a következőket fejezi ki:

> *Egy értékpapír várható megtérülése kapcsolódik az összes átható faktorra irányuló érzékenységhez. Továbbá a reláció lineáris lesz, közös metszésponttal a megtérülési tengelyen, ami azonos a kockázatmentes rátával.*

CAPM modellre kapott alapegyenlethez hasonlóan, az APT modellre fentebb felírt kifejezés igazolja, hogy lineáris kapcsolat áll fenn a várható megtérülés és az értékpapírok különböző releváns jellemzői között. A CAPM esetében a releváns értékpapír jellemző a béta (β_i) volt, az APT modell esetében viszont a releváns értékpapír jellemzők a fő faktorokra való érzékenységek (b_{i1} és b_{i2}). Mint ahogy erről szó volt korábban, az APT modell nem arról szól, hogy hány ilyen tényező létezik, s azok mit reprezentálnak. Ez viszont azt is jelenti, hogy az APT modell hallgat a λ_1 és λ_2 lambda értékről az utolsóként felírt egyenletben. Azok lehetnek pozitívak, negatívak vagy zérus értéküek. A tényezők és a kapcsolódó lambda értékek egyaránt magukban foglalnak empirikus vizsgálódást és ítélkezést is. Az utolsóként felírt általánosító formula az értékpapírokra vonatkozóan, egyensúlyi várható megtérülést fejez ki. Mindazonáltal eme egyenlettel az egyensúlytalanság is a CAPM modellhez hasonló módon illusztrálható. Ennek érdekében egy alfa tagot kell hozzáadni az egyenlet jobb oldalához, a helytelen értékelés kifejezésére. Egy túlértékelt papírnak például negatív alfa értéke volna. Ez azt jelentené, hogy várható megtérülése kisebb lenne annak egyensúlyi várható megtérülésénél. Ennek alapján az értékpapír nem lehetne vonzó valaki számára a vásárlás (vagy a további birtoklás) szempontjából. Hasonlóképpen, egy alulértékelt papírnak pozitív alfa értéke lenne, jelezve, hogy várható megtérülése nagyobb volna annak egyensúlyi megtérülésénél, s egyben vonzó értékpapír a megvásárlás szempontjából.

6.9.4. Az APT és CAPM modell szintézise

Az APT modelltől eltérően a CAPM modell nem feltételezi, hogy a megtérülést tényező modell generálja. A valóságban lehetséges egy olyan állapot, amelyben a megtérülést tényező modell állítja elő, az APT megmaradó feltételezései is érvényesülnek, s a CAPM feltevései is fennállnak. Ezt vizsgáljuk a következőkben.

6.9.4.1. Béta koefficiensek és tényező-érzékenységek

Ha az értékpapír-megtérülést faktor modellek generálják, akkor bármely értékpapír béta koefficiense kapcsolható annak faktor-érzékenységéhez. Ha a megtérülést kéttényezős modellel állítjuk elő, akkor kimutatható az *i* értékpapír megtérülésének az M piaci portfolió megtérülésével alkotott kovarianciája, ami a következő formában írható fel:

$$COV(R_i r_M) = [COV(F_1 R_M) \cdot b_{i_1}] + [COV(F_2 R_M) \cdot b_{i_2}] + COV(\varepsilon_i R_M) \quad (1)$$

ahol a COV szimbólum a zárójelben levő két változó közötti kovarianciát jelöli.

Tudjuk, hogy egy értékpapír béta koefficiense a $COV(R_i R_M)$ és a piaci portfolió varianciájának hányadosaként írható fel.

$$\beta_i = \frac{COV(R_i R_M)}{\sigma_M^2} \quad (2)$$

Ha az előző kovariancia egyenlet minden tagját elosztjuk a σ_M^2 piaci varianciával, akkor a következő kifejezést kapjuk:

$$\beta_i = \left[\frac{COV(F_1R_M)}{\sigma_M^2} \cdot b_{i_1}\right] + \left[\frac{COV(F_2R_M)}{\sigma_M^2} \cdot b_{i_2}\right] + \frac{COV(\varepsilon_i R_M)}{\sigma_M^2} \qquad (3)$$

A $COV(\varepsilon_i R_M)/\sigma_M^2$ kifejezés értéke gyakorlatilag nagyon kicsi, így könnyen elhanyagolható. A másik két tag olyan hányadost tartalmaz, amelyben a tényezőnek a piaci portfolió megtérülésével alkotott kovarianciáját a piaci portfolió varianciájához viszonyítjuk. Ezeket a hányadosokat faktor-bétáknak nevezhetjük. Ez amiatt van, mert mindegyik hányados megegyezik az eredeti béta koefficienssel, azzal a különbséggel, hogy az értékpapír-megtérülés helyén a tényező érték szerepel.

$$\beta_{F1} = \frac{COV(F_1R_M)}{\sigma_M^2} \qquad (4)$$

$$\beta_{F2} = \frac{COV(F_2R_M)}{\sigma_M^2} \qquad (5)$$

Ez az alábbi konklúzióhoz vezet:

$$\beta_i = \beta_{F1} \cdot b_{i_1} + \beta_{F2} \cdot b_{i_2} \qquad (6)$$

Mivel a β_{F1} és β_{F2} konstansok, s nem változnak értékpapíronként, így az utolsó egyenlet azt mutatja, hogy adott értékpapír béta koefficiense függvénye saját tényező-érzékenységének. Következésképpen az értékpapírok eltérő bétájának oka az érzékenységek különbözősége.

Példaként feltételezzük, hogy a GNP faktor bétája $\beta_{F1} = 1.2$, az infláció faktor bétája $\beta_{F2} = 0.8$. Az A, B és C értékpapír érzékenységét a korábbival azonosnak feltételezve, az utolsóként felírt egyenlet felhasználható a béta koefficiensek meghatározására.

$$\begin{aligned}
\beta_A &= (1.2 \cdot -0.40) + (0.8 \cdot 1.75) = 0.92 \\
\beta_B &= (1.2 \cdot 1.60) + (0.8 \cdot -0.75) = 1.32 \\
\beta_C &= (1.2 \cdot 0.67) + (0.8 \cdot -0.25) = 0.60
\end{aligned}$$

6.9.4.2. Várható megtérülés, faktor-béták és értékpapír-érzékenység

A CAPM modellhez szükséges feltevések megfogalmazása eredményeként az i értékpapír várható megtérülése saját béta koefficiensével összefüggésben így írható fel:

$$\overline{R}_i = R_F + \left[\left(\overline{R}_M - R_F\right)\beta_i\right] \tag{1}$$

Amennyiben a megtérülést két tényezős modell generálja, akkor egy értékpapír béta koefficiense kapcsolódik saját tényező-érzékenységéhez és tényező-bétáihoz, ahogy ezt az előzőekben bemutattuk. A súlyozott béta egyenlet jobb oldalát behelyettesítve az utóbb felírt egyenletbe, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
\overline{R}_i &= R_F + \left[\left(\overline{R}_M - R_F\right)\cdot\left(\beta_{F1}\cdot b_{i1} + \beta_{F2}\cdot b_{i2}\right)\right] \\
&= R_F + \left[\left(\overline{R}_M - R_F\right)\beta_{F1}\right]b_{i1} + \left[\left(\overline{R}_M - R_M\right)\beta_{F2}\right]b_{i2}
\end{aligned} \tag{2}$$

Összehasonlítva az eredményül kapott egyenletet, az APT modell korábban felírt egyenletével, látható hogy ha az APT és CAPM modellre vonatkozó feltevések egyaránt fennállnak, akkor a lambda kifejezés a következő értéket kell hogy felvegye:

$$\lambda_1 = \left(\overline{R}_M - R_F\right)\beta_{F1} \tag{3}$$

$$\lambda_2 = \left(\overline{R}_M - R_F\right)\beta \tag{4}$$

E két egyenlet jobb oldalát behelyettesítve az első egyenlet jobb oldalába, eredményül a következőt kapjuk:

$$\overline{R}_i = R_F + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} \tag{5}$$

Önmagában az APT modell nem mond semmit a λ_1 és λ_2 szimbólummal jelölt tényező várható megtérülés prémiumról. Mindazonáltal, ha a CAPM modell szintén érvényesül, akkor az ad némi eligazítást. E tájékoztatás a λ_1 és λ_2 egyenletben foglaltatik benne, ezek akkor érvényesülnek, ha az APT és CAPM modell feltevései egyaránt fennállnak.

Képzeljük el, hogy az 1. faktor együtt mozog a piaci portfolióval, azt jelezvén, hogy az pozitívan korrelál a piaci portfolióval, s a $COV(F_1 R_M)$ értéke ugyancsak pozitív.[80] Viszont a β_{F1} pozitív kell hogy legyen, mivel azt a pozitív előjelű $COV(F_1 R_M)$ és egy másik pozitív érték, a σ_M^2 hányadosaként számíthatjuk. Mivel $\overline{R}_M$ nagyobb R_F értékénél, így az

[80] A $COV(F_1 R_M)$ akkor pozitív, ha a korreláció pozitív, mivel az a korrelációs koefficiens, az F_1 és R_M szórás sorozata.

$(\overline{R}_M - R_F)$ különbség és az $(\overline{R}_M - R_F)\beta_{F1}$ sorozat is pozitív lesz.[81] Az előbb felírt λ egyenletből következik, hogy a λ_1 pozitív lesz. Továbbá, mivel a λ_1 pozitív, a legutoljára felírt egyenletünkből látható, hogy minél nagyobb b_{i_1}, annál nagyobb lesz az értékpapír várható megtérülése. Általánosítva, ha a faktor pozitívan korrelál a piaci portfolióval, akkor az értékpapír várható megtérülése pozitív lineáris függvénye lesz az értékpapír e faktorra irányuló érzékenységének·

Hasonló érveléssel kimutatható, hogy ha a 2. faktor a piaci portfolióval ellentétesen mozog, arra utalva, hogy az F_2 negatívan korrelál az R_M értékkel, akkor a β_{F2} negatív, az $(\overline{R}_M - R_F)\beta_{F2}$ kifejezés negatív és a λ_2 úgyszintén negatív lesz. Így az utoljára felírt egyenletünkből következik, hogy minél nagyobb b_{i_2} értéke, annál kisebb az értékpapír várható megtérülése. Ismét általánosítva: ha a faktor negatívan korrelál a piaci portfolióval, akkor az értékpapír várható megtérülése negatív lineáris függvénye lesz az értékpapír e faktorra irányuló érzékenységének.

Felhasználva a korábbi példát, ahol $\beta_{F1} = 1.2$ és $\beta_{F2} = 0.8$, továbbá feltételezve, hogy $R_F = 7\%$ és $R_M = 15\%$, akkor a megtérülés generáló formula a következők szerint írható fel:

[81] Ha az 1. faktor minél nagyobb mértékben mozog együtt a piaci portfolióval, akkor az azt jelenti, hogy erősebb az F_1 és R_M közötti korreláció, s nagyobb lesz a hozzá kapcsolódó λ_1 kockázati prémium. A piaci portfolióban foglalt 1. faktor implikációit taglalja K.C. John Wei: „An Asset Pricing Theory Unifying the CAPM and APT". Journal of Finance, September 1988. 881-892 pp.

$$\begin{aligned}\overline{R}_i &= R_F + \left[\left(\overline{R}_M - R_F\right)\beta_{F1}\right] b_{i1} + \left[\left(\overline{R}_M - R_M\right)\beta_{F2}\right] b_{i2} \\ &= 7 + \left[(15-7)\cdot 1.2\right] b_{i1} + \left[(15-7)\cdot 0.8\right] b_{i2} \\ &= 7 + 9.6 b_{i1} + 6.4 b_{i2}\end{aligned}$$

Látható, hogy a λ_1 és λ_2 egyaránt pozitív, külön-külön felvett 9.6 és 6.4 értékkel. Ezek szerint a nagyobb b_{i_1} érték nagyobb $\overline{R}_i$ megtérülést vonz. Ugyanígy a nagyobb b_{i_2} következménye magasabb $\overline{R}_i$ megtérülés lesz. Ha a $\beta_{F2} = -0.8$ lenne $+0.8$ helyett, akkor

$$\lambda_2 = (15-7)\cdot(-0.8) = -6.4$$

és így az előző egyenlet a következő alakot venné fel:

$$\overline{R}_i = 7 + 9.6 b_{i1} - 6.4 b_{i2}$$

Eszerint β_{F2} negatív értéke a λ_2 negatív értékéhez vezetne. Ebben az esetben a nagyobb b_{i_2} érték kisebb $\overline{R}_i$ megtérülést eredményezne. Ennek megfelelően a λ értékek előjele meghatározza, hogy az értékpapír várható megtérülése pozitív vagy negatív függvénye azok lambdára irányuló érzékenységének.

Megalapozottnak látszik a feltevés, hogy az értékpapír-megtérülést tényezők sorozata befolyásolja. Az is indokkal feltételezhető, hogy a befektetők többsége előnyben részesíti a megtérülés magasabb szintjét, ellenben a beruházók nem kedvelik a nagyobb kockázatot. Így nem megalapozatlan azt mondani, hogy az APT és CAPM modell együttes érvényesüléséhez szükséges feltételek valóban léteznek. Ilyen alapon mondható, hogy a két modell kombinációja hatásosabb (különösen az előrejelzésben), mint egyedül az egyik vagy a másik, s ezért együtt sokkal jobb orientációt biztosítanak a beruházási döntésekhez. Érdekes lehet megjegyezni, hogy ha a történeti adatok alátámasztják egyik vagy másik modell érvényességét (vagy mindkettőét), akkor Markowitz szerint nem szükségesek megerősítő teszt-eredmények, hogy igazolják a modellek gyakorlati használhatóságát az eszközök értékelésében.[82]

A finanszírozási irodalom legnagyobb vitája ma éppen e modellek tesztelhetősége körül folyik, illetve arról, hogy milyen is valójában gyakorlati használhatóságuk.[83] E modellek alkalmazhatóságának sokféle variációja lehet jelen, s még több változat felbukkanására lehet számítani, ha a befektetők újabb tapasztalatokat szereznek a modellek alkalmazása során. Mindazonáltal, igen kevéssé valószínű, hogy valamelyik modell felsöbbrendűsége igazolható lenne bármely másikkal szemben, mivel mindegyik egzaktan nem mérhető változókat tartalmaz, úgy mint a várható megtérülés, a béták és az érzékenységek. Ezek a pontosan nem megfigyelhető változók csupán becsülhetők, ami a jelentős hiba lehetőségét is magában rejti. A befektetőknek el kell dönteni, hogy melyik módszert favorizálják az alkalmazás során. Végső soron bármely modell értékét a befektető számára az dönti el, hogy milyen az előrejelzés pontossága.

[82] Markowitz, H.M.: „Nonnegative or Not-nonnegative: A Question about CAPM's". Journal of Finance, May 1983, 283-295 pp.

[83] Lásd részletesen: Merton, R. (1973) munkájában.

6.9.5. A többtényezős CAPM

A CAPM modell ismert változata azt feltételezi, hogy a befektető a kockázatnak csupán ama változatával foglalkozik, amely az értékpapír jövőbeli árának bizonytalanságával kapcsolatos. A befektetők általában más kockázatra is érzékenyek, például arra, amely befolyásolja jövőbeli áru- és szolgáltatás-vásárló képességüket. Három olyan tényező is említhető, amelyhez kockázat kapcsolódik: a jövőbeli munkajövedelem, a fogyasztási javak jövőbeli relatív ára és a jövőbeli beruházási lehetőségek. Felismerve a befektetők előtt álló egyéb kockázatokat, Robert Merton[84] kiterjesztette a CAPM modellt arra az esetre, ahol a fogyasztók optimális életfogyasztásukat olyan helyzetben származtatják, amelyikben a kockázat eme „extra-piaci" forrásaival szembesülnek.

A kockázat eme „extra-piaci" fázisait „tényezőknek" nevezik, így a Merton által származtatott változat többtényezős modellnek tekinthető, s az alábbiak szerint írható fel:

$$\begin{aligned} E(R_p) = R_F + \beta_{P,M}\left[E(R_M) - R_F\right] + \beta_{PF_1}\left[E(R_{F_1}) - R_F\right] + \dots \\ + \beta_{PF_2}\left[E(R_{F_2}) - R_F\right] + \beta_{PF_k}\left[E(R_{F_k}) - R_F\right] \end{aligned} \qquad (1)$$

ahol

R_F = kockázatmentes ráta

$F_1, F_2, \dots F_k$ = tényező vagy a kockázat extra piaci forrása 1-től K-ig

[84] Merton, R. (1973): i.m.

K = tényezők vagy extra piaci források száma

β_{PF_k} = a portfolió érzékenysége a k-adik kockázati tényezőre

$E(R_{Fk})$ = a k-adik tényező várható megtérülése

A kockázat teljes extra piaci forrásai így írhatók fel:

$$\beta_{PF_1}[E(R_{F_1})-R_F]+\beta_{PF_2}[E(R_{F_2})-R_F]+\ldots+\beta_{PF_k}[E(R_{F_k})-R_F] \quad (2)$$

Ez a kifejezés azt mutatja, hogy a befektetők kompenzációt igényelnek az extra piaci kockázat mindegyik forrásával, illetve a piaci kockázattal összefüggésben. Megjegyezzük, hogy ha a kockázatnak nincs extra piaci forrása, akkor az (1) egyenlet a CAPM modell által meghatározott portfolió várható megtérülés alakra redukálódik:

$$E(R_p)=R_F+\beta_p[E(R_M)-R_F]$$

A CAPM modell esetében a befektetők a jövőbeli értékpapír-árakkal kapcsolatos kockázatot diverzifikációval igyekeznek kialakítani. Ez a piaci portfolió birtoklásával érhető el, amelyet olyan befektetési alapként képzelhetünk el, amely az egyes értékpapírokba azok relatív tőkésítési arányában irányít befektetést. A többtényezős CAPM modellben a piaci portfolióba irányuló beruházás mellett a befektetők ugyancsak pénzalapokat allokálnak egy – a befektetési alappal ekvivalens – kompozícióba, amely kiiktatja az egyes extra piaci kockázatokat. Nem minden befektető ugyanazt az extra piaci kockázatot veszi figyelembe, azok, akik egy specifikus extra piaci kockázatot tekintenek, az eltüntetést ugyanilyen módon végzik.

Vajon hogyan használható a fentebb leírt portfoliókra vonatkozó többtényezős modell, az egyedi értékpapír várható megtérülésének meghatározására? Minthogy az egyedi értékpapír nem más, mint egyetlen elemből álló portfolió, így a (2) egyenlet érvényes kell hogy legyen minden i egyedi értékpapírra, azaz:

$$\begin{aligned} E(R_i) = R_F &+ \beta_{iM}\left[E(R_M) - R_F\right] + \beta_{iF_1}\left[E(R_{F_1}) - R_F\right] + \ldots \\ &+ \beta_{iF_2}\left[E(R_{F_2}) - R_F\right] + \beta_{iF_k}\left[E(R_{F_k}) - R_F\right] \end{aligned} \tag{3}$$

A többtényezős CAPM modell azért attraktív, mert felismeri a nem piaci kockázatot is. Egy eszköz piaci értékelése ekkor feltétlenül kell hogy tükrözze azokat a kockázati prémiumokat, amelyek kompenzálják eme extra piaci kockázatokat. Ez utóbbiak azonosítása, s az egyes tényezők empirikus értékelése természetesen gondokat okozhat. Ha pedig e kockázatokat egyesítjük, akkor a többtényezős CAPM modell emlékeztetni fog az alábbiakban bemutatott arbitrázs értékelési modellre.

6.9.6. A CAPM és APT modell összehasonlítása

A CAPM modell $E(R_i) = R_F + \beta_i\left[E(R_M) - R_F\right]$ változatából, valamint a

többtényezős CAPM modell

$$\begin{aligned} E(R_i) = R_F &+ \beta_{iM}\left[E(R_M) - R_F\right] + \beta_{iF_1}\left[E(R_{F_1}) - R_F\right] + \ldots \\ &+ \beta_{iF_2}\left[E(R_{F_2}) - R_F\right] + \beta_{iF_k}\left[E(R_{F_k}) - R_F\right] \end{aligned}$$

alakjából kiderül, hogy azok az APT modell speciális esetei.

Együtt tekintve a három változatot, mindez jól látható:

CAPM: $E(R_i) = R_F + \beta_i [E(R_M) - R_F]$

Többtényezős CAPM:

$$E(R_i) = R_F + \beta_{iM} [E(R_M) - R_F] + \beta_{iF_1} [E(R_{F_1}) - R_F] + \ldots$$
$$+ \beta_{iF_2} [E(R_{F_2}) - R_F] + \beta_{iF_k} [E(R_{F_k}) - R_F]$$

APT:

$$E(R_i) = R_F + \beta_{iF_1} [E(R_{F_1}) - R_F] + \beta_{iF_2} [E(R_{F_2}) - R_F] + \ldots + \beta_{iF_k} [E(R_{F_k}) - R_F]$$

Ha az egyetlen tényező a piaci kockázat, akkor az APT modell a CAPM modellre egyszerűsödik. Az APT változat a többtényezős CAPM modell ellentettje, bár hasonlítanak egymásra. Mindkettő azt mondja, hogy a befektetőt kompenzálni szükséges az összes szisztematikus kockázatért, ugyanakkor nem jár ellenérték a nem szisztematikus kockázat vállalásáért. A többtényezős CAPM modell azt feltételezi, hogy a szisztematikus tényezők egyike a piaci kockázat, míg az APT modell nem specifikálja a szisztematikus kockázat komponenseit.

Kimunkálása idején az APT modellt támogatói magasabbrendűnek tartották a CAPM modell eredeti változatánál, mivel

1. az APT alapvető feltevései kevésbé korlátozóak és valószerűbbek,
2. az APT empírikus implikációi meggyőzőbbek a CAPM empírikus tesztelésénél.

Néhány ilyen argumentumot bemutatunk az alábbiakban.[85]

1. Míg mindkét megközelítés él ama reális feltevéssel, hogy a beruházók a nagyobb gazdagságot előnyben részesítik a kisebbel szemben s mindannyian kockázat-kerülők, ezért az eredeti CAPM modell kvadratikus fogyasztási hasznossága sokkal korlátozóbb.

2. Az APT modell nem követeli meg a megtérülés többváltozós normális eloszlásának feltevését. Az APT megközelítésben nem szükséges feltevést megfogalmazni a megtérülés valószínűségi eloszlása kapcsán, s azt sem feltételezik, hogy a beruházók portfoliókat a várható megtérülés és a variancia, illetve a szórás alapján választanak. Emiatt az APT nem jelent hátrányt az empirikus tesztelésben olyan gyakran előforduló esetekben, ahol az értékpapír-megtérülés a normálistól eltérő eloszlást mutat.

3. Az APT modell nem igényli a piaci portfolió létezését. Így a piaci portfolió azonosításával kapcsolatos nehézség, illetve az a követelmény, hogy e közelítő portfolió legyen várható megtérülés-variancia hatékony, elkerülhető. Így az $E(R_M)$ nem szükségképpen a valódi piaci portfolió várható megtérülése lesz, hanem inkább olyan adekvát közelítő portfolióé, amely kielégítően tükrözi az alapvető szisztematikus kockázati tényezőket. Az ily módon származtatott CAPM modell konzisztensebbnek vélhető ama intuícióval, ami a CAPM változatot népszerűvé tette, nevezetesen az eszközárak együttmozgásával kapcsolatos megfigyelésekkel. Ez abban manifesztálódik, hogy az esz-

[85] A két modell összehasonlítását részletesen bemutatja Fabozzi, F. J.-Modigliani, F. – Ferri, M. G.: Foundation of Financial Markets and Institutions. Prentice Hall 1994. c. müve.

köz-megtérülés együttes mozgását az egytényezős vagy piaci modell igazolja.

4. Az APT változat nem követeli meg a kockázatmentes eszköz létezésével kapcsolatos korlátozó feltevést, illetve azt a restrikciót, ami a kölcsönvétel és kölcsönadás alapjául szolgáló kockázatmentes kamatrátára vonatkozik.

5. Az APT megközelítés sokkal általánosabb, mint az eredeti egybétás CAPM modell, abban az értelemben, hogy az explicite engedi több kockázati tényező érvényesülését. Ez sokkal realisztikusabbnak tekinthető, mint az eredeti CAPM modell egyetlen bétája, mivel egyetlen mérték teljességgel nem fedheti le a szisztematikus kockázati tényezőket. (Ez a megkülönböztetés nyilvánvalóan nem érvényes a CAPM több bétán alapuló változatára).

6. Míg az eredeti CAPM verzió egyperiódusú modell, az APT többperiódusúnak tekinthető. E distinctio nyilvánvalóan nem áll fenn a többtényezős CAPM változattal összefüggésben.

Mindazonáltal, az APT bizonyos aspektusokat érintő feltevésekkel él, s a CAPM modelléhez hasonlatos implikációkhoz vezet, nevezetesen a következőkhöz:

1. A tökéletes és súrlódások nélküli befektetési piac létezésére vonatkozó feltevés;

2. Annak feltételezése, hogy a befektetőknek homogén várakozásaik vannak;

3. Lineáris kapcsolat van a kockázat és megtérülés között;

4. Az a felismerés, hogy az értékpapír-megtérülés alakulása kizárólag a nem diverzifikálható kockázaton alapul.

7. TŐKESTRUKTÚRA ÉS TŐKEKÖLTSÉG

7.1. A tőkeköltség fogalma és szerepe

A tőke-költségvetés minden főbb eljárása megköveteli a minimálisan elfogadható megtérülési ráta kifejezett és érthető meghatározását. Ezt az értéket *i* kamatrátaként használják a jelenérték és az éves költség módszerben. A megtérülési ráta számítási módszerében a növekmény megtérülési projekt beruházási rátája meg kell hogy haladja ezt a minimális rátát (hurdle rate). Bár a minimálisan megkövetelt megtérülési ráta a tőkeköltségvetési folyamat szükségszerűen integráns része, mégis vita tárgyát képezi e ráta meghatározásának módja.[86]

Tőkeforrások

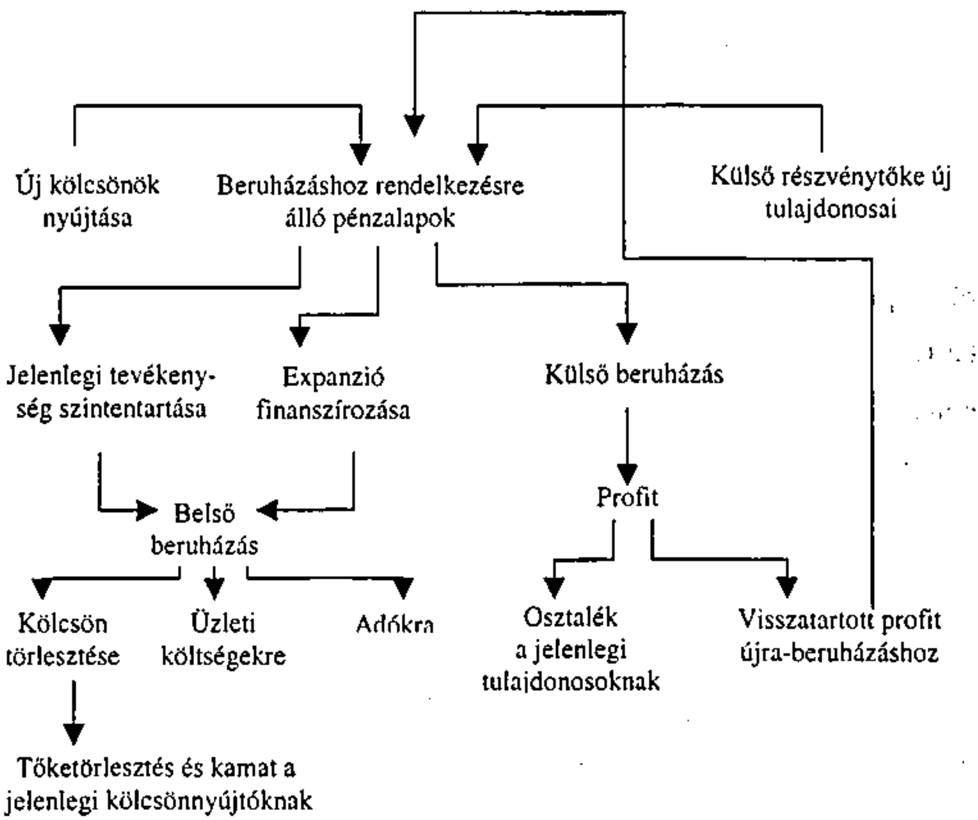
Minden egyes, a cégbe invesztált forrás, eredete szerint vagy kölcsön- vagy részvénytőke. A részvénytőke azon alapokat jelenti, amelyeket a cég tulajdonosai nyújtanak a működés során realizált profitból, és visszatar-

---

[86] Robichek (1969), Meyers (1968) írásai megkísérlik kibékíteni a különböző tőkeköltség elméleteket. Ugyanígy tesz Solomon (1963) írása is e tárgyban.

tották azt újbóli befektetés céljából, vagy az új tulajdonosoktól származó új tőke beáramlását hasznosítják a törzsrészvények addicionális hányadának eladásából nyerve. A kölcsöntőke-forrás az egyének és intézmények által kölcsön formában nyújtott alapokból áll, amit a szerződéses megállapodásnak megfelelően vissza kell fizetni. Mind a kölcsöntőkét megtestesítő kötvényekre, mind az elsőbbségi részvényekre mint olyan értékpapírokra hivatkoznak, amelyek elsődleges követelést testesítenek meg a cég eszközeire vonatkozóan, a részvénytulajdonosokkal szemben. A beruházási alapok forrásait az alábbi ábra szemlélteti.

92. ábra *A beruházási célú tőke áramlása*



7.2. A tőkeköltség koncepció értelme

Az erőforrások korlátozottságát figyelembe véve, mind a kölcsön-, mind a részvénytőke költséges olyan értelemben, hogy ha ezeket a tőkealapokat nem használják a cégen belül, akkor bizonyos – a kölcsön nyújtásával kapcsolatos – költségek elkerülhetők, és a „felszabadított" tőke máshol nyereségesen befektethető. A gazdaságtalan működés elkerüléséhez nyilvánvalóan arra van szükség, hogy a belső beruházás minden növekménye legalább akkora megtérülést hozzon, mint a vele kapcsolatos tőkealapok növekmény-költsége. A tőkeköltség olyan minimálisan teljesítendő megtérülési költséget jelent, ami alapján mindegyik beruházási alternatíva minősíthető.

A tőkeköltség értelmezésének másodlagos és szorosan kapcsolódó funkciója, az optimális tőkestruktúra meghatározása egy adott cég számára. Azaz, ha a tőkeköltség az alkalmazott kölcsöntőke és részvénytőke relatív nagyságának függvénye, akkor az igényelt tőke bármely mennyiségére igaz, hogy létezik egy bizonyos kölcsöntőke-részvénytőke egyensúly, ami minimalizálja az átfogó tőkeköltséget. E problémát a továbbiakban „tőkeáttételként" vizsgáljuk.

7.3. A beruházási alapok forrásai és költségei

A beruházási döntésekhez kritériumot szolgáltató alapelvek kialakításakor szükséges a döntések relatív hasznának értékelése. Ezen a ponton ésszerű lenne feltételezni, hogy a döntés joga a jelenlegi tulajdonosoké, sőt abból is kiindulhatunk, hogy a tulajdonosok profit-maximalizálók, a beruházási döntések racionálisak, így a legfőbb beruházási kritérium, a jelenlegi tulajdonosok hosszú távú érdekeinek maximalizálása. Eme alapvető beruházási elv rögzítése nem zár ki olyan egyéb, fontos célkitűzéseket, mint a foglalkoztatási szint, a termékbiztonság, a közösségi szolgáltatások és így tovább. A tőkeallokáció vizsgálata ebben az összefüggésben kiemelkedő jelentőségű.

A visszatartott profit újra-beruházása helyett, lehetséges azt oly módon visszajuttatni a tulajdonosoknak, hogy azok más lehetőségekbe újra befektessék. Így szükséges, hogy a cégen belül felhasznált minden pénzalap olyan megtérülést nyújtson, ami legalább akkora, mint amit egy részvényes kereshetne, ha ezeket az alapokat valahol máshol fektetné be.

7.3.1. A részvénytőke költsége

Felmerül a kérdés, hogy mi a profit „értéke" az egyedi részvénytulajdonos számára. Ha eltekintünk az adó létezésétől, akkor az értékre egy rendelkezésre álló alternatíva vizsgálatából következtethetünk, a tulajdonosi részvény piaci eladásából. Például feltételezzük, hogy egy törzsrészvény piaci értéke $P_E = 30$ dollár, és tegyük fel továbbá, hogy részvényegységre jutó nyereségként $EPS = 3$ dollárt várnak a meghatározatlan hosszú ideig tartó jövőben. A részvény tőkésítési rátája K_E ugyanannyi, mint a kezdeti beruházás és az egyenletes pénzáram végtelen sorozatának megtérülési rátája:

$$K_E = EPS / P_E \tag{1}$$

Ebben a példában a tőkésítési ráta: 3/30=0.10. Mivel a részvényesnek van egy olyan opciója, amellyel lemond egy 10%-os megtérülési lehetőségről azzal, hogy részvényenként 30 dollárért eladja tulajdonjogát, arra a következtetésre juthatunk, hogy a visszatartott profit minden egységének legalább 10%-os megtérülést kell hozni. Eme dezinvesztíciós lehetőség miatt a belső beruházásoknak legalább $K_E = EPS / P_E$ rátát kell eredményezni.

Az (1) egyenlet számlálója a várt, társasági adózás utáni, de a személyi jövedelemadó levonása előtti részvényegységre jutó nyereséget jelenti. Lényegében két alternatíva áll rendelkezésre, egyrészt a profit visszatartása és a cégen belüli újbóli befektetése, másrészt osztalékfizetés és újbóli beruházás másutt (a személyi jövedelemadót ez utóbbi esetben kell kifizetni). Ha az adókat is figyelembe vesszük, akkor a részvénytulajdonosok számára rendelkezésre álló profitáramot csökkenti a T_S személyi jövedelemadó ráta, s ekkor a tőkésítési ráta:

$$K_E = (1 - T_S) EPS / P_E \tag{2}$$

Szemléltetésképpen egyrészt feltételezzük, hogy részvényegységenként 3 dollár nyereséget fizetnek ki osztalékként, másrészt arra számítunk, hogy a részvénytulajdonos marginális személyi jövedelemadó rátája jelenleg (és várhatóan a jövőben is) 30%-os. A jelenlegi 30 dolláros piaci értékkel a szóban forgó tőkésítési ráta így alakul:

$$K_E = (1 - 0.30)3 / 30 = 0.07$$

Nagy, tőzsdére vitt társaságoknál rendkívül nehéz minden egyes részvénytulajdonos számára meghatározni egy reprezentatív marginális személyi jövedelemadó rátát, s a (2) egyenletben foglalt kifejezés praktikusan kivihetetlen. E komplikációt természetesen elkerülhetjük azáltal, hogy összességében egyszerűen nem vesszük figyelembe az adókat, vagy azt feltételezzük, hogy a visszatartott profitot nem ruházzák be a cégbe, hanem külső beruházási lehetőség megvalósításához használják. A visszatartott profit például felhasználható adott társaság meghatározott számú részvényének, vagy egy másik cég valamekkora tulajdoni hányadának megvásárlására. Amikor a külső tulajdoni érdekeltség többségi kontrollt tesz lehetővé, akkor nincs azonnali adóhatás, és a részvény tőkésítési rátája következetesen az, amit az (1) egyenlet ad meg.

A tőkeköltség további kifejtése során a személyi jövedelemadók azon az alapon hagyhatók figyelmen kívül, hogy a részvények értéke – ahogy azt a piacon megállapítják – visszatükrözi az egyéni részvénytulajdonosok adókonzekvenciáit. Azaz, *EPS* végtelen hosszú lefutású jövedelem kilátásával szembesülve, egy bizonyos P_E piaci értéket képviselő részvény folytatódó birtoklása K_E tőkésítési rátát sugall minden egyes részvénytulajdonosnak, mint ahogy azt az (1) egyenlet mutatja. Két különböző marginális személyi adórátával jellemezhető egyén feltételezhetően továbbra is birtokolni fogja a részvényegységre eső, P_E piaci értéket képviselő részvényeit, ha a jövedelmet újra beruházzák legalább K_E megtérülést hozó projektekbe.

A visszatartott profit a cégen belül nem az egyetlen forrása a részvénytulajdonosi alapnak. Emellett belsőleg generált beruházási alapok értékcsökkenési és más tőkefogyasztási engedménnyel is előállíthatók. Az itt használt szövegkörnyezetben a „jövedelem" az addicionális beruházáshoz vagy dezinvesztícióhoz rendelkezésre álló nettó pénzáramra utal azt követően, hogy az előrevetített jövedelemszint fenntartásához szükséges újra-beruházás érdekében tartalékot képeztek. Eszerint az *EPS* nettó jövedelem egyenlő a nettó pozitív pénzáram és a jövedelem fenntartásához szükséges tőkefogyasztási engedmények különbségével.

7.3.2. A kölcsöntőke költsége

A kölcsöntőke növekményének teljes különbsége olyan direkt „árként" határozható meg, amit a kölcsönvett alapokért fizettek, azon a hatáson túl, amit az új kölcsön kifejt a másik tőke költségére.

A részvénytőke költségétől eltérően, a kölcsöntőke költségét nem kell a piaci értékeléshez igazítani, ellenkezőleg a kölcsöntőkéért fizetett direkt árat a kölcsönszerződés megkötésekor állapítják meg, meghatározva a tőke kamataival együtt történő visszafizetését. A kölcsöntőke adózás előtti direkt költsége az alábbiak szerint írható fel:

$$K_D' = \frac{I'}{V_D} \tag{5}$$

ahol I' a kölcsönvett tőkére számított, adózás előtti éves kamatterhet jelenti, a V_D pedig a hosszú távú kölcsöntőke teljes piaci értékét jelöli. A kamatköltség adózás előtt levonható, így a kölcsöntőke adózás utáni direkt költsége a következő lesz:

$$K_D = (1-T)\frac{I'}{D} = \frac{I}{D} \tag{6}$$

ahol T a cég releváns jövedelemadó rátája.

E koncepció illusztrálására vegyünk egy céget, amely 20 millió dollár éves kamatot fizet 400 millió dollár kölcsöntőke után. A kölcsön adózás előtti direkt költsége az (5) egyenlet alapján 0.05. Ha 40%-os marginális adórátát feltételezünk, akkor a kölcsöntőke adózás utáni költsége (1-0.40)(0.05)=0.03 lesz.

7.4. A vállalati tőkestruktúra

A tőkejavakba irányuló beruházások finanszírozást igényelnek. Mivel az alkalmazást finanszírozási módszerek határozzák meg, a vállalati tőkeköltséget, ami viszont befolyásolja a vállalt beruházási összeget, így nyilvánvaló, hogy a vállalati beruházási és finanszírozási döntések határozzák meg. A finanszírozás különböző forrásokból biztosítható. A külső források közé tartozik a részvények kibocsátása, a kötvények és adóslevelek eladása, valamint a rövid lejáratú kölcsön. A pénzalapok fő belső forrását a visszatartott profit képviseli. E pénzforrások relatív költsége különböző lehet. A finanszírozási döntés a pénzalapok leghatékonyabb összetételének kiválasztására, vagy másképpen kifejezve, az *optimális vállalati tőkestruktúra* meghatározására összpontosít.

7.4.1. A tőkeköltség és az optimális tőkestruktúra hagyományos megközelítése[87]

Feltételezzük, hogy a vállalat célja saját piaci értékének maximalizálása, és a tőkepiac tökéletes. Az egyszerűség érdekében azt is feltesszük, hogy csak két finanszírozási forrást, részvénytőkét és kölcsöntőkét alkalmaznak. A vállalat teljes piaci értéke V, amely a D kölcsöntőke és az S részvénytőke piaci értékének összege. Az összes várható jövedelmet a kölcsönadóknak fizetett kamat és a részvényesek által elért nettó megtérülés összegeként definiáljuk (a hozam egészét kiosztják). A tőkeköltség vagy tőkésítési ráta a vállalati tőkeszolgáltatók által a jövőbeli jövedelemáram jelenértékének számításához használt diszkontráta, amely a különböző finanszírozási források költségeinek súlyozott átlagaként definiálható. Csupán két forrást, részvénytőkét és kölcsöntőkét feltételezve, a tőkeköltség a két komponens költségének *súlyozott átlaga.*

A részvénytőke-költség az a minimális megtérülési ráta, amelyet a vállalatnak el kell érni a részvényárak változatlanul tartásához. Másként kifejezve az a megtérülési ráta, amelyet a részvényesek a vállalati részvények birtoklásából várnak a tartási időszak folyamán. Feltételezzük, hogy a vállalati jövedelemáram időben várhatóan nem növekszik. A kölcsöntőke költsége a fix kamatozású kölcsön után fizetett kamatrátaként tekinthető, amit az adó szerint korrigálni szükséges. Ez az a diszkontráta, melyet a

[87] A tőkestruktúra hagyományos elméletének összefoglalását adja Durand, D.: Cost of Debt and Equity Funds for Business: Trends and Problems of Measurement. Conference on Research and Business Finance 1952. c. tanulmánya

kölcsönadók használnak jövedelemáramuk jelenértékének meghatározására.

A kölcsöntőke költségét K_D –vel, a részvénytőke költségét K_E –vel, az átfogó, súlyozott költséget *WACC*-al jelölve:

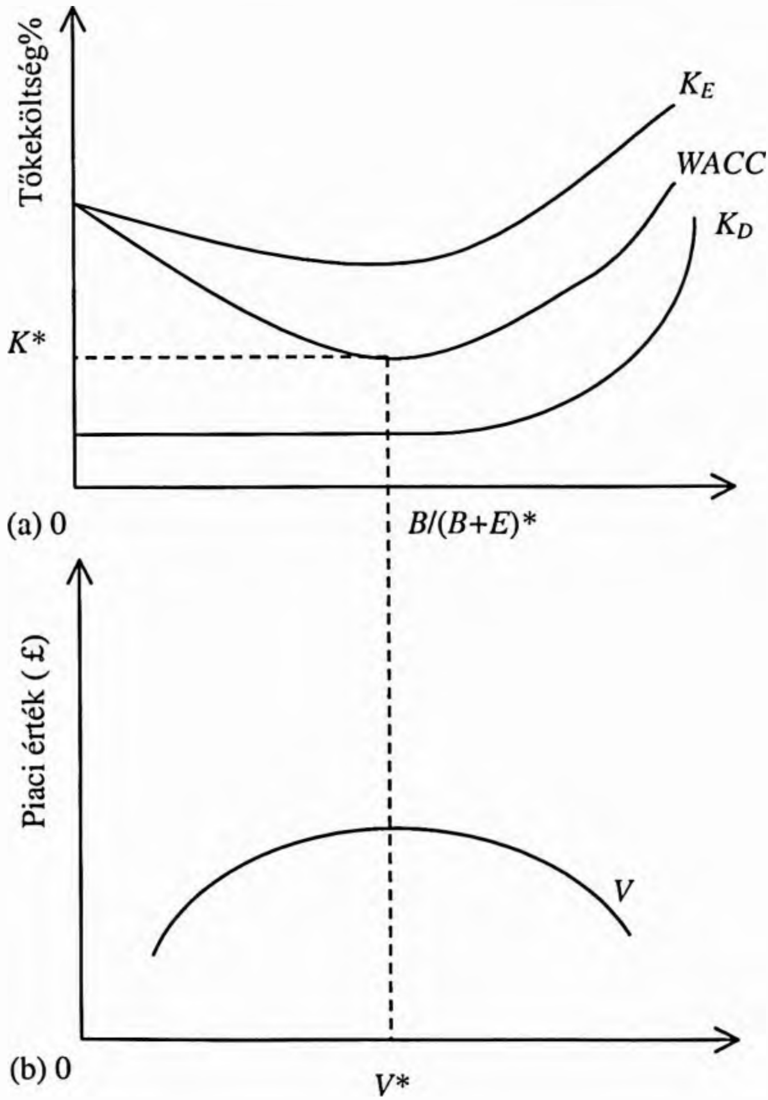
$$WACC = K_E \cdot \frac{S}{V} + K_D \cdot \frac{B}{V}$$

Így *WACC* a részvénytőke és a kölcsöntőke diszkontrátájának súlyozott átlaga, s a súlyokat a vállalati vagyonhoz viszonyított *E/V* részvénytőke és *D/V* kölcsöntőke arány szolgáltatja. Feltéve, hogy a jövedelem független a finanszírozási módszertől, a *V vállalati érték akkor maximális, ha WACC minimális.*

Az egyes finanszírozási formák költségét és a súlyozott átlagköltséget mutatja a 93. ábra (a) része a vállalati áttétel (kölcsöntőke/részvénytőke arány) függvényében.

A K_D alacsonyabban van, mint a K_E görbe, mivel a kölcsönfinanszírozást kevésbé kockázatosnak tekintik, feltéve hogy a kamatfizetést teljesíteni kell a részvényeseknek fizetendő bármilyen hozam előtt. A kölcsöntőke költsége kezdetben közelítőleg konstans, de az áttételi arány folyamatos emelkedésével erőteljesen növekszik. Ennek az a magyarázata, hogy a kölcsönadók magasabb megtérülést követelnek a megnövekedett kockázat kompenzálására, különösen a vállalati vagyon csökkenése és a csőd lehetősége esetén. Végül is a megnövekedett kockázat nagyobb lehet, mint a magasabb megkövetelt megtérülés és a görbe még meredekebben emelkedik. Ez látható 93. ábrán.

93. ábra *Tőkeköltség, vállalati érték és tőkestruktúra*



Két vállalatnak ugyanakkora, 1 000 dolláros vagyona van (könyv szerinti értéken számolva). A részvénytőke és a kölcsöntőke kombinációjával finanszírozott *B* vállalatnál, jövedelmének 100%-os csökkentésekor kevesebb többlet marad kamatfizetés után, mint a kizárólag részvénytőkével finanszírozott *A* vállalatnál. Az összehasonlító számítás a 81. táblában található.

81. tábla *Vállalati tőkestruktúra és a tőkeköltség*

	A Vállalat (Ł)	B Vállalat (Ł)
Összes részvénytőke	**1000**	**500**
Összes kölcsöntőke (10%-os kamatra)	**0**	**500**
Összes vagyon	1000	1000
Jövedelem	150	150
Mínusz a kölcsön kamata	0	50
Összes nettó részvénytőke megtérülés	150	100
Részvénytőke megtérülési ráta	15%	20%
Jövedelem (100%-kal csökken)	75	75
Mínusz a kölcsön kamata	0	50
Összes nettó részvénytőke megtérülés	75	25
Részvénytőke megtérülési ráta	7,5%	5%

Amint megfigyelhettük, a K_E részvénytőke-költség görbe magasabban van, mint a K_D, mivel a maradék jövedelem birtokába jutó részvényesek nagyobb kockázatot viselnek, mint a kölcsönadók. A K_E görbe is emelkedik az áttételi arány növekedésével, jelezve a részvényesek megnövekedett kockázatát. Ha több kölcsöntőkét vesznek igénybe, akkor a maradékként adódó jövedelem szintje csökken. Amint a táblából látható, a jövedelem változékonysága is nő az áttételi fok emelkedésével. A jövedelem csökkenés a részvénytőke-megtérülési ráta sokkal nagyobb mérvű csökkenését okozza a *B* vállalatnál (20%-ról 5%-ra), mint az A cég esetében. Mivel a részvényesek magasabb megtérülést várnak, így a részvénytőke-költség görbe emelkedő lesz.

A *WACC* átlagos tőkeköltség-görbe a K_E görbével azonos pontból indul, ahol is a vállalatot 100%-ban részvénytőkével finanszírozzák. Mivel a kölcsöntőke/részvénytőke arány növekszik, ezért *WACC* csökken, amint további, olcsóbb kölcsöntőkét vesznek igénybe. Ha az áttételi arány folyamatos emelkedésével mind a K_D, mind a K_E növekszik, ezek eredőjeként a k_a is emelkedik, s végeredményben a *WACC* U alakú görbe lesz. A $D/(D+E)^*$ optimális tőkestruktúra a K^* minimális tőkeköltségnek felel meg az ábra (a) részén, a minimális tőkeköltség mellett van a V^* maximális vállalati érték az ábra (b) részén.

7.4.2. Modigliani és Miller elmélete

Modigliani és Miller 1958-ban megjelent cikkében[88] a tőkestruktúra-probléma vizsgálatát szigorúan tudományos alapra helyezte. Az eredmény a jól ismert MM tételek megfogalmazása lett. Ehhez feltételek sora szolgált alapul, mint például a kölcsöntőke konstans költsége, a zérus ügynöki költség, a végtelen lefolyású pénzáram és a zérus értékű növekedés.

[88] Modigliani, F.-Miller, M. H.: The Cost of Capital, Corporation Finance and Theory of Investment. American Economic Review, 1958.

Először eltekintettek az adók létezésétől. Modigliani és Miller I. tétele az alábbi relációval írható fel:

$$V_L = V_U = EBIT / WACC = EBIT / K_E^U$$

ahol

V_L = az áttételes vállalat értéke

V_U = az áttétel nélküli vállalat értéke ugyanabban a kockázati osztályban

K_E^U = áttétel nélküli, kizárólag részvénytőkével finanszírozott vállalat megkövetelt megtérülési rátája

Az I. tétel szerint a vállalat értéke a várható nettó működési jövedelem tőkésítésével határozható meg, rátaként a tőke súlyozott átlagköltségét alkalmazva, amely konstans, s megegyezik a nem áttételes (zérus kölcsöntőkéjű) vállalat részvénytőke költségével. Eszerint az I. tétel azt foglalja magában, hogy a vállalat értéke független annak áttételi fokától. MM I. tétele azt is kimondja, hogy a vállalati tőke súlyozott átlagköltsége áttételes és áttétel nélküli esetben ugyanakkora. A súlyozott átlagköltség továbbá azonos az ugyanazon kockázati osztályba tartozó áttétel nélküli vállalat részvénytőke költségével.

Modigliani és Miller II. tétele a következő alakban írható fel:

$$K_E^L = K_E^U + \left(K_E^U - K_D\right)\left(D / E\right)$$

Az egyenlet azt mutatja, hogy az áttételes vállalat K_E^L részvénytőke költsége megegyezik az ugyanazon kockázati osztályba tartozó áttétel nélküli vállalat K_E^U részvénytőke költségének és a kockázati prémiumnak az összegével. Ez utóbbi nagysága egyaránt függ az áttétel nélküli vállalat részvénytőke költsége és kölcsöntőke költsége különbségétől és az alkalmazott áttételi foktól.

Mindent egybevetve, a két MM tétel szerint, a tőkestruktúra egyre nagyobb kölcsöntőke tartalma *nem növeli a vállalat értékét*, mivel az alacsonyabb kölcsöntőke költség előnyeit pontosan ellensúlyozza a részvénytőke költségének növekedése. Így Modigliani és Miller az adók figyelmen kívül hagyásával azt mondja, hogy a vállalat értékét és a súlyozott átlagköltséget a tőkestruktúra egyáltalán nem befolyásolja.

Modigliani és Miller 1963-ban megjelent tanulmányában[89] korrigálta tételeit az adók figyelembevételével. Ekkor a tételek annak feltételezésével kerültek újrafogalmazásra, hogy a vállalatok kötelesek jövedelemadót fizetni. Eszerint az I. tétel a következők szerint írható fel:

$$V_L = V_U + TD = EBIT\left(1-T\right)K_E^U + TD$$

Ennek alapján az áttételes vállalat értéke egyenlő az ugyanazon kockázati osztályba tartozó áttétel nélküli vállalat értéke, plusz az áttételből származó nyereség. Ez utóbbi az adómegtakarítás értéke, a kölcsöntőke alkalmazásának tulajdoníthatóan, s ami azonos a vállalati adóráta és az alkalmazott kölcsöntőke szorzatával. Ismeretes, hogy az áttétel nélküli vállalat

[89] Modigliani, F. – Miller, M. H.: Taxes and the Cost of Capital: A Correction. American Economic Review, June 1963.

esetében, öröklejáratú pénzáram feltételezésével, az adózott EBIT azonos a nettó jövedelemmel, ez utóbbi pedig a teljes kifizetett osztalékkal. Ennek alapján az áttétel nélküli vállalat értéke egyenlő az öröklejáratú osztalék és a K_U tőkeköltség hányadosával. Úgyszintén figyelmet érdemel, hogy a V_U és V_L közötti különbség növekszik akkor, ha a vállalat által alkalmazott kölcsöntőke növekszik. Így a vállalat értéke akkor lehet maximális, ha a kölcsöntőke-finanszírozás aránya 100%-os.

MM II. tétele, adók figyelembevételével a következő formában írható fel:

$$K_E^L = K_E^U + \left(K_E^U - K_D\right)\left(D/E\right)$$

Ebben az esetben az áttételes vállalat részvénytőke költsége azonos az áttétel nélküli vállalat részvénytőke költségének és a kockázati prémiumnak az összegével; ez utóbbit azonban az (1-*T*) tényező mérsékli. Eszerint a vállalati adók bevezetésekor a részvénytőke költsége lassabban növekszik, mint a vállalati adókat nélkülöző állapotban nőne. Továbbá a kölcsöntőke költségét mérsékli a kamat adózás előtti levonhatósága. E két hatás kombinációja adja a vállalati érték I. tételben bemutatott növekményét.

A Modigliani-Miller modell vállalati adókat figyelembe vevő változata olyan következtetéshez vezethet, hogy a vállalat akár 100%-ban kölcsöntőkével finanszírozza tevékenységét.

Miller 1977-ben olyan tőkestruktúra modellt közölt[90], amely a vállalati adókon kívül a személyi adókat is figyelembe veszi. A Miller-modellen alapuló tétel a következő formát ölti:

$$V_L = V_U + \left[1 - \frac{(1-T_c)(1-T_E)}{(1-T_D)}\right] D$$

ahol T_c a vállalati adóráta, T_E a részvény-jövedelem személyi adó rátája, T_D a kötvény-jövedelem személyi adó rátája.

A zárójelben levő kifejezés és a D kölcsöntőke szorzata az áttételből származó nyereség. (A zárójeles kifejezés helyettesíti, $T=T_c$ feltételezésével, az adórátát Modigliani és Miller vállalati adókat figyelembe vevő modelljében.) Ha az összes adót figyelmen kívül hagyjuk, azaz $T_c = T_E = T_D = 0$, akkor a modell az eredeti MM formula zéró adós változatára egyszerűsödik. Ha eltekintünk a személyi adóktól, $T_E = T_D = 0$ feltevéssel, akkor az MM modell vállalati adókat alapul vevő változatát kapjuk. Az áttételből származó nyereség nagysága a Miller modellben egyaránt függ T_c, T_E és T_D értékétől, valamint a kölcsönfinanszírozás összegétől. Ha $T_E < T_D$, akkor a zárójeles kifejezés kisebb, mint T_c, s a finanszírozási áttétel értéke is kisebb, mint amekkora személyi adók hiányában lenne. Így a Miller modell megerősíti a korábbi MM konklúziót, hogy ti. a vállalati kölcsöntőke alkalmazása növeli a vállalat értékét, habár ez az előny egyértelműen kisebb $T \cdot D$ összegnél. Eszerint a személyi adók csökkentik a vállalati kölcsöntőkéből származó előnyöket. Ugyanakkor az is látszik, hogy a Miller modell is 100%-hoz közeli kölcsöntőke arányt ír elő értékmaximalizáló tőkestruktúraként.

[90] Miller, M.: Debt and Taxes. Journal of Finance, May 1977.

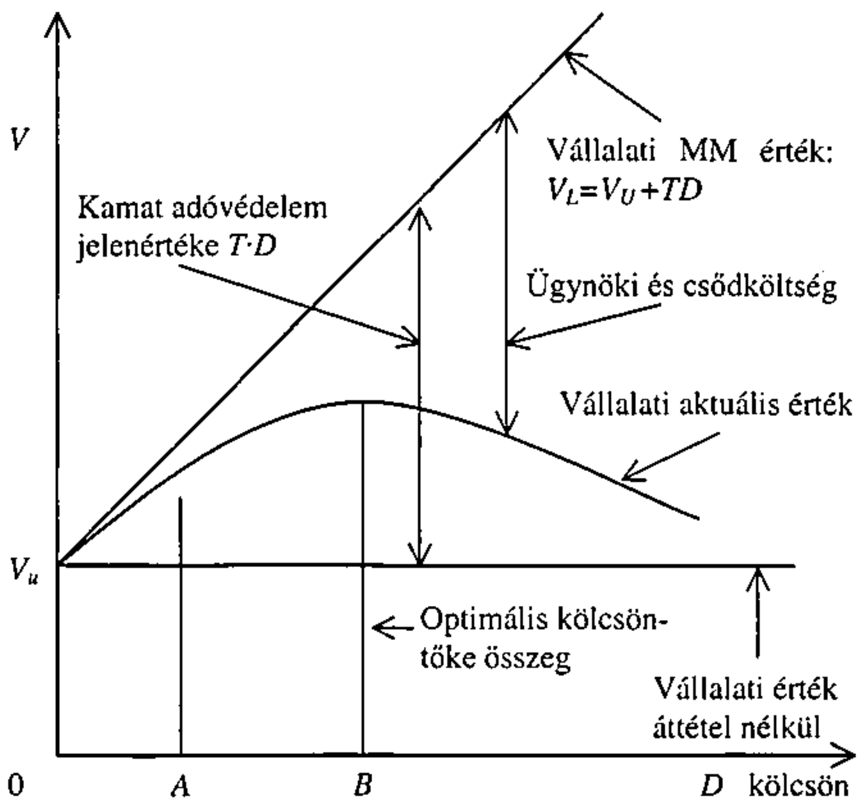
A két MM tétel és a Miller modell nem tükrözi a valóságos piaci feltételeket. E teóriával kapcsolatos legfőbb gond az, hogy képviselői figyelmen kívül hagyják a finanszírozási lehetetlenülés kiadásait és az ügynöki költségeket. E ráfordítások a vállalatok csődhelyzetbe kerülésekor és felszámolásakor igen nagy összegűek is lehetnek. A csőd olyan rendkívüli kiadásokkal jár, mint az eszközök piaci ár alatti kényszerű eladása, a vagyon felmorzsolódása, vagy az eljárási-, megfigyelési- és adminisztratív költségek. A finanszírozási lehetetlenülés fenyegetésének kezelése ugyancsak kiadásokkal jár, mivel a menedzserek több időt kell hogy töltsenek a csődveszély elhárításával, mint hasznos működési döntések meghozatalával, továbbá költséges lépésekre kényszerülnek a finanszírozási lehetetlenülés megelőzése érdekében. Általában igaz, hogy a finanszírozási lehetetlenülés valószínűsége annál nagyobb, minél több kölcsöntőkét alkalmaznak. A jövőbeli finanszírozási lehetetlenülés valószínűségének növekedése csökkenti a vállalat folyó értékét és növeli a tőkeköltséget. Az ügynöki költségek ugyancsak növekvő tendenciát mutatnak akkor, ha egyre több kölcsöntőkét alkalmazunk.

Ha a költségeket figyelembe vesszük, akkor MM I. tétele, vállalati adókkal, a következő alakot ölti:

$$V_L = V_U + TD \text{ - \textit{ügynöki és csődköltségek jelenértéke}}$$

Ezt a relációt mutatja be a 94. ábra..

94. ábra Vállalati érték a kölcsöntőke-alkalmazás függvényében



Az ábráról látható, hogy az adóvédelem-hatás az *A* pont elérése előtt domináns. Az *A* ponton túl az ügynöki- és csődköltség kezdi ellensúlyozni a kölcsöntőke-finanszírozás előnyeit. A *B* pontban a *kölcsöntőke marginális adóelőnyét pontosan ellensúlyozza a finanszírozási lehetetlenülés és az ügynöki marginális költség hátrányos hatása*, a *B* ponton túl pedig a kölcsöntőke alkalmazás áldozatai meghaladják annak előnyeit. A finanszírozási lehetetlenülés és ügynöki költség nem könnyen becsülhető, s ugyancsak nagyon nehéz – ha nem lehetetlen – a gyakorlatban pontosan azonosítani a *B* pontot. Meg kell jegyeznünk, hogy az ügynöki- és csődköltség szintén pótlólagos költségtétel a Miller modellben. Ha e költségek növekmény-tételek, akkor az érték és a kölcsöntőke közötti reláció ugyanolyan lesz, mint amikor a költségek hozzáadódnak az MM adózást figyelembe vevő modellben, azzal a kitétellel, hogy az áttételből származó *TD* nyereség tükrözné a személyi adók növekményét. A finanszírozási lehetetlenülés-, a csőd- és az ügynöki költség bármelyik vizsgált modell kapcsán a tőkestruktúra átváltási modelljét eredményezi. Az optimális tőkestruktúra olyan átváltási kapcsolatként mutatható be, amely szembeállítja egymással a kölcsöntőke-finanszírozás előnyeit annak költségeivel, így a költségek és előnyök „egymásra átválthatók".

Az „átváltási" modellek nem alkalmasak az optimális tőkestruktúra pontos meghatározására, azonban három ponton betekintést engednek a kölcsöntőke-alkalmazás sajátosságaiba.

Kockázatos eszközöket birtokló vállalatok a megtérülés nagyobb variabilitásával szembesülnek, s ezért, ha a kölcsöntőke-alkalmazás bármely szintjén nagyobb a finanszírozási lehetetlenülés valószínűsége, a nagyobb üzleti kockázatú vállalatok kevesebbet vesznek kölcsön, mint az alacsonyabb üzleti kockázatú cégek.

A speciális eszközök, a nem tapintható javak és a növekedési lehetőségek nagyobb értékvesztésnek vannak kitéve a finanszírozási lehetetlenülés állapotában, mint a tapintható eszközök, így az ilyen javakat birtokló vállalatok kevesebb kölcsönt kell hogy felvegyenek, mint a szabványos, tapintható eszközöket birtoklók.

A kölcsöntőke-finanszírozásból a nagyobb ráta mellett adózó vállalatok profitálnak a legtöbbet, s ezért több kölcsöntőkét alkalmazhatnak, mint az alacsonyabb ráta mellett adózók.

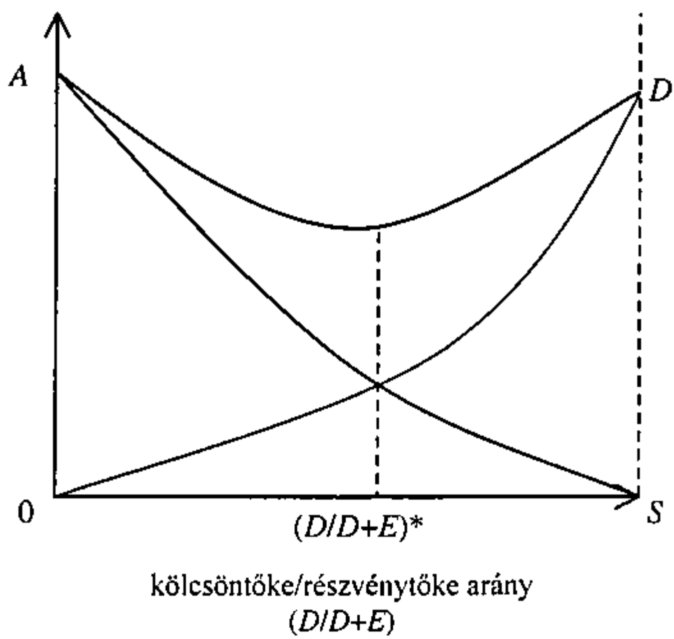
Az „átváltási" modellek logikai alapot szolgáltatnak a gondolkodáshoz, a „trade-off" bázisú teória empirikus alátámasztása nehézségekbe ütközik, nem kis mértékben a modellbe be nem építhető tényezők hatása miatt.

7.4.3. A tőkestruktúra ügynökelmélete

Mivel a külső részvénytőke ügynöki költséghez és a vállalat értékének csökkenéséhez vezet, így ésszerűen feltételezhető, hogy miért nem finanszíroznak több vállalatot főként kölcsöntőkéből. A válasz Jensen-Meckling szerint az, hogy ügynöki költség a kölcsöntőkéhez is kapcsolódik. A magas áttételű tőkestruktúra bátorítja a tulajdonos menedzsereket, hogy több alacsony kockázatú projektbe kezdjenek. A kölcsönadók elvben szerkeszthetnének a vezetői rendelkezési jogokat korlátozó szerződéseket, de azoknak rendkívül részleteseknek kellene lenni azért, hogy hatékonyan működjenek. Továbbá a csődhöz kapcsolódó folyamat (tartozáskifizetési arány és sorrend meghatározása) csökkenti a kölcsönadókat megillető kifizetést. Kölcsöntőkét azonban még mindig igénybe vesznek a vállalatok az előzőleg említett adóelőnyök miatt és azért, hogy elérjék az olyan beruházási projektek előnyeit, melyekben az így létrehozott vagyonnövekmény nagyobb, mint a kölcsöntőke költségnövekménye (ami kisebb, mint a részvénytőkéhez kapcsolódó költségnövekmény).

Jensen és Meckling meghatározza a vállalat optimális tőkestruktúráját a külső részvénytőkéhez és kölcsöntőkéhez kapcsolódó ügynöki költség elemzésével, amint a kölcsöntőke/részvénytőke arány változik. Az alábbi ábra egy adott méretű vállalatot mutat, ahol a vízszintes tengelyre mérjük fel a kölcsöntőke/részvénytőke arányt.

95. ábra Ügynöki költség a kölcsön/részvény arány függvényében



Az *AS* görbe a külső részvénytőke ügynöki költségét ábrázolja. Amint a külső részvénytőke aránya növekszik, a tulajdonos-menedzser ösztönzése a külső részvénytőke alkalmazására, s a részvénytőke ügynöki költsége egyaránt növekszik. Az *OB* görbe a kölcsöntőkéhez kapcsolódó ügynöki költséget mutatja: minél nagyobb a kölcsöntőke aránya, annál nagyobb az ösztönzés kockázatos projektek vállalására. Az *AB* görbe a külső részvénytőke és kölcsöntőke-finanszírozás ügynöki költségeinek összegét ábrázolja. Ezek minimuma a $D/(D+E)^*$ pontban van, amely a vállalat optimális tőkestruktúráját jelöli. Jensen és Meckling feltételezte, hogy egy adott méretű vállalat külső finanszírozásának növekedése emeli a finanszírozás ügynöki költségét (ezt mutatja a költséggörbék felfelé tolódása). Az ügynöki költség a vállalat méretével együtt is növekszik, a bonyolultabb megfigyelési funkció következtében. Az optimális tőkestruktúra ügynöki megközelítésének előnye, hogy figyelembe veszi a vállalat és finanszírozói közötti aszimmetrikus információkat, jóllehet miközben alternatív célokat vesz tekintetbe, az optimalizáló viselkedést még mindig feltételezi. Vannak a külső finanszírozáshoz kapcsolódó ügynöki költségek, melyek a kölcsöntőke/részvénytőke arány változásával módosulnak; az eredmény, optimális tőkestruktúra.

A tőkestruktúra *aszimmetrikus információ-elmélete* Gordon Donaldson nevéhez fűződik, s megerősítésül szolgál a Modigliani-Miller teória számára. Az elmélet kiindulópontja az, hogy a piaci résztvevők különböző csoportjai eltérően informáltak, s ennek következményei beépültek a vállalati finanszírozási politikába. Az aszimmetrikus információ elmélete kísérletet tesz a finanszírozási változatok közötti sorbarendezés (pecking order) magyarázatára. Információs aszimmetria gyakran keletkezik a menedzserek és befektetők között. Ha ilyen helyzet áll elő, akkor a vállalat csak olyan esetben bocsát ki új részvényt, ha a kintlevők túlértékeltnek mutatkoznak a piacon. Ha a részvény alulértékelt, akkor a vállalat kötvényt bocsát ki. Amikor ezt a befektetők felismerik, akkor elkezdik lefelé nyomni a vállalat részvényeinek árát, ha az kinyilvánítja szándékát új részvények kibocsátására, mivel meg van annak az esélye, hogy a bejelentés inkább rossz, mint jó hírekről szóló jelzést ad. Ha a menedzserek úgy érzik, hogy az új részvény eladása negatív jelzésként értékelődik, akkor tartalék kölcsönvételi kapacitás fenntartására kényszerülnek, így rendszeresen kibocsáthatnak kötvényeket kedvező feltételekkel, ha külső forrásra van szükségük. Habár az aszimmetrikus információ elmélete az összes vállalatra alkalmazható, a menedzseri döntésekre gyakorolt hatása azonban vállalatonként változik.

7.5. A CAPM alkalmazása a vállalati tőkeköltség becslésében

7.5.1. A piaci paraméterek becslése

A becslésre váró piaci paraméterek: a kockázatmentes ráta, a piaci várható megtérülés, s a piaci hozam varianciája. Ezek birtokában meghatározhatók az SML egyenes piac által meghatározott változói. Például feltételezzük, hogy a becsült kockázatmentes ráta 5%-os, a piaci megtérülés 10%-os, a piaci variancia 1%-os. Egyenlettel kifejezve a következőt kapjuk:

$$\overline{K}_j = R_F + \lambda COV(K_j K_M) \qquad \text{ahol} \quad \lambda = \frac{K_M - R_F}{VAR(K_M)} \tag{1}$$

$$\overline{K}_j = R_F + (K_M - R_F)\beta_j \tag{2}$$

Ha behelyettesítjük a piaci paraméter adatokat, akkor megkapjuk az (1a) és (2a) egyenletet.

$$\begin{aligned}\overline{K}_j &= 0.05 + \frac{(0.10-0.05)}{0.01} COV(K_j K_M) \\ &= 0.05 + 5 \cdot COV(K_j K_M)\end{aligned} \tag{1a}$$

$$\overline{K}_j = 0.05 + 0.05(\beta_j) \quad \text{ahol} \quad \beta_j = \frac{COV(K_j K_M)}{VAR(K_j K_M)} \tag{2a}$$

Ha tudjuk, hogy a vizsgált vállalat béta értéke 1.5, akkor a (2a) egyenletet alkalmazva a következőt kapjuk:

$$\overline{K}_j = 0.05 + 0.05(1.5) \qquad K_j = 0.05 + 5(0.015) \text{mivel}$$

$$COV(K_j K_M) = \beta \cdot VAR(K_M)$$

$$COV(K_j K_M) = 1.5(0.01) = 0.015$$

$$\overline{K}_j = 0.125$$

Így a vállalati részvénytőke költsége 12.5%-os lenne.

7.5.2. Az üzleti és finanszírozási kockázat mérése

A CAPM modell lehetővé teszi az üzleti és finanszírozási kockázati komponens elválasztását. Modigliani és Miller II. tétele eredeti parciális egyensúlyi alakjában kifejezhető adókkal, és adók nélkül.

Adók nélkül:

$$K_E^L = K_u + (K_u - K_B)\frac{D}{S}$$

Adókkal:

$$K_E^L = K_u + (K_u - K_B)\frac{D(1-T)}{S}$$

Hamada szerint, a CAPM gondolaton alapuló megfelelő formula így írható fel:

Adók nélkül:

$$\overline{K}_E^L = R_F + \lambda COV(K_u K_M)\left[1 + \frac{D}{S}\right]$$

Adókkal:

$$\overline{K}_E^L = R_F + \lambda COV(K_u K_M)\left[1 + \frac{D(1-T)}{S}\right]$$

Mindkettő esetében fennáll a következő:

$$K_E^U = \frac{E(R)\cdot(1-T)}{V_u} \qquad K_E^L = \frac{E(R)\cdot(1-T)}{V_L}$$

ahol

K_u = nem áttételes vállalat tőkeköltsége

K_E^L = áttételes vállalat tőkeköltsége

A CAPM formula olyan alakban is kifejezhető, amely a béta tényezőt kockázati mértékként alkalmazza.

$$\overline{K}_E^L = R_F + [K_M - R_F]\beta_u\left[1 + \frac{D(1-T)}{E}\right] \tag{3}$$

ahol β_u a nem áttételes vállalat bétája.

A beszorzás elvégzésével a következő kifejezés kapható:

$$\overline{K}_E^L = R_F + \left[\overline{K}_M - R_F\right]\beta_u + \left[\overline{K}_M - R_F\right]\beta_u \frac{D(1-T)}{S} \tag{3a}$$

A béta ezek alapján a következő komponensekre bontható:

$$\beta_j = \beta_u\left[1 + \frac{D(1-T)}{E}\right] \tag{4}$$

Így az üzleti és finanszírozási kockázat komponense egymástól elválasztható:

$$\beta_j = \beta_u + \beta_u\left[1 + \frac{D(1-T)}{E}\right] \tag{4a}$$

Ha a (4) egyenletet megoldjuk az üzleti kockázat tagra, akkor a következő relációt kapjuk:

$$\beta_u = \frac{\beta_j}{\left[1 + \frac{D(1-T)}{E}\right]} \tag{4b}$$

7.5.3. A megkövetelt megtérülési ráta meghatározása az SML egyenlet segítségével

A jövedelem-tőkésítési folyamatban az első lépés a megfelelő kapitalizációs ráta, vagy értékpapír diszkontráta meghatározása. *Ezt az arányt a megtérülés megkövetelt rátájaként definiáljuk; olyan minimális* *megtérülési rátaként tekintjük, amit a befektető feltétlenül el kell érjen az értékpapír megvételével és birtokban tartásával.* Adott j kockázatos értékpapírra vonatkozó $\overline{K}_j$ várható (megkövetelt) megtérülési ráta egyenlő, az R_F kockázatmentes ráta és a Δ_j kockázati prémium összegével.

$$\overline{K}_j = R_F + \Delta_j = R_F + \left(\overline{K}_M - R_F\right)\beta_j \qquad (1)$$

Az (1) egyenlet az SML egyenes, amely kapcsolatot mutat ki a kockázat és a várható megtérülési ráta között. Az SML alkalmazásának egyik előnye, hogy a kockázati komponensek azonosíthatók és könnyen hozzáférhető, publikált adatokból becsülhetők. A kockázati prémium két részre bontható: az egyik komponens a piac egészére, a másik az adott értékpapírra egyedileg vonatkozik. A piac egészére érvényes kockázati prémium olyan hozamtöbblet, amellyel az átfogó piaci indexen nyerhető megtérülés meghaladja a kormányzati kötvényeken nyerhető kockázatmentes megtérülést; ez utóbbi mentes a beruházási kockázattól. A piaci megtérülés $\overline{K}_M$ szimbólummal jelölhető, így a piaci kockázati prémium $\left(\overline{K}_M - R_F\right)$ lesz.

Kimutatható, hogy az értékpapír-piacok a befektetések kockázatának ama része után fizetnek prémiumot, amely nem tüntethető el diverzifikációval. A nem diverzifikálható kockázatot szisztematikusnak is nevezik, amely az egyedi értékpapír-megtérülés és a piaci portfolió megtérülés közötti kovarianciával mérhető. Egy értékpapír szisztematikus kockázata, ha a piaci megtérülés varianciájával normalizáljuk, akkor az értékpapír béta értékének nevezhető.

$$\beta_j = \frac{COV(K_j K_M)}{VAR(K_M)}$$

ahol

$\beta_j =$ j egyedi értékpapír kockázata

$COV(K_j K_M) =$ egyedi részvény-megtérülés piaci megtérüléssel alkotott kovarianciája

$VAR(K_M) =$ piaci megtérülés varianciája

E koncepció alkalmazásának illusztrálására vegyünk reális adatokat a paraméterek mindegyikére! A $\overline{K}_M$ piaci megtérülés 9% és 13% között változhat, a $VAR(K_M)$ piaci megtérülési variancia 1%, a kockázatmentes kamatráta (R_F) 5% és 7% között helyezkedhet el. Alkalmazva a piaci megtérülés várható értékét, valamint a kockázatmentes rátát, a következőt kapjuk:

$$\left(\overline{K}_M - R_F\right) = (0.11 - 0.06) = 0.05 = 5\%$$

A Δ_j kockázati prémium, a piaci kockázati prémium és a β_j egyedi értékpapír kockázat szorzata, a béta 1 fölött és alatt változhat. Mivel a β_j értéke 1.2, így a β_j kockázati prémium a j értékpapírra vonatkozóan a következő lesz:

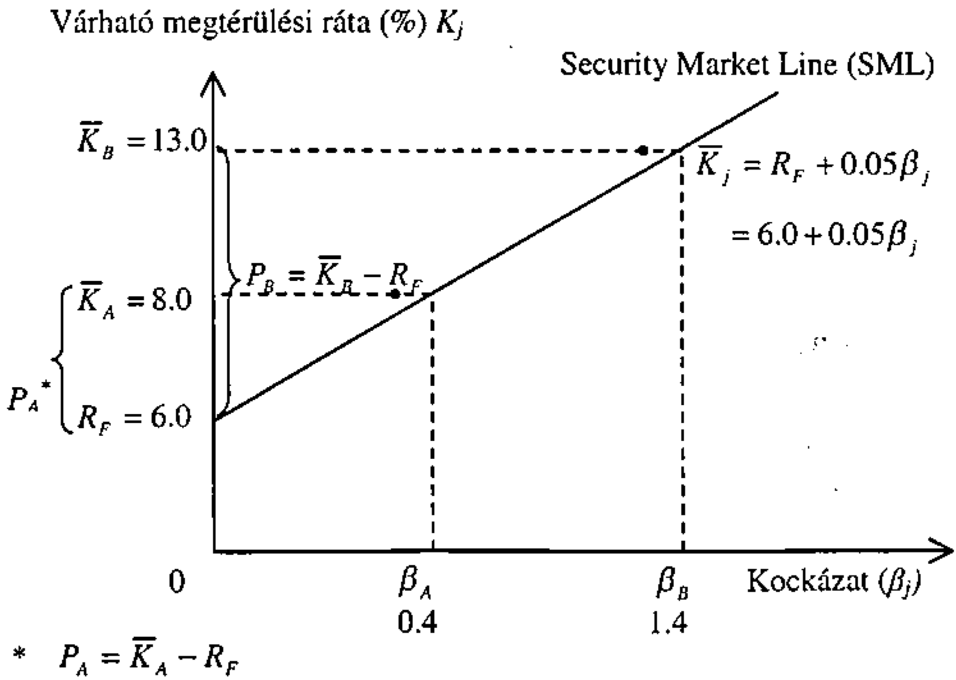
$$\beta_j = (\overline{K}_M - R_F)\beta_j = (0.11 - 0.06)1.2 = 0.06 = 6\%$$

Ez azt jelenti, hogy 6%-ot kellene hozzáadni az R_F kockázatmentes megtérüléshez, s a j egyedi értékpapírra 12%-os várható megtérülést nyernénk. Vegyük figyelembe, hogy a két mérték, az R_F kockázatmentes ráta és a $(\overline{K}_M - R_F)$ piaci kockázati prémium az egész gazdaságra vonatkozó paraméter; így azok felhasználhatók bármely értékpapír bétájával együtt a várható megtérülés meghatározására. Ez illusztrálható az SML egyenes használatával. A 96. ábra e relációt mutatja be.

A várható megtérülési ráta a függőleges tengelyen van, az értékpapír bétával mért kockázat pedig a vízszintes tengelyen. Mivel a kockázatmentes eszköznek – definíció szerint – nincs kockázata, így R_F a függőleges tengelyen fekszik. Amint a kockázat növekszik, a várható megtérülési ráta szintén emelkedik.

Az olyan, viszonylag alacsony kockázatú értékpapír, mint az A vállalaté, $\beta_A = 0.4$ értékű kockázati indexszel rendelkezik, a várható megtérülési ráta pedig, $\overline{K}_A = 8\%$. Egy kockázatosabb értékpapír, olyan mint a B vállalaté, $\beta_A = 1.4$ kockázati indexszel és $\overline{K}_B = 13\%$-os várható megtérülési rátával jellemezhető. Az illusztrált esetben az SML meredeksége 0.005, utalva arra, hogy a várható megtérülési ráta az értékpapír béta minden 0.2 értékű növekedése hatására 1%-kal emelkedik.

96. ábra Kapcsolat a kockázat és a várható megtérülési ráta között: SML egyenes



* $P_A = \overline{K}_A - R_F$

Ha ezt a két kockázati prémiumot hozzáadjuk az R_F kockázatmentes rátához, akkor a következő megtérülési rátákat kapjuk:

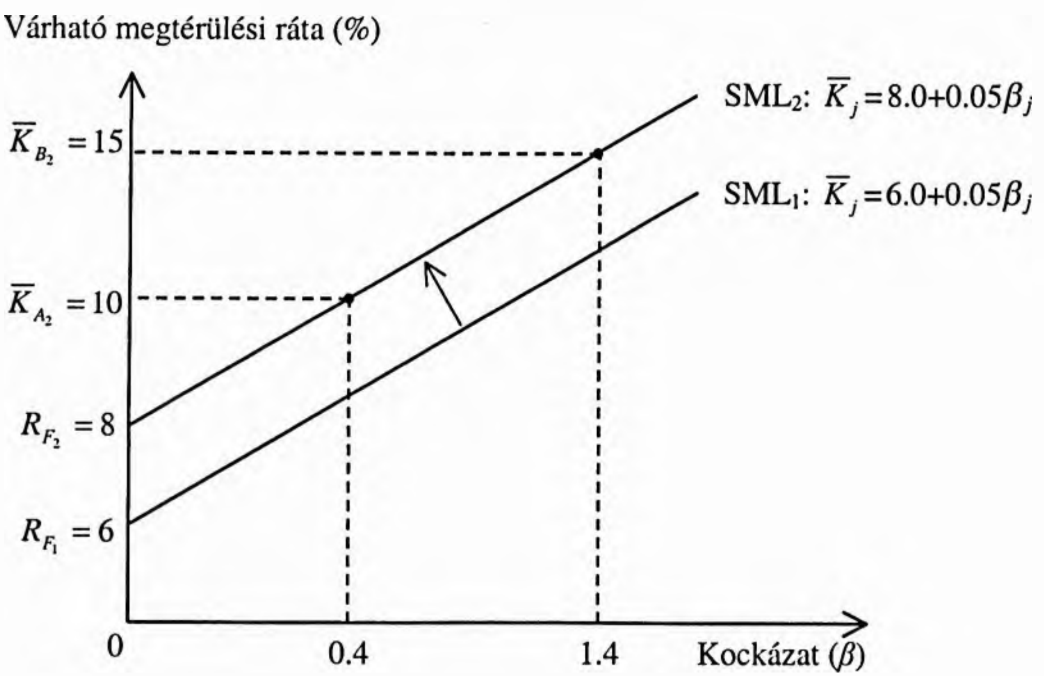
$$\overline{K}_A = 6\% + 2\% = 8\%$$
$$\overline{K}_B = 6\% + 7\% = 13\%$$

Az SML egyenes grafikonja alkalmas az egyes vállalatok értékpapírjainak analizálására is. Mivel egy vállalati kötvény várható megtérülésének kisebb a szórása, mint a közönséges részvényekének, így $\overline{K}_A$ lehetne egy vállalati kötvény várható megtérülési rátája, a $\overline{K}_B$ pedig utalhat közönséges részvényre. A vállalat preferenciális részvényei és átváltható kötvényei az SML egyenesen $\overline{K}_A$ és $\overline{K}_B$ között helyezkedhetnek el.

7.5.3.1. Az SML elmozdulása: változó kamatlábak

A kamatlábak idővel akár jelentősen is változhatnak, s ha ez megtörténik, akkor az SML egyenes is várhatóan elmozdul. A következő ábra a kockázatmentes kamatráta 6%-ról 8%-ra emelkedését, s ezzel együtt az inflációs ráta emelkedésének hatását illusztrálja.

97. ábra Az emelkedő kamatlábak hatása a várható megtérülési rátára



Ha azt feltételezzük, hogy ha az R_F 2 százalékpontos növekedésének hatására a $\overline{K}_M$ szintén 2 százalékpontos emelkedést mutat, az SML meredeksége állandó marad, a metszéspont viszont emelkedik.

$$\text{Eredeti SML egyenlet: } \overline{K}_j = 6.0\% + 0.05\beta_j$$

$$\text{Módosított SML egyenlet: } \overline{K}_j = 8.0\% + 0.05\beta_j$$

Mindez emelkedést okoz *A* és *B* vállalat megtérülési rátájában, $\overline{K}_A$ 8%-ról 10%-ra, $\overline{K}_B$ 13%-ról 15%-ra emelkedik.

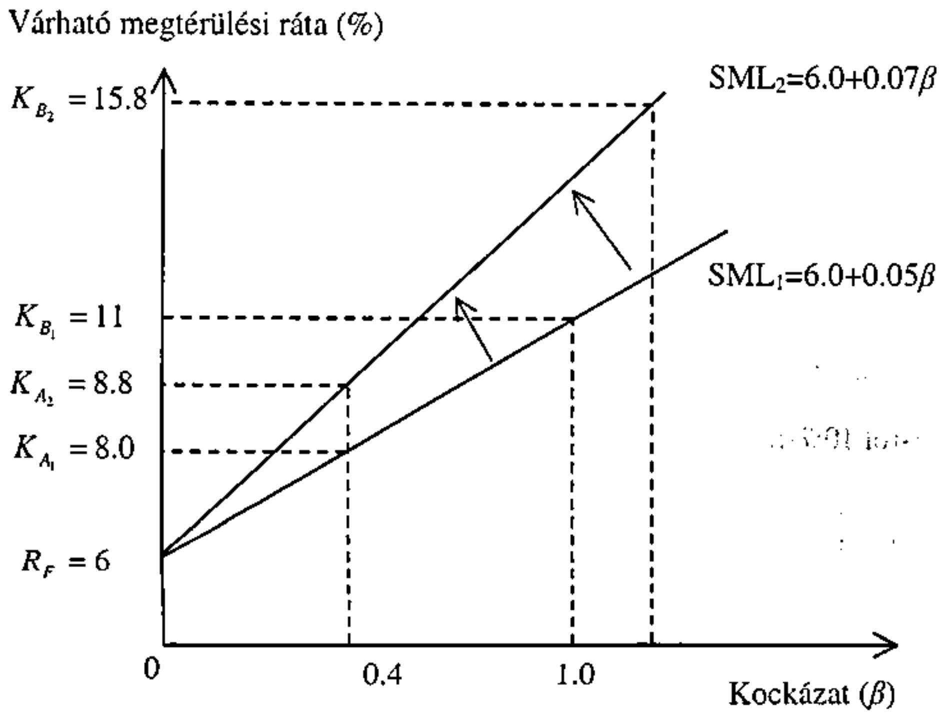
7.5.3.2. Elmozdulás az SML egyenesben: befektetői lélektan

Az SML egyenes meredeksége függ a befektető kockázati attitűdjétől. Ha a befektetők borúlátóak, akkor nagyon kerülik a kockázatot, s ilyen esetben az SML egyenes viszonylag nagy meredekségű. Ellenkezőleg, ha a befektetők egészében optimisták és a kilátásokat ragyogónak ítélik, akkor az SML meredeksége nem annyira nagy. Ha a befektetők attitűdje változik, akkor az SML egyenes elmozdul. Az alábbi ábra a pesszimizmus illetve a kockázati tartózkodás növekedése miatti attitűdváltozást illusztrál. Az SML meredeksége 0.05 értékről 0.07-re nő.

$$\text{Eredeti SML egyenlet: } \overline{K}_j = 6.0\% + 0.05\beta_j$$

$$\text{Módosított SML egyenlet: } \overline{K}_j = 6.0\% + 0.07\beta_j$$

98. ábra Befektetői attitűdváltozás hatása a várható megtérülési rátára



Mindez emelkedést eredményez A és B várható megtérülési rátájában, a $\overline{K}_A$ 8%-ról 8.8%-ra, $\overline{K}_B$ 13%-ról 15.8%-ra emelkedik. Minthogy az SML egyenes átfogó piaci relációt ad, így az értékpapír „várható" megtérülése „megkövetelt" érték lesz a piaci egyensúlyi relációra vonatkozóan.

8. A CAPM MODELL ÉS A PORTFOLIÓ-ELV ALKALMAZÁSA A TŐKEBERUHÁZÁSI DÖNTÉSEKBEN

A CAPM modellel olyan megkövetelt megtérülés állítható elő, amely a piac remélt megtérülésén, a várható projekt-megtérülésen, a kockázatmentes kamatrátán valamint a projekt-megtérülés és a piaci hozam arányának variabilitásán alapul. Fő előnye abban áll, hogy a beruházások értékeléséhez olyan diszkontrátát állít elő, amely az egyedi beruházás szisztematikus kockázatán alapul. Felhasználható minden egyes kockázati osztály projektjének összehasonlítására, emiatt magasabb rendűnek nevezhető az NPV módszerhez viszonyítva, mivel az minden projekthez ugyanolyan diszkontrátát alkalmaz, függetlenül azok kockázatosságától.

A modellt értékpapírokra fejlesztették ki. Amennyiben a modellt dologi tőkeberuházásra alkalmazzák, akkor a részvénytulajdonosok a befektetést úgy tekintik, mintha az is tőkepiacon megjelenő értékpapír lenne, s így azt is feltételezni kell, hogy mindegyik részvénytulajdonos diverzifikált portfoliót birtokol, s nem a vállalatra tekintenek úgy, hogy az biztosítson diverzifikációt.

A CAPM modell tőkeberuházási döntésekben történő alkalmazásával kapcsolatban a legnagyobb gyakorlati nehézséget a következők okozzák:

Nagyon nehéz a különböző projektek megtérülésének becslése különböző gazdasági környezetben, a piaci megtérülés előrejelzése eltérő üzleti közegben, valamint a különböző körülmények valószínűségének becslése.

A CAPM valójában egyperiódusú modell. Néhány beruházási projekt egy év alatt befejeződik, s ha a modellel becsült megtérülést egynél több periódusból álló időszakra alkalmazzuk, akkor ez egyaránt igényelné a projekt-teljesítmény hasonlítását a piachoz, s a gazdasági környezet elfogadható stabilitását. Elméletileg elképzelhető a CAPM alkalmazása minden egyes időperiódusra, diszkontráták egymást követő sorozatával, ami azonban fokozná a becslési problémát.

Esetenként nehéz lehet a kockázatmentes megtérülési ráta meghatározása is. A kormányzati értékpapírok rendszerint kockázatmentesnek tekinthetők, noha ezek megtérülési aránya is változhat a lejárati időnek megfelelően.

8.1. A portfolió-elv alkalmazása a beruházási projektek kockázati analízisében

8.1.1. A Hillier modell számítási eljárása

A tőke-költségvetéshez kapcsolódó kockázati analízisnek két útja lehetséges. Az egyik a CAPM-orientált megközelítés, amely a projekt bétákra épül, s csupán a fokozottan diverzifikált részvény-tulajdonosokra érvényes. A másik eljárás a vállalati kockázati analízis, amelyben az egyes projektek kockázatára úgy tekintünk, mint egy befektetéseit nem diverzifikáló részvényes, vagy a vállalati vezetés, amelynek fokozott érdeke fűződik a vállalati túléléshez. Az itt bemutatott modell jelentősége abban áll, hogy betekintést enged a kockázat alapvető determinánsaiba.[91]

Feltételezzük, hogy a beruházási projekt megtérülési értékei nem ismertek teljes bizonyossággal, viszont becsülhető az egyes évekre vonatkozó megtérülés diszkrét valószínűségi eloszlása. A kiválasztott *t*. évben – feltételezésünk szerint – három lehetséges megtérülési érték, R_{t1}, R_{t2}, R_{t3} adódhat, p_{t1}, p_{t2}, p_{t3} bekövetkezési valószínűséggel. Az $\overline{R}_t$ várható megtérülés a bekövetkezési valószínűségek súlyozásával a következő alakban fejezhető ki:

$$\overline{R}_t = p_{t1}R_{t1} + p_{t2}R_{t2} + p_{t3}R_{t3}$$

Ha ugyanez vonatkozik a projekt n évig tartó jövőbeli hozamára, és $\overline{R}_0$ kezdeti tőkekiadásra, akkor az *E(NPV)* várható nettó jelenérték így írható fel:

$$E(NPV) = \sum_{t=0}^{n} \overline{R}_t (1+r)^{-t} \tag{1}$$

ahol $\overline{R}_0$ a kezdeti tőkekiadás várható értéke, az *r* a megfelelő diszkontráta.

[91] Hillier, F.S.: The Derivation of Probabilistic Information for the Evaluation of Risky Investments. Management Science, April 1963.

Ugyancsak szükséges ismerni az *NPV* várható érték körüli szóródásának mértékét. Az *NPV* szórása a

$$\sigma_{NPV} = \sqrt{\sum p_i \left[NPV_i - E(NPV)\right]^2} \tag{2}$$

alakban számítható.

A nettó jelenérték varianciája az *NPV* átlagos négyzetes eltérése saját várható értéke körül, azaz a szórás négyzete.

Függő kapcsolat az egyes évek megtérülési értéke között

Az R_0, R_1, $R_2 \ldots R_{N-1}$, R_N megtérülési sorral jellemezhető projekt *E*(*NPV*) várható jelenlegi értéke

$$E(NPV) = \sum_{t=0}^{n} \overline{R}_t (1+r)^{-t} \tag{3}$$

alakban adható meg. Eszerint a projekt mint egész, várható nettó jelenlegi értéke, az egyes évek várható megtérülési értékéből képzett sor jelenlegi értéke. Például a 2 éves projekt esetében az *E*(*NPV*) várható nettó jelenérték így határozható meg:

$$E(NPV) = \overline{R}_0 + \frac{\overline{R}_1}{1+r} + \frac{\overline{R}_2}{(1+r)^2} \tag{4}$$

A nettó jelenérték varianciájára úgy kaphatunk számítási formulát, hogy először vesszük az egyedi megtérülés varianciáját, azután a megtérülés jelenlegi értékének varianciáját, majd a megtérülési értékek nem diszkontált összegének varianciáját, azaz magának az *NPV* értéknek a varianciáját. A t –edik évi megtérülés varianciája így írható fel:

$$\sigma_t^2 = E\left[R_t - \overline{R}_t\right]^2 \tag{5}$$

ami a várható értéktől való négyzetes eltérést jelöli.

A megtérülési értékek diszkrét eloszlása esetében a variancia úgy kapható meg, hogy felmerülésük valószínűségével együtt vesszük az összes négyzetes eltérést és összegezzük. A t. évi megtérülés jelenlegi értékének varianciája így alakul:

$$E\left[\frac{R_t - \overline{R}_t}{(1+r)^t}\right] = \left[\frac{1}{(1+r)^t}\right]^2 E\left[R_t - \overline{R}_t\right]^2 = \frac{\sigma_t^2}{(1+r)^{2t}} \tag{6}$$

Így a t. évi megtérülés jelenlegi értékének varianciája a diszkontált megtérülés varianciájával azonos, ha az (1+r) kitevőjeként a t kétszeresét veszszük. A hozamok nem diszkontált összegének varianciája, az egyedi varianciák és a kovarianciák összege, az alábbiak szerint:

$$VAR\left(\sum_{t=0}^{n} R_t\right) = \sum_{t=0}^{n} \sigma_t^2 + \sum_{\substack{s=0 \\ s \neq t}}^{n} \sum_{t=0}^{n} COV(R_s R_t) \tag{7}$$

A két utóbbi egyenlet egybevetése alapján kifejezhető az NPV varianciájának értéke a következő alakban:

$$\sigma_{NPV}^2 = VAR\left(\sum_{t=0}^{n} \frac{R_t}{(1+r)^t}\right) = \sum_{t=0}^{n} \frac{\sigma_t^2}{(1+r)^{2t}} + \sum_{s=0}^{n} \sum_{t=0}^{n} \frac{COV(R_s R_t)}{(1+r)^{s+t}} \qquad (8)$$

$$s \neq t$$

A (8) kifejezésből két speciális változat vezethető le, az egymástól független és az egymással tökéletesen korreláló megtérülési értékek esete. Az egyszerűség érdekében $n=2$ feltételezésével mutatjuk be a két összefüggést.

Az első esetben az egyes évek megtérülési értékének eloszlása egymástól független. Ilyenkor a kovariancia-tagok nulla értékűek, az *NPV* varianciája eszerint így egyszerűsödik:

$$\sigma_{NPV}^2 = \sum \frac{\sigma_t^2}{(1+r)^{2t}} \qquad (9)$$

ami a két évig működő projekt esetében a következő relációt adja:

$$\sigma_{NPV}^2 = \sigma_0^2 + \frac{\sigma_1^2}{(1+r)^2} + \frac{\sigma_2^2}{(1+r)^4}$$

A másik speciális esetben az egyes évek megtérülési értékei tökéletesen korrelálnak. A $\rho_{st} = COV(R_s R_t)/\sigma_s \cdot \sigma_t$ alakban felírható korrelációs koefficiens tökéletes együttmozgás esetén +1 vagy –1 értéket vehet fel. A $\rho_{st} = +1$ érték tökéletes pozitív korrelációt mutat, ahol a megtérülési értékek egymással pontosan együtt mozognak. Ha $\rho_{st} = +1$, akkor a $COV(R_s R_t) = \sigma_s \cdot \sigma_t$ reláció érvényesül, s ekkor a (8) kifejezés a következők szerint írható át:

$$\sigma_{NPV}^2 = \left[\sum_{t=0}^{n} \frac{\sigma_t}{(1+r)^t}\right]^2 \tag{10}$$

ami az $n = 2$ esetben a következő formulát adja:

$$\sigma_{NPV}^2 = \left[\sigma_0 + \frac{\sigma_1}{(1+r)} + \frac{\sigma_2}{(1+r)^2}\right]^2$$

A portfolió-elv a megtérülési értékek imént bemutatott időbeli korrelációjának alkalmazása mellett, felhasználható a projekt portfoliók kockázatának vizsgálatára is. Ilyen esetben a projektek megtérülési értékeinek függetlensége vagy különböző mértékű korrelációja alkalmas a portfolió diverzifikáció hatásának kimutatására.

A modell alkalmazása

I. eset: Független pénzáramok

Egy nagy autógyár új üzem beruházási javaslatát vizsgálja. Mivel az új kapacitással gyártott termék nagy fogyasztói érdeklődésre tart számot, így a döntéshozók joggal feltételezhetik, hogy a beruházásból származó többlet-pénzáram független lesz és normális eloszlású véletlen változóként viselkedik. Az üzem várhatóan 101 millió 500 ezer dollárba kerül, a nettó pénzáram pedig 6 éven keresztül jelentkezik növekményként. A pénzáram tételek várható értéke 30 millió dollár, 25 millió dolláros varianciával. Ha a vállalati tőkeköltség 10%-os, mekkora lesz a beruházás nettó jelenértékének várható értéke és varianciája?

A (2) egyenlet alapján felírható a következő kifejezés (adatok millió dollárban):

$$E(NPV) = -1015 + \frac{30}{(1+0.1)} + \frac{30}{(1+0.1)^2} + \frac{30}{(1+0.1)^3} + \frac{30}{(1+0.1)^4} + \frac{30}{(1+0.1)^5} + \frac{30}{(1+0.1)^6}$$

$$= 29.15 \text{ milló dollár}$$

Ugyanígy a (3) egyenlet alkalmazásával a következőt kapjuk (adatok millió dollárban):

$$\sigma_{NPV}^2 = 0 + \frac{25}{(1+0.1)^2} + \frac{25}{(1+0.1)^4} + \frac{25}{(1+0.1)^6} + \frac{25}{(1+0.1)^8} + \frac{25}{(1+0.1)^{10}} + \frac{25}{(1+0.1)^{12}}$$

$$= \frac{25}{1.21} + \frac{25}{1.46} + \frac{25}{1.77} + \frac{25}{2.14} + \frac{25}{2.59} + \frac{25}{3.13}$$

$$= 81.21 \text{ millió dollár}$$

II. eset: Tökéletesen pozitívan korreláló nettó pénzáramok

Feltételezzük, hogy az autógyár által előállított motorok egy új, környezetkímélő járműbe épülnek be. Mivel ez az autó drága, és tesztelés nélkül kerül forgalomba, így megalapozottan feltételezhető, hogy többlet nettó pénzárama tökéletesen pozitívan korrelál, mind a várható értéket, mind a varianciát illetően. Mekkora lesz a beruházás nettó jelenértékének várható értéke és varianciája?

A nettó jelenérték várható értéke ugyanakkora lesz, mint az 1. esetben:

$$E(NPV) = 29.15 \text{ millió dollár}$$

Ellenben a variancia különbözni fog, mivel tudjuk, hogy tökéletesen pozitív korreláció esetében a $COV\left(X_i X_j\right) = \sigma_{xi} \cdot \sigma_{xj}$ reláció érvényesül, azaz bármely két pénzáram kovarianciája megegyezik szórásuk szorzatával. Így a (7) egyenlet alapján felírható a következő:

$$\sigma_{NPV} = \left[\frac{5}{(1+0.10)} + \frac{5}{(1+0.10)^2} + \frac{5}{(1+0.10)^3} + \frac{5}{(1+0.10)^4} + \frac{5}{(1+0.10)^5} + \frac{5}{(1+0.10)^6}\right]^2$$

$$= 474 \text{ millió dollár}$$

A 2. esetben a nettó pénzáram magasabb varianciája egyértelműen konzisztens az új termék bevezetésével együtt járó magasabb kockázattal.

III. eset: Együtt a független és korreláló pénzáramok

Feltételezzük, hogy az új üzemben előállított motorok a szériagyártásban és a környezetkímélő autók előállításában egyaránt hasznosulnak. Azt tervezik, hogy az első hasznosításban a pénzáram normális eloszlású lesz, 15 millió dolláros várható értékkel és 9 millió dolláros varianciával. A másik felhasználási módnál a pénzáram ugyancsak normális eloszlású, 15 millió dolláros várható értékkel és 16 millió dolláros varianciával. Úgy, mint az 1. és 2. esetben az első hasznosításnál a pénzáramok függetlenek, a másodiknál tökéletesen pozitívan korrelálnak. Meg kell keresnünk a tervezett beruházás várható értékét és varianciáját.

A 3. esetben a nettó jelenérték várható értéke megegyezik az első két eset vonatkozó értékével. A variancia a (9) egyenlet segítségével származtatható:

$$\sigma_{NPV}^2 = \frac{9}{(1+0.1)^2} + \frac{9}{(1+0.1)^4} + \frac{9}{(1+0.1)^6} + \frac{9}{(1+0.1)^8} + \frac{9}{(1+0.1)^{10}} + \frac{9}{(1+0.1)^{12}} +$$

$$+ \left[\frac{4}{(1+0.10)} + \frac{4}{(1+0.10)^2} + \frac{4}{(1+0.10)^3} + \frac{4}{(1+0.10)^4} + \frac{4}{(1+0.10)^5} + \frac{4}{(1+0.10)^6} + \right]^2$$

$$= 332.69 \text{ millió dollár}$$

8.2. A CAPM modell alkalmazása a tőke-költségvetési számításban

8.2.1. A kockázattal korrigált diszkontráta szerepe

Mint már korábban bemutattuk, a CAPM modell a hatékony piacokon forgalmazott összes eszköz releváns kockázata és megtérülése között mutat ki kapcsolatot. A CAPM modellben az eszköz teljes kockázata, a szisztematikus és a diverzifikálható kockázat összegeként definiálható. A hatékony piacokon forgalmazott eszközök esetében a szabályozatlan vagy véletlen eseményeknek kitett, ún. nem szisztematikus kockázat diverzifikációval eltüntethető. Így a releváns kockázat a nem diverzifikálható rész lesz, amit eme eszközök tulajdonosai számára kompenzálni kell.

Az értékpapírok nem diverzifikálható kockázatát a β tényezővel mérik. Valamely j eszköz releváns kockázatának mérése a β_j segítségével, a CAPM modell alkalmazásával a $\overline{K}_j = R_F + [\ \beta_j \cdot (\overline{K}_M - R_F)\ ]$ formulával történik. Azok az értékpapírok, amelyek várhatóan többet hoznak saját megkövetelt megtérülésüknél, *elfogadhatók*, amelyek viszont annál kevesebbet, *elutasítandók*.

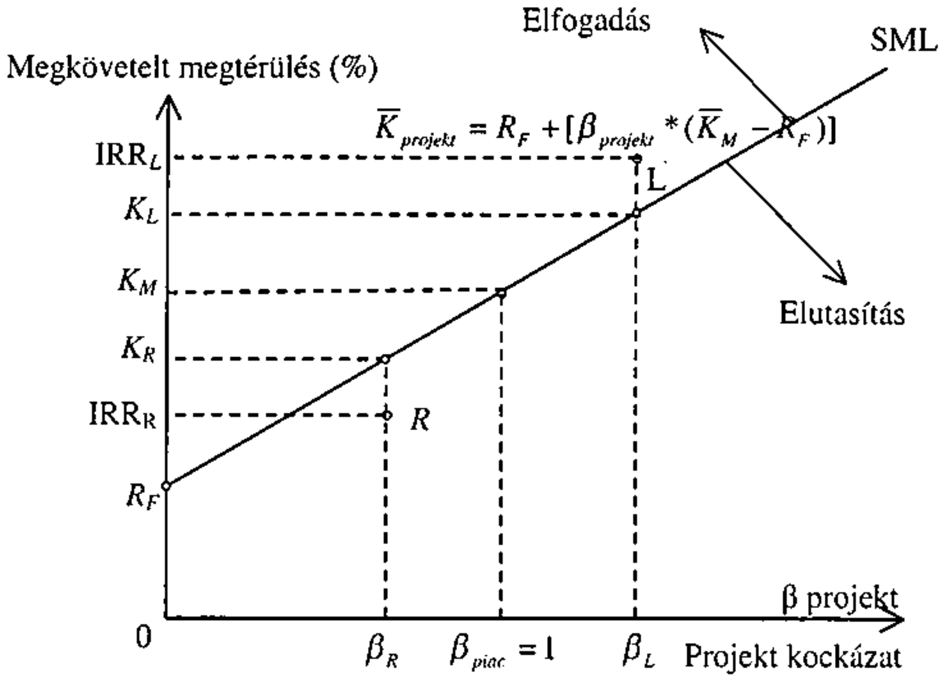
Ha azt feltételezzük, hogy a kisebb befektetést igénylő reáleszközöket hatékony piacokon forgalmazzák, akkor a CAPM modell az alábbi formában újrafogalmazható:

$$\overline{K}_{\text{projekt}} = R_F + [\ \beta_{\text{projekt}} \cdot (\overline{K}_M - R_F)\ ]$$

Az egyenlet a CAPM modell SML egyenes változata, amit az alábbi ábrán vizsgálhatunk.

Amint az ábráról leolvasható, bármely projekt, amelynek *IRR* értéke az SML egyenes fölött van, elfogadható, mivel az IRR érték meghaladja a $K_{projekt}$ megkövetelt megtérülési rátát. Ugyanúgy a $K_{projekt}$ alatti *IRR* értékű projekteket el kell utasítani. Az NPV értékek alapján hozott döntés esetén az SML egyenes fölött elhelyezkedő projektek pozitív NPV értékűek, így elfogadhatók, az SML alattiak NPV értéke negatív, így azok elutasítandók.

99. ábra *CAPM és SML*



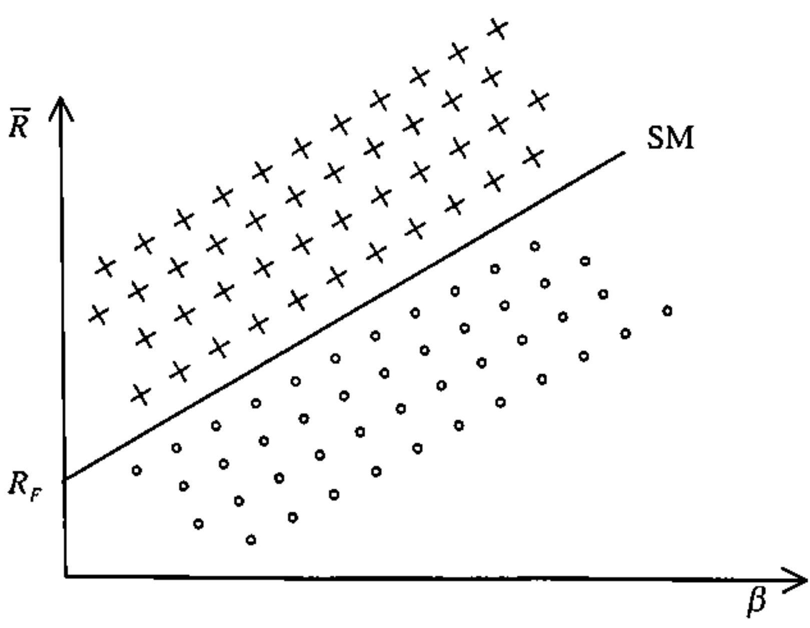
Az ábrán két projektet mutatunk be. Az egyik a β_L béta tényezővel és IRR_L belső megtérülési rátával jellemezhető L projekt, amelynek K_L a megkövetelt megtérülési értéke. Mivel az L projekt a megköveteltnél nagyobb megtérülést realizál ($IRR > K_L$), így az elfogadható. Az L változatnak egyébként az NPV értéke is pozitív, ha pénzbeáramlását a K_L megkövetelt megtérülési rátával diszkontáljuk. Másik oldalról, az R projekt a megkövetelt megtérülés (β_R kockázat által meghatározott) szintje alatti IRR értéket realizál ($IRR < K_R$). Ez a projekt negatív NPV értékkel jellemezhető, ha pénzbeáramlását K_R megkövetelt megtérülési rátával diszkontáljuk, így az R projektet el kell utasítani.

8.2.2. Az egyensúlytalanság értelmezése

Ha a CAPM modellt beruházási projektek értékelésére használják, akkor a projekt paraméter behelyettesítésének fontos implikációi vannak. Nehézséget okoz a projekt béta becslése, hiszen az üzleti forgalomba nem kerülő eszközök értéke közvetlenül nem figyelhető meg, így a béta nem becsülhető azon a módon, ahogyan a nyilvánosan forgalmazott részvények esetében. E probléma megoldást igényel.

Ha a CAPM modellt a tőke-költségvetési számításban alkalmazzuk, akkor az a projekt-elfogadás kritériuma, hogy a realizált megtérülés haladja meg az SML egyenlettel megadott $K_{projekt}$ megkövetelt megtérülést. E folyamatot grafikusan az alábbi ábra mutatja.

100. ábra Megkövetelt megtérülés és szisztematikus kockázat



Az ábrán látható SML egyenes a piac által meghatározott kapcsolat a szisztematikus kockázat és a megkövetelt megtérülési ráta között. Mindama projekteket, amelyek várható belső megtérülési rátája az egyenesen fekszik, vagy a fölött, el kell fogadni, hiszen e változatok többletmegtérülést biztosítanak. Az ábrán az elfogadható projekteket keresztek jelölik. Az SML egyenes fölött elhelyezkedő projektek mindegyike emeli a részvények árát. Ezek magasabb kockázattal korrigált megtérülést ígérnek a piachoz viszonyítva, s elméletileg a befektetők fel kell hogy verjék a vállalati részvénytőke árát, összhangban az új projekt által ígért pótlólagos nettó jelenértékkel. Ilyen összefüggésben a vállalat célja olyan beruházási lehetőségek kiválasztása, amelyek az ábra egyenese fölött vannak. A finanszírozási piacok olyan értékpapír portfoliókat kínálnak, amelyek éppen rajta vannak az SML egyenesen.

Az elmondottak alapján a vállalat bensőleg generált beruházási javaslatai csak akkor fogadhatók el, ha azok a vonal fölött helyezkednek el. Ha a tőkejavak piacai tökéletesek volnának, akkor ilyen lehetőséget nem is lehetne találni. A beruházási lehetőségek vagy a vonalon lennének, vagy alatta, így a vállalat maximálisan akkora hozamot remélhetne, amely megfelel a kockázattal összhangban álló, megkövetelt megtérülési rátának. A tökéletes tőkejószág- és finanszírozási piac biztosítaná a vállalat számára, hogy többlet-megtérülést realizáljon részvénytulajdonosainak. Más szavakkal: a vállalat nem remélhet többet nyerni adott projekten, mint a piac által elvárt megtérülés, aminek alapja a projektben foglalt szisztematikus kockázat.

Természetesnek kell tekintenünk, hogy a tőkejavak piacai nem tökéletesek, így lehetséges olyan projekteket találni, melyek várható megtérülésük alapján az SML egyenes fölött vannak. A tőkejuttatók által megkövetelt megtérülés ama többletét, amely a kockázattal korrigált haszonáldozati ráta fölött van, *elméleti hozamnak* nevezzük. Ez a vállalatok közötti verseny hatására a nulla felé közelít. A CAPM modell kontextusában ez egyenértékű azzal, hogy a várható/megkövetelt megtérülésnek az SML egyenes irányába kell mozogni. Ahhoz, hogy egy vállalat állandóan sikeres legyen, ilyen beruházási projekteket szükséges azonosítania, végrehajtania és működtetnie. Honnan származhatnak ezek a lehetőségek?

A részvénytulajdonos által birtokolható értéknek különböző forrásai lehetnek, melyek közül a legfontosabbak az üzleti jellemzők és a kompetitív előny. Ezek egyébként a pozitív nettó jelenérték lényeges forrásai is. Az *üzleti jellemzőkből* fakadó értékforrások közé sorolják az életgörbén elfoglalt növekedési szakaszt, a belépési korlátokat és más védőeszközöket, a birtokolt szabadalmakat, az időleges monopolpozíciót, s az oligopolisztikus árképzést. A kompetitív előny a vállalat saját ágazatán belüli, relatív pozícióját mutatja. Ennek számos forrása lehet, mégis kiemelkedik a költséghatékonyság és a termék-differenciáció. A kompetitív előny a versennyel nyilvánvalóan erodálódik, hiszen mind a relatív költség, mind a termékelőny ki lesz téve a versenytársak támadásának.

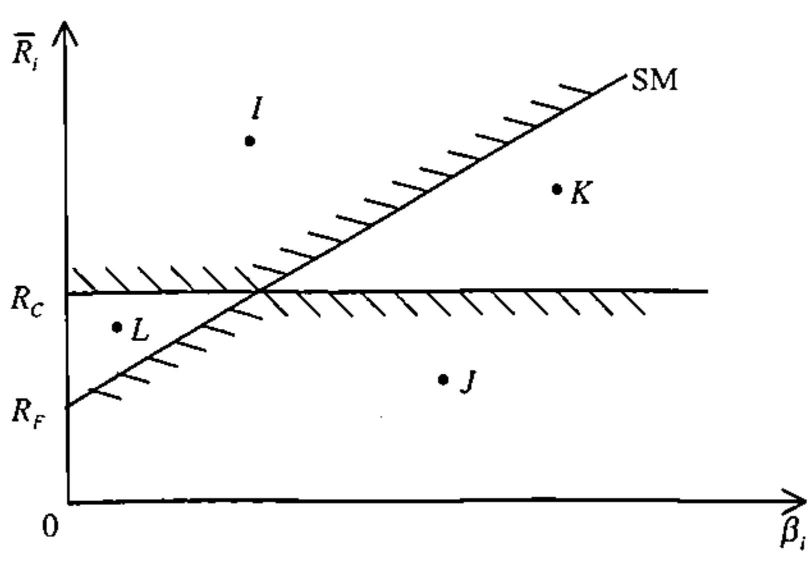
Az üzleti attraktivitás és a kompetitív előny az érték-keletkeztetés legeredetibb forrása. Ezek minél kedvezőbbek, annál nagyobb annak a valószínűsége, hogy a vállalat nagyobb megtérülést realizál annál, mint amekkorát a finanszírozási piacok adott, benne foglalt kockázat mellett megkövetelnek. A CAPM modell egyik legfontosabb jellemzője kockázatos beruházások értékelésekor az, hogy adott projekt megkövetelt megtérülési rátája *független* az azt megvalósító vállalat jellemzőitől. Ha adott a projekt szisztematikus kockázata, akkor a piac *egyetlen* megtérülési értéket vár el. Ennek alapján a projekt megkövetelt megtérülési rátája szükségképpen ugyanolyan kell legyen, függetlenül a projektet megvalósító vállalattól. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy adott projekt szisztematikus kockázata mindegyik vállalat esetében ugyanolyan kell legyen. Ez azért van, mert a projekt megkövetelt megtérülése ugyanolyan lesz, bármelyik vállalat is valósítja meg azt. Ugyanakkor világossá kell tenni, hogy ez nem jelenti a projekt minden vállalat számára azonos értékességét. Bizonyos vállalatok nagyobb növekmény-pénzáramot képesek származtatni belőle, mint más cégek. A menedzseri tudásban, a működési hatékonyságban meglevő különbségek, a szinergia-hatások, a marketing-tudás mind befolyásolja a vállalatonként nyerhető hozamot, azonos projektportfoliók alapul vételével. Ez azt is jelenti, hogy az elfogadási kritérium szükségképpen ugyanolyan kell legyen az összes vállalatra és divízióra, valamint projektre vonatkozóan.

A CAPM megközelítés azon a kikötésen alapul, hogy a befektetők – miközben részvény-portfoliót képeznek – a szisztematikus kockázat kivételével az összes kockázatot diverzifikációval eltüntethetik. Ebből következően a vállalat által – saját eszköz-portfoliójában - végrehajtott egyszerű diverzifikáció a részvényesek számára nem tekinthető értékforrásnak. A CAPM modell implikációi szerint, a vállalat azáltal nem képes értéket kreálni, hogy befektetői érdekében cselekszik, hiszen saját helyzetüket éppen ők javíthatják portfoliójuk diverzifikálásával. A CAPM modell azt mondja, hogy a beruházási projekteket kizárólag saját szisztematikus kockázatuk bázisán kell értékelni, s nem azok teljes kockázatának figyelembevételével, továbbá nem annak növekményi teljes kockázata bázisán, amivel hozzájárulnak a vállalat teljes kockázatához. Mindebből arra a következtetésre juthatunk, hogy az érték a magasabb növekményi pénzáramból származik, s nem az alacsonyabb diszkonttényezőből, ha minden egyéb tényezőt változatlannak tekintünk.

8.2.3. Az értékelési konfliktus

Az alábbi ábrán összehasonlítjuk a tőkeköltség-megközelítést az SML bázisú eljárással a beruházási projektek értékelésében.

101. ábra *Súlyozott átlagköltség versus SML egyenes*



Az ábrán az R_c érték mutatja a tőkeköltséget, amely az elfogadhatóság minimális feltétele a beruházási projektek értékelésében. Az SML egyenest alkalmazva minimális megtérülési rátaként, az alatta levő projekteket el kell utasítani, a fölötte levőket el kell fogadni. A sávozott rész ama kockázat-megtérülés kombinációk sorozata, amelynek projektjeit a két módszer azonosan ítéli meg. Így mindkét módszer szerint elfogadható az *I* és elutasítandó a *J* projekt. Eszerint a sávozott részek az azonos sorolás régiói. Ha a két közelítést szigorúan alkalmazzuk, akkor eltérő értékelés adódik a *K* és *L* változatra. A tőkeköltség módszer alapján elutasítanánk az *L* projektet, mivel az elégtelen megtérülést ígér. A CAPM modell alapján viszont ugyanezt a változatot viszont elfogadnánk, mivel ez a viszonylag alacsony megtérülés is képes a mérsékelt szisztematikus kockázat ellensúlyozására. Ezzel szemben a tőkeköltség módszer alapján elfogadnánk a *K* változatot, amit a CAPM módszer alapján utasítanánk el amiatt, mert a megtérülés nem elegendő a magas szisztematikus kockázat kompenzálására.

Mielőtt elemeznénk az értékelési konfliktust, ne hagyjuk figyelmen kívül azt, hogy a sávozott részek terjedelmesebbek a nem sávozottakhoz viszonyítva. Továbbá az is figyelemre méltó, hogy minél közelebb van egymáshoz az R_F és R_c, illetve minél kisebb az SML egyenes meredeksége, annál szükebb lesz az eltérő sorolás sávja. Végső soron empirikus kérdés annak eldöntése, hogy vajon lényeges eltérés van-e az SML és a tőkeköltség közelítés között. Az is fontos kérdés, hogy a projektek mekkora hányada esik a nem sávozott régióba. Egyáltalán nem lehetetlen, hogy adott vállalat projektjei közül, hosszú időn keresztül, csak alig néhány esik a körbezárt területre. Ezt nem kell feltétlenül indokolt jelenségnek tekintenünk, hanem inkább olyan jellemzőnek, ami a rendelkezésre álló projektek karakteréből adódik.

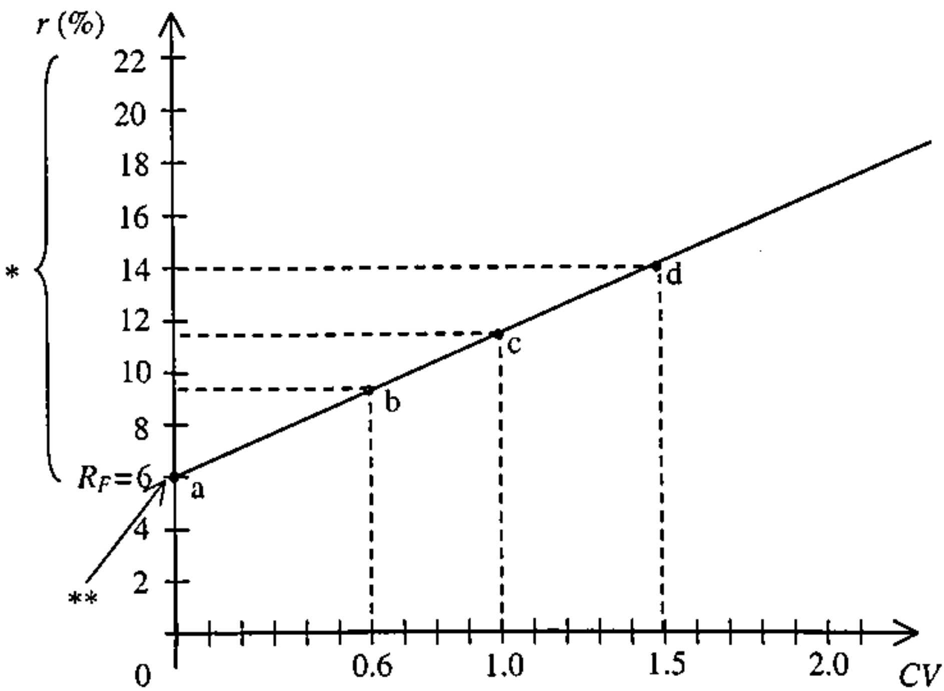
Az eltérő értékelés esetét érdemes közelebbről megvizsgálni. Amennyiben az SML egyenest megalapozó feltevések maradéktalanul érvényesülnek, akkor az azon alapuló döntések szükségszerűen helyesek kell hogy legyenek, a tőkeköltségen nyugvó sorolás viszont hibás lesz. Az elméleti értelemben merevnek tekinthető tőkeköltség módszer alkalmazása, magas kockázatú és viszonylag alacsony jövedelmezőségű projektek elfogadásához, másrészt elfogadhatóan jövedelmező és alacsony kockázatú projektek elvetéséhez vezethet. Ha viszont azt feltételezzük, hogy a vállalat tulajdonosi szerkezete nem szórt, akkor az SML egyenesen alapuló döntések félrevezetők lehetnek. Például az *L* projekt valóban alacsony szisztematikus kockázatú lehet egy teljesen diverzifikált portfolió részeként, ugyanakkor nagyon magas lehet a teljes kockázata. Ezzel szemben a *K* projekt teljes kockázata csak egy kicsivel magasabb saját szisztematikus komponensénél, s az SML egyenes kritériuma alapján elutasítanák azt, fokozottan spekulatív megfontolásokra támaszkodva. Az SML egyenesen alapuló beruházás-értékelési megközelítésben az egyenes alatti várható megtérülés-béta kombinációk elutasításra kerülnének. Az elfogadható projektek vagy az egyenesen vannak, vagy fölötte, ámbár egy beruházás vonalon kívüli elhelyezkedése már önmagában *egyensúlytalanságra* utal. Mindazonáltal fontos kérdés mind a vállalat, mind a befektető diverzifikáltsága. Nem kielégítően diverzifikált befektetők esetében, a CAPM modell alkalmazása elfogadhatatlanul nagy teljes kockázatú, továbbá alacsony megtérülésű, vagy nem jövedelmező projektek elfogadásához vezet. A CAPM modell konklúziója az, hogy a vállalatnak nem szükséges saját beruházási programjában gondoskodni a diverzifikációról, hiszen ezt elvileg a részvénytulajdonosoknak kell megtenni, többféle részvény vásárlásával.

8.2.4. Piaci kockázat-megtérülés függvény

Mivel a CAPM modell a hatékony piac feltevésén alapul, ami azonban nem érvényesül a vállalati reáleszközök (termelő felszerelések) esetében, így a modell alkalmazása kétséges, a produktív tőkejavakhoz kapcsolódó beruházási döntésekben. A figyelem ezért a projekt teljes kockázatának felmérése felé fordul, ami vagy a megtérülés szórásával, vagy szóródási koefficiensével mérhető. Ha a mértékeket a megtérülés megkövetelt szintjéhez kapcsoljuk, akkor megkapjuk a kockázattal korrigált megtérülési rátát, amely alkalmas az NPV értékének meghatározására. A diszkontráta korrigálásához szükséges felrajzolni olyan függvényt, amely a projekt-kockázat minden szintjén mutatja azt a megtérülést, amely minimálisan elvárt a vállalati érték fenntartásához. A projekt-kockázat méréséhez a szóródási koefficienst használva, a vállalat felépítheti a piaci kockázat-megtérülés függvény bizonyos típusát, amelyen a diszkontráták a projekt-kockázat szintjeinek függvényében ábrázoltak. A 102. ábra egy ilyen függvényt mutat.

A CAPM modellhez hasonlóan, e relációt is lineárisnak feltételezzük. Az ábrán látható kockázat-megtérülés függvény azt mutatja, hogy a kockázatmentes eseményhez kapcsolódó *(CV=0)* pénzbeáramlásokat 6%-os rátával kell diszkontálni. Ez a ráta az ábra *a* pontjában az R_F kockázatmentes megtérülést mutatja. A teljes bizonyosságtól eltérő kockázati szintek *(CV>0)* mindegyikéhez hozzárendelhető a megfelelő megkövetelt megtérülési ráta. A *b*, *c* és *d* pont megközelítőleg 9, 11 és 14%-os megkövetelt megtérülést mutat, 0,6, 1.0 és 1.5 értékű relatív szóródás mellett. Az ábrán látható piaci kockázat-megtérülés függvény azt is mutatja, hogy a befektető a pénzbeáramlásokat az adott kockázati szintnek megfelelő rátával diszkontálja. Ahhoz, hogy a vállalat ne veszélyeztesse saját piaci értékét, a projektek értékelését helyes diszkontrátára kell alapozza.

102. ábra *Piaci kockázat-megtérülés függvény*



* Kockázati prémium

** Kockázatmentes ráta

Amennyiben a vállalat a kockázatos projektek pénzbeáramlását *túl alacsony* ráta mellett diszkontálja, s így a projektet elfogadja, akkor a vállalat piaci értéke esni fog, mert a befektetők felismerik, hogy a cég kockázatosabb a bevallottnál. Ugyanakkor az is igaz, hogy ha a vállalat *túl magas* rátával diszkontálja a projekt pénzbeáramlását, s emiatt elvet elfogadásra érdemes projekteket, mivel a befektetők úgy érezhetik: a vállalat magatartása túl óvatos, s a részvények piacra kerülése nyomán a vállalat piaci értékére leszorító nyomás nehezedik.

8.3. A bizonyossági egyenértékes fogalma és szerepe

Mindegyik bizonyossági egyenértékes megközelítés alapvető premisszája az a feltevés, hogy a várható megtérülést preferálni kell, a kockázatot pedig elkerülni. Következésképpen, a racionális befektető a nagyobb kockázatot csak akkor vállalja, ha az magasabb megtérüléssel párosul. Ezért a beruházási projektből származó várható megtérülést, kockázatosságának valamilyen mértékével kell diszkontálni. E technika pótlólagos előnye, hogy a bizonytalanságból elvezet a kockázathoz, még a diszkontálási eljárás előtt. A bizonytalan esemény kockázatos szituációvá redukálásának eljárása, az egyenértékűség valamilyen mértékén keresztül, a helyettesítés egyenes irányú kísérletét foglalja magában. Először döntenünk kell a centrális tendencia egyik mértékéről, mint amilyen a várható érték, továbbá a szóródás mértékéről, mint a szórás vagy a variancia. A további eljárás során, mesterséges változó létrehozásával, olyan érték jelenik meg, amit a döntéshozó hajlandó elfogadni némely bizonytalan érték helyettesítőjeként.

Ezt az új, mesterséges változót *bizonyossági egyenértékesnek* nevezik, s ennek implikációja szerint a döntéshozó oly módon választ az alternatívák közül, hogy maximalizálja eme változó értéket. Ha találunk ilyen értéket, akkor biztonsággal feltételezhetjük, hogy az ugyanolyan vonzó a döntéshozó számára, mint a bizonytalan jövőbeli érték. A bizonyossági egyenértékes felépítését egyszerű példán keresztül mutatjuk be. Feltételezzük, hogy egy vállalat döntéshozói a következők szerint három alternatív beruházási lehetőséget vizsgálnak.

„A" projekt

A pénzáram meghatározott hányadát kockázatmentes kormányzati kötvénybe fektetik, amelynek 10 év a lejárata. Az ilyen befektetés hozama 0.05, varianciával mért kockázata pedig 0.00.

„B" projekt

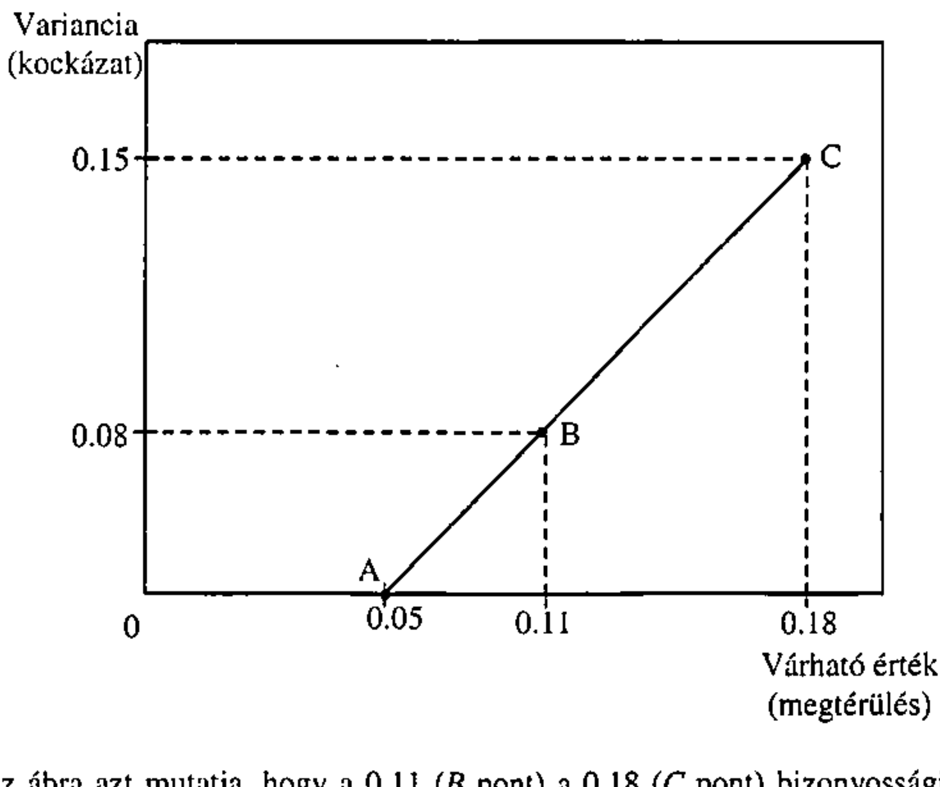
Ugyanakkora pénzalapot, ugyanolyan hosszú időre, 0.11 várható megtérülésű projektbe beruházva, a varianciával mért kockázat 0.08.

„C" projekt

Ugyanakkora összeget, ugyanolyan hosszú időre beruházva a projekt várható megtérülése 0.18, a varianciával mért kockázata pedig 0.18.

Amennyiben a döntéshozók úgy vélik, hogy közömbösek a három beruházási lehetőség kockázat-megtérülés karakterisztikáit illetően, akkor a három pontkombinációt összekötő vonal megformálja a vállalat bizonyossági egyenértékes közömbösségi grafikonját. Ezt mutatja az 103. ábra.

103. ábra *Bizonyossági egyenértékes függvény*



Az ábra azt mutatja, hogy a 0.11 (*B* pont) a 0.18 (*C* pont) bizonyossági egyenértékese, továbbá látható, hogy a 0.05 érték (*A* pont) a másik két alternatíva bármelyikének ugyancsak bizonyossági egyenértékese, mivel az zéró varianciájú. Az *A*, *B* és *C* lehetőséget összekapcsoló bizonyossági egyenértékes megtérülési függvény arra mutat, hogy a döntéshozó a bizonyossággal várható pótlólagos pénzegységet többre értékeli, mint a kockázatos addicionális megtérülést. Ennek alapján egy kockázatosabb projektet csak akkor fogadunk el, ha a várható megtérülés elég magas ahhoz, hogy kompenzálja a pótlólagos kockázatot. Így a döntéshozó elfogadja mindama kockázat-megtérülés kombinációkat, amelyek a három pontban láthatóan azonos megelégedettséget biztosítanak. Szükségtelen mondani, hogy a bizonyossági egyenértékesek a megtérülési ráta helyett, közvetlenül a pénzáram-érték abszolút nagyságával fejezhetők ki. Ilyen esetekben olyan eljárásra van szükség, amely a jelenlegi értéket a konstans kockázattal korrigált diszkontrátával (r) számítja.

8.3.1. A bizonyossági egyenértékes számítása

A vállalat két, egymást kölcsönösen kizáró projektet vizsgál. A projektek várható pénzáram-értékei a következők:

82. tábla NPV számítás bizonyossági egyenértékesre alapozva

a) adatok dollárban

Év	Projekt	
	A	B
0	-300 000	-300 000
1	100 000	200 000
2	200 000	200 000
3	200 000	200 000
4	300 000	300 000
5	300 000	400 000

A vállalat e projekteket a bizonyossági egyenértékes módszerrel vizsgálja. A projekt-pénzáramok bizonyossági egyenértékes koefficiensei az alábbi táblában találhatók:

b)

Év	Projekt	
	A	**B**
0	1.00	1.00
1	0.95	0.90
2	0.90	0.80
3	0.85	0.70
4	0.80	0.60
5	0.75	0.50

Ha azt feltételezzük, hogy e vállalat szokványos megkövetelt megtérülési rátája 15%, az adózás utáni kamatmentes ráta 8%-os, akkor a projektek közül melyiket célszerű választani?

c) *Az A projektre vonatkozó számítás*

Év	(1) Várható pénzáram	(2) α_t	(1) · (2) Pénzáram · α_t	Jelenérték tényező 8%-nál	Jelenlegi érték
0	-300 000	1.00	-300 000	1.000	-300 000
1	100 000	0.95	95 000	0.926	87 970
2	200 000	0.90	180 000	0.857	154 260
3	200 000	0.85	170 000	0.794	134 290
4	300 000	0.80	240 000	0.735	176 400
5	300 000	0.75	225 000	0.681	153 225
				NPV_A =	406 145

d) *A B projektre vonatkozó számítás*

Év	(1) Várható pénzáram	(2) α_t	(1) · (2) Pénzáram · α_t	Jelenérték tényező 8%-nál	Jelenlegi érték
0	-300 000	1.00	-300 000	1.000	-300 000
1	200 000	0.90	180 000	0.926	166 680
2	200 000	0.80	160 000	0.857	137 120
3	200 000	0.70	140 000	0.794	111 160
4	300 000	0.60	180 000	0.735	132 300
5	400 000	0.50	200 000	0.681	136 200
				NPV_B =	383 460

8.3.2. A kockázati korrekció változatai

Bármely portfolió várható megtérülése a kockázatmentes ráta és a kockázati prémium összegeként fejezhető ki. A CML egyenes a hatékony portfoliókra lineáris kapcsolatot ír fel a várható megtérülés és a kockázat között, a következő formában:

$$E(K_p) = R_F + \lambda^* \sigma_p \tag{1a}$$

ahol:

$E(K_p)$= a hatékony portfolió várható megtérülése

R_F = kockázatmentes kamatráta

$\lambda^* = \dfrac{E(K_M) - R_F}{\sigma_M}$ = a kockázat piaci ára

σ_p = a hatékony portfolió szórása

$E(K_M)$ = a piaci portfolió várható megtérülése

σ_M = a piaci portfolió megtérülésének szórása

Az összes hatékony portfolió, beleértve a piaci portfoliót is, rajta van a CML egyenesen. Ezért fennáll az

$$E(K_M) = \lambda^* \sigma_M \tag{1b}$$

reláció is.

Az (1a) és (1b) egyenlet egyaránt azt mondja, hogy egy hatékony portfolió, egyensúlyi helyzetben egyenlő, a kockázatmentes megtérülés, plusz a kockázat piaci ára, szorozva a portfolió-megtérülés szórásával. A CML egyenes meredeksége λ^*, ami a kockázat piaci ára, a kockázat és a megtérülés közötti átváltási reláció kifejezője. Az $[E(K_M)-R_F]$ kockázati prémium, és a σ_M piaci szórás hányadosaként számított λ^*, normalizált kockázati prémiumként is felfogható. A kockázat piaci árában aggregáltan visszatükröződik az egyének összességének kockázati attitűdje, ami összegző hasznossági függvény kompozícióként tekinthető.

A modell egyedi értékpapírokra kifejlesztett változata az SML egyenes, amely a következő egyenlet segítségével írható fel:

$$E(K_j)=R_F+\lambda COV(K_j K_M) \tag{2}$$

ahol

λ = a kockázat piaci ára, értékpapírok esetében = $[E(K_M)-K_F]/\sigma_M^2$

$COV(k_j, k_M)$ = j értékpapír és a piac megtérülése közötti kovariancia

$E(K_j)$= j egyedi értékpapír várható megtérülése

Az SML egyenes kapcsolatot mutat ki az egyedi értékpapír megtérülésének piaccal alkotott kovarianciája, és az egyedi értékpapír várható megtérülése között.

Az SML a CML egyenestől két tekintetben különbözik. Az egyik szerint, az egyedi értékpapír vagy vállalat esetében, a kockázat mértéke a szórás helyett, a kovariancia. Ez azért fontos koncepcionális differencia, mert azt a felismerést tükrözi, hogy az egyedi értékpapír vagy vállalat kockázatát ama portfolió kockázatához való hozzájárulás méri, amiben elhelyezkedik. A másik különbség abban van, hogy a piaci megtérülési többletet a piaci megtérülés varianciájával normalizáljuk a nevezőben, és nem a szórással. Ennek hatására az SML dimenziója eltér a CML egyenesétől.

Átalakítva a (2) egyenletet úgy, hogy az egyedi értékpapír kovarianciáját elosztjuk a σ_M^2 piaci megtérülési varianciával, akkor megkapjuk az SML egyenes eltérő dimenziójú másik verzióját:

$$E(K_j) = R_F + [E(K_M) - R_F] \cdot \beta_j \tag{3}$$

ahol:

$$\beta_j = COV(K_j K_M) / \sigma_M^2$$

$E(K_j) =$ az eszköz várható megtérülése

Az SML egyenlet e formájában látható, hogy az egyedi értékpapír kockázati prémiuma a piaci kockázati prémium, és az egyedi értékpapír relatív kockázatának szorzata.

A (3) egyenlet azt mutatja, hogy az egyedi értékpapír vagy reáleszköz beruházás várható megtérülése a kockázatmentes ráta és a kockázati prémium összegével reprezentálható. A tőkepiaci értékelés egyensúlyi elméletének megjelenése előtt nem volt mód a kockázat mértékének pontos kifejezésére. A tőkepiaci elmélet kimutatta, hogy a kockázati prémium meghatározásához a piaci kockázati prémiumot súlyoznunk kell, az egyedi értékpapír vagy reáleszköz beruházás szisztematikus kockázati indexével. Az egyedi értékpapírra vonatkozó β azt tükrözi, hogy az ágazati sajátosságok és a vállalati vezetés milyen mérvű fluktuációt idéz elő az átfogó piaci megtérülés hatására. Olyan esetekben, ahol az átfogó üzleti környezet stabil, az ágazati karakterisztikák változatlanok maradnak, s ha a vállalatvezetés eredményes működése töretlen, akkor a β tényező értéke időben stabil marad. Amennyiben e stabilitási feltételek nem teljesülnek, akkor a β értéke is változni fog. A (3) egyenlet előnye abban áll, hogy a β kivételével minden tényező a piac által meghatározott konstans. Ha a β stabil, akkor a várható megtérülés előremutató tartalmú[91]. Hangsúlyozni szükséges, hogy a kockázatmentes ráta és a piaci kockázati prémium (a piaci megtérülés kockázatmentes ráta fölötti többlete), a gazdaság egészére vonatkozó mérték. E paraméterek időről-időre változhatnak, rövid távon mégis alapot biztosítanak a méréshez, aminek eredménye alkalmazható ítéletek és döntések megfogalmazásához vezet.

A CAPM modell egyértelmű és tömör kritériumot biztosít a tőkeberuházási döntésekhez. A (3) egyenlettel adott alapvető reláció a tőkeköltségvetési döntések kritériumaként ugyancsak felhasználható, azaz a (3) egyenlet kiterjeszthető az egyedi projektek $E\left(K_j^0\right)$ várható megtérülésének és β_j^0 ingadozási mértékének kifejezésére, az alábbi egyenlőtlenséggel:

$$E\left(K_j^0\right) = R_F + \left[E\left(K_M\right) - R_F\right] \cdot \beta_j^0 \tag{4}$$

[91] A piac által adott értékekre vonatkozó megállapításokat tesz Fisher, L. – Lorie, J: Rates of return on investments in common stocks. Journal of Business, January 1964. 1-21 pp., és Fisher, L.: Some new stock-market indexes. Journal of Business, January 1966. 191-218 pp.

A (4) egyenlőtlenségben a piaci konstansok ugyanolyanok maradnak, a vállalati változók azonban egyedi projekt-változókká válnak, megfelelő felső index hozzáillesztésével. A (4) egyenlőtlenség azt a feltételt fejezi ki, ami ha teljesül, akkor a projektet el kell fogadni.[92] Az új projekt várható megtérülésének feltétlenül meg kell haladni az egyedi projekt β_j^0, szisztematikus kockázattal súlyozott piaci kockázati prémium, és az egyszerű kamatráta összegét. A kritérium úgy érvényesül, hogy el kell fogadni mindama projekteket, amelyek az SML egyenes fölött vannak, s el kell utasítani mindazokat, amelyek az alatt vannak. A döntéshozók olyan projekteket keresnek, amelyeknek a piac kockázat-megtérülés egyensúlyi megkövetelt szintje fölötti megtérülési többlete van. Ha ilyen értelemben elfogadható projektek kerülnek a vállalati működésbe, akkor a vállalati közönséges részvények várható megtérülése (azok előző tényleges ára) nagyobb lesz az SML egyenes által megköveteltnél. Ez a „többlet megtérülés" addig tartó áremelkedést indukál, amíg a részvények $E(K_j)$ megtérülése nem csökken le az SML egyenes által reprezentált egyensúlyi szintre.

8.3.3. Kockázattal korrigált kamatráta versus bizonyossági egyenértékes módszer

A CAPM modell a kockázat piaci árának mértékeként kockázattal korrigált megkövetelt megtérülési rátát biztosít a kockázatos projektek elemzé-

[92] E kritériumot Rubinstein, M. E.: A sysnthesis of financial theory. Journal of Finance, March 1963 c. tanulmánya fogalmazza meg.

séhez. Láttuk már, hogy az $E(K_j) = R_F + [E(K_M) - R_F]\beta_j$ kifejezés jobb oldalának második tagja, kockázattal korrigált többletet reprezentál az R_F kockázatmentes megtérülés növekményeként. A modell olyan diszkontrátát ad, amely felhasználható az (5) egyenlettel bemutatott alapvető tőke-költségvetési egyenletben.

$$NPV_j^0 = \sum_{t=0}^{n} \frac{C_t}{[1 + E(K_j)]^t} \tag{5}$$

ahol

NPV_j^0 = a j projekt nettó jelenértéke

C_t = a projekt nettó pénzárama

$E(K_j)$ = kockázattal korrigált diszkontfaktor

Ha a projekt nettó jelenértékét úgy számítjuk, hogy a pénzáram nullánál nagyobb lesz, s azt a kockázattal korrigált megkövetelt megtérülési rátával diszkontáljuk, akkor a projektet el kell fogadni. Ez az eljárás alkalmas a különböző kockázati osztályba tartozó projektek összehasonlítására. E módszer pontosabb az eredeti NPV számítási eljárásnál, ahol az összes projektre egyetlen diszkontrátát alkalmaznak, függetlenül attól, hogy a projektek kockázata különböző. Koncepcionális értelemben a kockázattal korrigált megkövetelt megtérülési ráta fejlettebb ama módszernél, amelyben csak egyetlen diszkontrátát alkalmaznak, különböző kockázatú projektekhez.

A projekt-kockázatot kétféleképpen lehet kezelni: Vagy korrekciót hajtunk végre a jelenérték egyenlet számlálójában (bizonyossági egyenértékes módszer), vagy annak nevezőjében (kockázattal korrigált diszkontráta módszer). Ez utóbbit alkalmazzák gyakrabban, vélhetőleg azért, mert könnyebb megfelelő diszkontrátát becsülni, mint bizonyossági egyenértékes tényezőt származtatni. Elméletileg igazolható, hogy a bizonyossági egyenértékes megközelítés magasabb rendű, mint a kockázattal korrigált diszkontráta módszer.[93] Ez utóbbi akkor tekinthető elméletileg hiteles eljárásnak, ha a kockázat az idő növekvő függvénye. A módszerek egybevetéséből nyilvánvaló, hogy a kockázattal korrigált ráták (a kamatos kamatozási folyamaton keresztül) egybegyúrják a tiszta kamatrátát, a kockázati prémiumot és az időt, ugyanakkor a bizonyossági egyenértékes megközelítés a kockázatot és a tiszta kamatrátát egymástól elválasztja. Ez elméleti értelemben előnyt jelent, mindazonáltal a döntéshozók előnyben részesítik a kockázattal korrigált diszkontálás koncepcióját, mivel könnyebb a piaci adatokat felhasználni, a korrigált diszkontráták kialakításához.

A bizonyossági egyenértékes módszer elméleti szabatossága alapján további figyelmet érdemel, mivel a CAPM modellre támaszkodó változata a kockázat figyelembe vételének általánosan elfogadott módszere a tőkeköltségvetési folyamatban. Felidézve a (2) egyenletet, a projekt megkövetelt megtérülési rátája a következő formában írható fel:

$$E(K_j) = R_F + \lambda COV(K_j K_M) \qquad (2)$$

A megtérülési ráta felírható a várható pénzáram és a projektérték hányadosaként:

[93] Robichek, A. A. – Myers, S. C.: Conceptual problems in the use of risk-adjusted discount rates. Journal of Finance, 1966 December 727-730 pp.

$$K_j = \frac{E(C_j)}{V_j}$$

Ennek alapján a CAPM modell alapegyenlete a következő alakban átírható:

$$\frac{E(C_j)}{V_j} = R_F + \lambda COV\left(\frac{C_j}{V_j} K_M\right) \tag{6}$$

Figyelembe véve azt, hogy kovariancia csak C_j és K_M kockázatos változók között létezhet, a V_j projektérték konstans jelenérték, így az utóbbi kifejezés az alábbi lépésekkel átrendezhető:

$$\frac{1}{V_j}\left[E(C_j) - \lambda COV(C_j K_M)\right] = R_F$$

$$V_j = \frac{E(C_j) - \lambda COV(C_j K_M)}{R_F} \tag{7}$$

Beruházási projektre vonatkoztatva a kockázati korrekciós formula a következő alakot ölti:

$$V_j^0 = \frac{E(C_j^0) - \lambda COV(C_j^0 K_M)}{R_F} \tag{8}$$

Erre alapozva a projekt NPV értéke az érték és a beruházási kiadás különbségeként fejezhető ki:

$$NPV_j^0 = V_j^0 - C_j^0$$

A kockázat piaci árának kritériuma így rugalmas eszközt ad a különböző kockázatú beruházási projektek kockázati korrekciójához.

8.4. A CAPM modell szerepe a kockázati korrekcióban

A kockázati korrekció eddig vizsgált eseteiben a fő gondot a kockázat időbeli alakulásának kezelése okozta. Ha a diszkontráta és a bizonyossági egyenértékes egyaránt tartalmaz egy komponenst a projekt relatív kockázatosságának kifejezésére, akkor az idő és a kockázat hiába egymástól elkülönített változó, mégis ugyanazon korrekciós folyamatban foglaltatnak benne. A közkeletű vélekedéssel szemben arra a következtetésre juthatunk, hogy *a bizonyossági egyenértékes módszer nem tekinthető magasabb rendűnek a kockázattal korrigált diszkontrátánál.*

A projekt konstans vagy csökkenő kockázatosságának feltételezése mellett a tőkepiaci értékelés egyensúlyi modellje, az ún. CAPM módszer alkalmas egyedül a kockázat halmozódásának kiszűrésére. A $\overline{C}_i$ bizonytalan pénzáram kockázati korrekciója meghatározott nagyságú kockázati prémium-összeg levonásával történik. Ebben az esetben a korrigált pénzáram jelenértéke az alábbi formulával adható meg[94]:

$$PV_i = \frac{\overline{C}_i - \lambda COV\left(\overline{C}_i R_M\right)}{R_F} \qquad (1)$$

ahol $\lambda = \left[E\left(R_M\right) - R_F\right] / \sigma_M^2$, amit a kockázat piaci árának is neveznek, a kovariancia-tag pedig a projekt pénzáram piaci megtérüléssel történő együttmozgását mutatja. Az $\alpha_t \cdot \overline{C}_t$ szorzat illetve az imént citált korrekció között lényeges különbségek fedezhetők fel. Az α_t becslése akár a

[94] Weston 1973, Bogue-Roll 1974

hasznossági megfontolásra alapozva történik, akár a kockázati attitűd kockázati prémiumban megtestesült kifejezésével, az α_t értéknek egyénenként változó nagysága lehet, azaz minden döntéshozónak, minden időszakra vonatkozóan különböző α_t becslése lehet. Ezzel szemben a CAPM modell segítségével számított $\lambda COV\left(\overline{C}_i R_M\right)$ kockázati prémium a projektre és a piacra vonatkozó információk alapján határozható meg, s a számlálóbeli különbségnek csak egyetlen értéke van. Fontos körülmény, hogy az előzőekben vizsgált két korrekciós módszer számítási eredményei teljes összhangban vannak a CAPM megközelítésre alapozott eredménnyel. Mutassuk ezt be egyszerű példa segítségével! Feltételezzük, hogy a bizonytalan pénzáram várható értéke 120 dollár, a λ=4, a $COV\left(CR_M\right) = 17.5$, a kockázatmentes kamatráta értéke 5%. A kockázati korrekció mértékének meghatározásához alapul vehetjük a (15) formulát. Eszerint a projekt jelenértéke:

$$\begin{aligned} PV_i &= \frac{120-4(17.5)}{0.05} \\ &= 100 \text{ dollár} \end{aligned} \tag{2}$$

a kockázati korrekció mértéke pedig a $\lambda COV\left(C_i R_M\right)$ kockázati prémium tényezőnek megfelelően 70 dollár. Az 1000 dolláros érték a CAPM modellre alapozott, kockázattal korrigált diszkontráta megközelítéssel és a bizonyossági egyenértékes módszer segítségével ugyancsak megkapható. A pénzáramra és a megtérülési rátára felírt kovariancia reláció, az alábbiak szerint szükségképpen megegyezik egymással:

$$COV\left(\frac{C_i}{PV_i}R_M\right) = COV(R_i R_M) \tag{3}$$

a véletlen változókra és a konstans értékekre vonatkozó szabály alapján

$$COV(C_i R_M) = PV_i \cdot COV(R_i R_M) \tag{4}$$

$$COV\left(\frac{C_i}{PV_i}R_M\right) = COV(R_i R_M) \tag{5}$$

azonosság érvényesül, amiből példánk adataival megkaphatjuk a projekt-megtérülés és a piaci hozam közötti kovariancia értékét,

$$17.5 = 1000\ COV(R_i R_M) \tag{6}$$

amiből

$$COV(R_i R_M) = 17.5/1000 = 0.0175 \tag{7}$$

kovariancia érték adódik.

Ha erre támaszkodva a kockázattal korrigált kamatrátát keressük, akkor

$$\frac{C_i}{PV_i} = R_F + \lambda COV(R_i R_M) \tag{8}$$

reláció felhasználásával a jelenérték

$$PV_i = \frac{C_i}{R_F + \lambda COV(R_i R_M)} \tag{9}$$

alakban fejezhető ki. Az adatok behelyettesítésével

$$PV_i = \frac{120}{0.05 + 4 \cdot (0.0175)} = 1000 \tag{10}$$

1 000 dolláros jelenértéket kapunk, 12%-os kockázattal korrigált diszkontráta mellett. Ha a bizonyossági egyenértékest a CAPM modellel kompatibilis módon határozzuk meg, akkor a *CE* szimbólummal jelölt bizonyossági egyenértékes faktor a következő alakot ölti:

$$CE = \frac{\overline{C}_i - \lambda COV(C_i R_M)}{\overline{C}_i} \tag{11}$$

s ennek felhasználásával az α_{CAPM} jelöléssel megadott *CE* érték segítségével ugyancsak előállítható a jelenérték

$$\begin{aligned} PV_i &= \frac{\alpha_{CAPM} \cdot \overline{C_i}}{R_F} \\ &= \frac{0.4167(120)}{0.05} = 1\,000 \end{aligned} \tag{12}$$

A CAPM modell kiemelkedően fontos jellemzője, hogy a segítségével elvégzett kockázati korrekció során nem kell tartani a kockázati prémium indokolatlan halmozódásától. E képesség értékéből mit sem von le az a tény, hogy a CAPM modell valójában egyperiódusú kockázati korrekcióra alkalmas. A β időbeli változatlanságát feltételezve, a jelenérték meghatározása több periódusra is kiterjeszthető. Az alábbi jelenérték formulában *a bizonyossági egyenértékes faktor ugyancsak hatványozódik, de ezúttal nem kell tartanunk indokolatlan kumuláló hatástól.*

$$PV_t = \sum_{t=0}^{N} \frac{(CE)^t \overline{C}_t}{(1+R_F)^t} \tag{13}$$

Ez utóbbi felismerés is megerősíti ama tételünket, hogy egyedül a CAPM modell alkalmazása során nem következik be a kockázati prémium halmozódása.

Igen érdekes eredményt kapunk akkor, ha a bizonyossági egyenértékes α szimbólummal megadott korrekciós formuláját *azonos tartalmúnak* feltételezzük a CAPM modellre alapozott *CE* tényezővel. A két formula egyenlővé tételével

$$\alpha = \frac{1+R_F}{1+R_F+\Delta} = \frac{\overline{C} - \lambda COV(CR_M)}{\overline{C}} = CE \tag{14}$$

relációt kapunk. Ebből kifejezhető a kockázati prémium rátája, ami a periódusvégi kockázati prémium és a bizonyossági egyenértékes összeg hányadosaként számítható:

$$\Delta = \frac{[\lambda COV(CR_M)](1+R_F)}{\overline{C} - \lambda COV(CR_M)} \tag{15}$$

Ez utóbbi hányados nem hagy kétséget afelől, hogy a kockázati korrekció α értéken alapuló és a CAPM modell segítségével elvégzett korrekciója *elméletileg összhangban* van egymással. Az α tényezőben kulcsszerepet játszó Δ kockázati prémium ráta egyenes arányban alakul a periódusvégi kockázati prémium összegével és fordított arányban a bizonyossági egyenértékes abszolút nagyságával. A Δ kockázati prémium rátára felírt reláció természetesen semmit nem mond a kockázati prémium ráta időbeli alakulásáról. Ebben nyilvánvalóan szerepe lehet a CAPM modell eredendően egyperiódusos jellegének, továbbá ama korábbi felismerésünknek, hogy a kockázat „tiszta" hatásának kimutatásához periódusonként változó $(1+R_F+\Delta)$ kamattényezőt szükséges alkalmazni. A CAPM modellre alapozott kockázati korrekció jól láthatóan nem oldja meg az időben változó kockázati prémium problémát, mégis lépést jelent előre a kockázati korrekció „dinamizálása" útján.

Az alább felidézett mindkét modellről elmondható, hogy „a piac által meghatározott", s nem egyszerűen szubjektív kockázati korrekciót tesz lehetővé. A

$$PV=\frac{\overline{C}-\lambda COV\left(\overline{C}R_M\right)}{1+R_F} \tag{16}$$

változatban a $\overline{C}$ kockázatos pénzáramból levonunk egy bizonyos összegű kockázati prémiumot, a

$$PV=\frac{\overline{C}}{\left[1+R_F+\lambda COV\left(\frac{\overline{C}}{PV}R_M\right)\right]} \tag{17}$$

modellben pedig kockázattal korrigált diszkontrátát számítunk a CAPM modellel összhangban. Természetesen emlékeztetnünk kell arra, hogy a két változat származtatásakor fenn kell állnia a CAPM modellt megalapozó összes feltételnek (tökéletes tőkepiacok, homogén várakozások etc.). A kockázati korrekciót mindeddig korlátozó feltételek érvényesülése mellett vizsgáltuk; ezek szerint a vállalat különböző projektjei azonos β értékkel rendelkeznek, s a modell egyetlen periódusra vonatkozott. Ahhoz, hogy a modellt többperiódusú környezetben tudjuk alkalmazni, vagy azt kell feltételezni, hogy a releváns béta állandó, vagy pedig meg kell kísérelni becsülni a megfelelő bétákat.[95]

Tökéletes tőkepiaci körülmények között lehetőség nyílik az érték-additivitási elv alkalmazására.[96] Eszerint a vállalat teljes értéke az alkotó projektek várható hozamának értékösszege. Az érték-additivitási elv alapján a vállalat V értéke a P_i projekt értéksor összege:

$$V = \sum_{i=1}^{n} P_i \tag{18}$$

A vállalatot alkotó összes egyedi projekt jelenértéke a CAPM modellre alapozva határozható meg

$$P_i = \sum_{i=0}^{T} \overline{C}_t / \left[1 + R_F + \lambda COV\left(\frac{\overline{C}_t}{PV_0} R_M \right) \right]^t \tag{19}$$

Ez utóbbi relációban a $\overline{C}_t / PV_0$ megtérülési rátaként fogható fel, amely a t–edik időszakban kapott $\overline{C}_t$ várható pénzáram és ennek PV_0 jelenértéke közötti egyensúlyi összefüggésben nyilvánul meg. Ha a vállalat által végrehajtott különböző projektek eltérő kockázatúak, akkor ez a megtérülési ráta és a kockázattal korrigált diszkontráta különbözik egymástól. A (19) összefüggés valójában a (16) modell többperiódusú változata, amelyben az R_F kockázatmentes rátát állandónak tekintjük. Az érték-additivitási elv

[95] A CAPM modell többperiódusú változatának tőke-költségvetésben történő alkalmazása Myers és Turnbull munkáján alapszik (Myers-Turnbull 1977).

[96] Allen, D.E. 1981

azt sugallja, hogy ha a kockázatot is figyelembe vesszük a tőke-költségvetési számításban, akkor a tökéletes tőkepiacok környezetében a jelenértékek összeadhatók s ez feltétlenül bizalmat ébreszt a jelenérték szabályban.

Az elméleti vizsgálódásban a projekt- és piaci változók tekintetében tökéletes ismereteket feltételezünk. A gyakorlatban minden befektetés-értékelési feladat esetében az egyik legnagyobb nehézség, becsülni a projekt jövőbeli pénzáramának paramétereit. A projekt nettó hozamának várható értékét számos bizonytalan gazdasági tényező befolyásolja. A potenciális hatások sorába tartozik a piac mérete, az értékesítési ár, a piaci részesedés, a piaci növekedési ráta, a befektetés mérete, az állandó és változó költségek, a projekt élettartama etc.

A CAPM modell tőke-költségvetésbeli alkalmazásának kritikus pontja az, hogy ha a modellt vállalati befektetési döntéseknél használjuk, akkor *kapcsolatot kell létrehozni a projekt valós változói és a piaci indikátorok között.* Ez abból következik, hogy a vállalati béta értékét a finanszírozási piacok határozzák meg, az alapul szolgáló determinánsok azonban a vállalat termelési és befektetési döntéseinek területére esnek.

A beruházási projektekből származó $C_t(t = 1,2,...T)$ bizonytalan pénzáram értékelése a teljes működési időre vonatkozóan kell hogy történjék. Ha feltételezzük a CAPM modell érvényesülését, akkor a PV_t jelenérték az alábbiak szerint írható fel (Myers-Turnbull 1977):

$$PV_t = \left[E\left(\tilde{C}_{t+1} + \tilde{P}\tilde{V}_{t+1} / IS_t^M\right) - \lambda COV\left(\tilde{C}_{t+1} + \tilde{P}\tilde{V}_{t+1} R_M^{t+1}\right)\right] / \left(1 + R_F\right) \quad (20)$$

A modellben az első kifejezés a $t+1$. időszakbeli várható eszközértéket és a periódusban keresett pénzáramot mutatja, a t. időszakban alkalmazott piaci információkra alapozva; a második tag pedig a kockázati korrekciót juttatja kifejezésre. Az így kapott bizonyossági egyenértékes összeget a kockázatmentes rátával diszkontáljuk. A (20) egyenlettel adott jelenérték-számítás rávilágít a CAPM „rekurzív" jellegére is, amikor azt többperiódusú környezetben alkalmazzák. Az utóbb felírt modell legfőbb tanulsága az, hogy a befektetés t. időszakra vonatkozó értéke nem határozható meg a $t+1$. periódusbeli érték valószínűségi eloszlásának ismerete nélkül.

Myers és Turnbull a kockázat piaci árát időben változatlannak feltételezve abból indult ki, hogy a befektetők a jelenbeli információk alapján jelzik előre a jövőbeli pénzáramokat, az alábbiak szerint:

$$\tilde{C}_t = E\left(\tilde{C}_t / IS_{t-1}^{M}\right)\left(1-\tilde{\varepsilon}_t\right) \tag{21}$$

Ebben a relációban az ε_t az előrejelzés és a tényleges pénzáram közti különbséget mutató véletlen hiba. Feltételezték, hogy a kifejezésben található zavaró tényezőket egyrészt vállalat-specifikus komponensekre, másrészt az egész gazdaságot befolyásoló, előre nem jelezhető komponensekre bonthatjuk. Képlettel kifejezve:

$$\tilde{\varepsilon}_t = \gamma \tilde{I}_t - \tilde{z}_t \tag{22}$$

ahol γ konstans érték, amely a zavaró tényező azon részéhez kapcsolódik, mely az átfogó gazdasági index változását jelzi, az I_t az előre nem látható változások általános gazdasági indexe, a z_t pedig a kizárólag a vállalathoz kapcsolódó zavaró tényező. Mivel azt is feltételezték, hogy a projekt pénzáram nem mutat szisztematikus növekedést, a korrekciót az adaptív várakozások módszerére támaszkodva végezték, a következők szerint:

$$E\left(\tilde{C}F_{t+1}\middle|IS_t^M\right)=E\left(\tilde{C}_t\middle|IS_{t-1}^M\right)\left(1-\eta\tilde{\varepsilon}_t\right) \tag{23}$$

ahol η a várakozások elaszticitása (normális esetben $0 \leq \eta \leq 1$).

Myers és Turnbull a béta instabilitásával való foglalkozás helyett a pénzáram ama részére összpontosíthatta figyelmét, amely szisztematikus kovariancia kapcsolatot mutat az I gazdasági indexszel. Az általános értékelési formulát rekurzív eljárással határozták meg a t-1. periódusból a t=0. időszakig visszafelé haladva. A t-1. időszakra vonatkozó érték formulája a következők szerint fejezhető ki:

$$PV_{t-1}=E\left(\tilde{C}_t\middle|IS_{t-1}^M\right)\left(1-\lambda\gamma COV_{IR_M}\right)/\left(1+R_F\right) \tag{24}$$

ahol COV_{IR_M} a gazdasági index és (az állandónak feltételezett) piaci portfolió kovarianciája. A pénzáramok kockázatának illetve zavaró tényezőjének egy része γ által kapcsolódik a piaci mutatóhoz (a γ az I gazdasági index változásaihoz való szisztematikus kapcsolódást jelöli). A t-2. periódusban a pénzáram értéke egyaránt függ az időszakban várható pénzáramtól és az időszak végén várható értéktől, az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned}PV_{t-2}=&\left[E\left(\tilde{C}_{t-1}\middle|IS_{t-2}^M\right)\left(1-\lambda\gamma COV_{IR_M}\right)/\left(1+R_F\right)\right]\\&+\left[E\left(\tilde{C}_{t-1}\middle|IS_{t-2}^M\right)\left(1-\lambda\eta\gamma COV_{IR_M}\right)/\left(1+R_F\right)^2\right]\end{aligned} \tag{25}$$

A (25) kifejezésben az első tényező a következő időszak pénzáramát jelöli, a második pedig az időszak végi PV_{t-1} jelenértéket. Ezt az értéket inkább a C_{t-1} tényezővel lehet kifejezni, nem pedig C_t-vel, éppen az adaptív várakozások mechanizmusa miatt. Megfigyelhető, hogy η a (25) második tényezőjébe a (24) kifejezésben szereplő érték-pénzáram kapcsolaton keresztül került be. Ha e módszerrel időben visszafelé haladva $t=0$ időszakbeli értékkel bezárólag minden egyes évre vonatkozó értéket felírjuk, akkor eljutunk a többperiódusú értékelés általános formulájához.

$$PV_0 = \frac{E\left(C_1 \middle| IS_0^M\right)\left(\lambda\gamma COV_{IR_M}\right)}{\left(1+R_F\right)} \sum_{t=0}^{t-1} \left(\frac{1-\lambda\eta\gamma COV_{IR_M}}{1+R_F}\right)^t \tag{26}$$

Ez utóbbi (26) kifejezés a beruházási projektek CAPM modell által történő értékelésére alkalmas modell, amely több periódust felölelő környezetben ad módszert a kockázati korrekcióra. A Myers és Turnbull által kifejlesztett értékelési módból világosan kitűnik, hogy a beruházási projektek értékelésében két különálló kockázati forrás létezik. Az egyik a mindenkori következő időszak pénzáramának tényleges nagyságához kapcsolódik, s ezt a (26) modellben az első diszkontált érték jelöli. A másik kockázati forrás – amit az összegzett diszkontálási tényező jelöl – a várakozások korrigálásához kapcsolódó kockázatot testesíti meg.

8.5. A tőkekiadások opció komponensének értékelése

Az *opció* olyan megállapodás, amely jogot biztosít meghatározott vagyonjószág eladására vagy vételére, specifikált áron, meghatározott idő elteltével. Azt a vagyonjószágot, amelyre az opciós kontraktus vonatkozik alapul vett eszköznek nevezik; ez részvény opció esetében a részvénytőkét megtestesítő részvényjegyeket jelent. Azt a specifikus árat, amely mellett az opciót érvényesítik az opció lebonyolítási, vagy kötési árának nevezik, az időszakot pedig az opció érvényes, lebonyolítási periódusának, vagy a kontraktus érvényességi idejének tekintik. Az a személy, aki megalkotja és felajánlja az eladási kontraktust, az opciót jegyzőnek vagy eladónak nevezik. A másik felet tulajdonosnak vagy vevőnek nevezik. Amikor a kontraktust megkötik, akkor a vevő készpénzt fizet a jegyzőnek a jog ismert ár melletti megvásárlásáért vagy eladásáért. Az opció fontos jellemzője, hogy a kontraktus tulajdonosának joga van megvenni vagy eladni az alapul szolgáló eszközt, de nem köteles megtenni azt. Az eladásra vagy vételre vonatkozó kötelezettség hiánya adja az opció megkülönböztetését a forward vagy futures jellegű kontraktusokkal szemben, ahol is kötelezettség áll fenn a kontraktus végrehajtására – vagy az opciós terminológiával kifejezve, végbe kell vinni a kontraktust.

Az opciós megállapodások két formát ölthetnek: vételi és eladási opciók. A *vételi opció* olyan megállapodás, amely megengedi a befektetőnek adott eszköz megvásárlását bizonyos idő elteltével, meghatározott áron, megkövetelve az opciót jegyzőtől annak eladását. A kontraktus megkötésének időpontjában a két fél megállapodik abban az árban, amely mellett a vásárlás lebonyolítható, s abban az időtartamban, amelyen belül az adásvétel elvégezhető.

Az *eladási opció* abban különbözik a vételi opciótól, hogy a birtokos számára az eszköz eladását engedi, vétel helyett.

Az opciós megállapodásoknak hagyományosan két kategóriáját tartják számon, amelyek mindössze abban különböznek, hogy milyen korlátozást alkalmaznak a megállapodás teljesítésének idejére. Az *európai opció* kontraktusa csak a megállapodott időtartam végén, azaz a lejárat időpontjában érvényesíthető. Ezzel szemben az *amerikai opció* bármikor érvényesíthető, beleértve a lejárat időpontját is. Az amerikai opció megállapodása nyilvánvalóan nagyobb rugalmasságot biztosít birtokosának, ami nemcsak értékesebbé teszi az ilyen opciót, hanem megnehezíti az értékelését is.

Röviden összefoglalva öt elem szükséges az opciós megállapodás jellemzéséhez vagy leírásához.

1. Az opció típusa – vételi vagy eladási

2. Az alapul szolgáló eszköz – valamilyen közönséges részvény, földterület vagy más eszköz, amit az opciós megállapodás birtokosa megvesz vagy elad a kontraktus teljesítésekor.

3. Az opció lejárati ideje – az opció lejárati idejét T, a folyó időszakot t szimbólummal jelöljük. Így annak az opciónak, amelynek T a lejárati ideje, $T-t$ nap van hátra a lejáratáig.

4. Lebonyolítási (kötési) ár – az opció lebonyolítási árának jelölésére a K szimbólumot használjuk.

5. Az érvényesítés típusa – amerikai vagy európai. Ehelyütt a vizsgálódás az európai opcióra vonatkozik, amelynek egyetlen érvényesítési ideje van (T), s így azt könnyebb értékelni, mint az amerikai opciót.

A Black-Scholes opció-értékelési modell

Black és Scholes matematikai modellt fejlesztett ki az opciók értékelésének meghatározására. Ehelyütt a modell intuitív magyarázatát adjuk. Ez az értékelési mód a következő lépéseken keresztül érthető meg.

1. lépés: A jövőbeli részvényár időben változatlan

Ha a részvényár időben változatlan, akkor a vételi opció értékelés alapmodellje szerint a V_c érték úgy számítható, hogy a P folyó részvényárból levonjuk az X kötési ár jelenlegi értékét. Formulával kifejezve a vételi opció értéke a következő:

$$V_c = P - \frac{X}{(1+r)^t} \qquad (1)$$

Az egyenletben diszkrét kamatos-kamatozást feltételezünk. Folyamatos kamatozást feltételezve az (1) egyenletet a következők szerint írhatnánk át:

$$V_c = P - Xe^{-rt} \qquad (2)$$

ahol az $e = 2.71828$ közelítő értékű konstans.

2. lépés: A részvényár időbeni változást mutat

Ebben az esetben a (2) egyenletet korrigálnunk kell a bizonytalanság miatti fluktuációval. Ha azt feltételezzük, hogy a részvényár megtérülés normális eloszlást követ, akkor a (2) egyenletben a P és X paramétert egyaránt korrigálni kell, a részvényár időbeli fluktuációja által keltett bizonytalanságnak megfelelően. A vételi opció értékelési modellje így írható fel:

$$V_c = PN(d_1) - Xe^{-rt}N(d_2) \tag{3}$$

ahol

$$d_1 = \frac{d_1 = \left[\ln(P/X) + (r + 0.5\sigma^2)\right]t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

$r =$ kockázatmentes ráta

$t =$ az opció megszűnéséig terjedő idő (években)

A (3) egyenlet a jól ismert Black-Scholes opció értékelési modell. Az $N(d_1)$ és $N(d_2)$ korrekciós faktor reprezentálja a kumulált standard normális eloszlási függvényt. $N(d_1)$ és $N(d_2)$ annak a valószínűsége, hogy a standard normális eloszlású véletlen változó d_1 és d_2 értéknél kisebbet vesz fel. $N(d_1)$ és $N(d_2)$ értékei standard normális eloszlású értékeket tartalmazó táblából vehetők.

A (3) egyenlet alkalmas meghatározott vételi opció 2001. január 12-re vonatkozó elméleti értékének kiszámítására, ha az opció 2001 júliusában jár le. Ebben az esetben X=55 dollár, P=54.875 dollár, σ=0.1434,

r=0.0563 és t=0.52 (év). Ezen adatokat felhasználva meghatározható $d_1$és d_2 értéke.

$$d_1 = \frac{\left[\ln(54.875/55)+\left(0.0563+0.5(0.1434)^2\right]\cdot 0.52\right.}{(0.1434)\sqrt{0.52}} = 0.313$$

$$d_2 = 0.313-(0.1434)\sqrt{0.52} = 0.21$$

Az $N(d_1)$ és $N(d_2)$ értékének meghatározásához használjuk a táblázatot. A kumulált normális eloszlású függvény megtalálásához a Z<0 valószínűséghez hozzá kell adni a táblázatban található értéket. Mivel a standard normális eloszlás a zérus körül szimmetrikus, 0.5 annak a valószínűsége, hogy a Z<0, így $N(d_1)$ és $N(d_2)$ a következők szerint számítható:

$$\begin{aligned} N(d_1) &= P(Z < d_1) = P(Z < 0) + P(0 < Z < d_1) \\ &= 0.5 + 0.1231 \\ &= 0.6231 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(d_2) &= P(Z < d_2) = P(Z < 0) + P(0 < Z < d_2) \\ &= 0.5 + 0.0832 \\ &= 0.5832 \end{aligned}$$

Behelyettesítve az adatokat a Black-Scholes formulába, a következőt kapjuk:

$$V_c = 54.875(0.6231) - (55)(0.5832)e^{-(0.0563)(0.52)} = 3.04 \text{ dollár}$$

Az aktuális ár 2001. január 12-én 2.75 dollár volt.

Az opció értékelési modell alkalmazása tőke-költségvetési problémához

A tőkeberuházások a dimenziók sokaságában különbözhetnek egymástól. Mindazonáltal egységességük fontos forrása ama flexibilitáshoz kapcsolódik, amit a beruházás a vállalat számára kínál. Ebben az összefüggésben a flexibilis beruházás olyan, ami az alkalmazások és hasznosítások széles változatát nyújtja azt követően, hogy a vállalat birtokba vette. Így egy beruházás flexibilitása olyasmiket foglal magában, mint a beruházás felhasználási módjának változtatása (például szénfűtésű elektromos erőmű olajtüzelésűre történő átállítása), az eszköz használati idejének lejárta előtt történő eladása, vagy a beruházás elvetése. A flexibilitásról egyszerűen úgy gondolkodunk, mint „opciók" létezéséről, amely értéket ad a beruházáshoz, s ennek következtében be kell építeni a főbb tőke-beruházási döntések értékelésébe. Ennek alapján egy olyan tőke-költségvetési probléma, amely az említett jellegű opciókat tartalmazza, nem alapozható egyedül a projekt működtetése során keletkező várható pénzáramokra. Az egy vagy több opciót magában foglaló tőke-költségvetési probléma értékelésekor ki kell számítanunk egy „kiterjesztett NPV" értéket, amely a következők szerint definiálható:

$$\text{Kiterjesztett NPV} = \text{Statikus NPV} + \text{Opciós prémium}$$

Az itt számított NPV érték a projekt várható pénzáramain alapul, a statikus NPV számításra támaszkodik, amihez hozzá kell adni a „menedzseri flexibilitás" értékét az opciós prémium formájában. Az opció értékelési elmélet felhasználása az említett opciós prémium meghatározásához, új horizontokat nyit a tőke-költségvetés számos alapvető problémájának vizsgálatához.

a. Analizálni lehet ama opció értékét, hogy időleges leállítás történik, vagy szélsőséges esetben a projektet az anticipált birtoklási periódus lejárta előtt elvetik.

b. Értékelni lehet az eszközök más célra történő újrafelhasználását az üzleti környezetben akkor, ha a jövő bizonytalan, a várakozások pedig nem teljesülnek. E probléma olyan opcióként konceptualizálható, mint az egyik jószág vagy annak halmaza egy másikra váltható. Az alkalmazásbeli flexibilitás lényegében a váltási opciók létezése, s eme eshetőségek egyértelműen növelik az eszköz értékét.

c. Elemezni az adott beruházásból származó jövőbeli növekedés opciójának értékét. Myers[97] dichotomizálja a vállalati részvénytőke értékét két komponensre bontással: az eszköz létezésének értéke és a növekedési lehetőségek értéke. Egy tőkeberuházás felfogható pontosan ugyanilyen formában; a jobb növekedési lehetőségekkel bíró eszközök, minden egyéb tényezőt változatlannak tekintve, magasabb értékkel rendelkeznek.

Az opció értékelési elmélet egyszerű alkalmazása az elvetési/eladási opció példáján keresztül illusztrálható. Vegyünk egy beruházást, amely 100 ezer dollár azonnali kifizetését igényli két éves anticipált megtérülési pénzáram nyerése reményében. A két év pénzáram értéke várhatóan 60 ezer és 50 ezer dollár az első és második évben. Ha a várható pénzáram értékeket 10%-os kamatráta alkalmazásával jelenre diszkontáljuk, akkor az NPV értékére -4 132.24 dollárt kapunk, jelezve azt, hogy a projektet nem célszerű elfogadni.

[97] Myers (1977)

$$\text{Statikus } NPV = \frac{60\,000}{(1.10)^1} + \frac{50\,000}{(1.10)^2} - 100\,000 = -4\,132.24$$

Most vegyük egy olyan opció birtoklása hatásának értékét, amely az eszköz első év végén realizálható maradványértékére vonatkozik. Ez lényegében azt jelenti, hogy megtörténik az eladási opció első év végén történő elvetése, ami azt igényli, hogy a vállalat mellőzze a második évi pénzáramot. Következésképpen a második évi várható pénzáram első év végére vetített jelenlegi értéke lesz az opció lebonyolítási ára, amelynek kifizetése az eszköz elvetési értéke. Így a kiterjesztett NPV a következővel lesz egyenlő:

$$\text{Kiterjesztett NPV} = \text{Eladási opció} - 4132.24$$

ahol az eladási opció azt az értéket fejezi ki, amit az opció mai elvetéséhez társítunk. Az elvetési eladási opció értékelése megnehezül azáltal, hogy az alapul szolgáló eszköz maradványértéken történő aktív adásvétele nem lehetséges, pedig az opció jegyzése arra vonatkozik. Ez komoly problémát okoz az opció értékelésében akkor, ha tradicionális kockázatmentes „hedge" eljárást alkalmaznak. Végső soron ugyanakkor, ha meghatározzák a statikus NPV értéket, s elhelyezik azt a kiterjesztett NPV modellben, akkor az elemző megismeri az alacsonyabb határt az elvetési eladási opció értékére vonatkozóan, ami az eszközt megvásárlásra alkalmassá teszi.

Sok tennivaló akad még annak érdekében, hogy az opció értékelési elmélet produktív eszközökbe irányuló beruházásokhoz alkalmazható formula kifejlesztése megtörténjék. A jelenlegi megközelítés ama flexibilitás jellemzésére ad módot, amely benne foglaltatik a különböző beruházási alternatívákban, s ama menedzseri erőfeszítésekre irányul, amelyek a tőkeköltségvetési folyamat megfelelő kezelését biztosítják.

IRODALOMJEGYZÉK

Alchian, A. A.: The Rate of Investment, Fisher's Rate of Return over Cost, and Keynes' Internal Rate of Return. American Economic Review, December 1955

Alchian, A.: The Meaning of Utility Measurement. American Economic Review, 1953/42 26-50. pp

Alexander, G. J.-Sharpe, W. F.: Fundamentals of Investments. Prentice Hall, 1989 678 pp

Arditti, F. D.: The Weighted Average Cost of Capital: Some Questions on Its Definition, Interpretation and Use. Journal of Finance, September 1973

Arditti, F. D.-Levy, H.: The Weighted Average Cost of Capital as a Cut-off Rate: A Critical Analysis of the Classical Textbook Weighted Average. Financial Management Fall 1977

Arrow, K. J.: Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risk-Taking Situations. Econometrica 1951/19 404-437. pp

Arrow, K. J.: The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing. Review of Economic Studies, 1964/31 91-96. pp

Baron, D. P.: Default Risk and the Modigliani-Miller Theorem: A Synthesis. American Economic Review, March 1976

Baumol, W. J.: An Expected Gain – Confidence Limit Criterion for Portfolio Selection. Management Science, October 1963 174-182. pp

Baumol, W. J.-Malkiel, B. G.: The Firm's Optimal Debt-Equity Combination and the Cost of Capital. Quarterly Journal of Economics, November 1967

Beranek, W.: The Cost of Capital, Capital Budgeting and the Maximization of Shareholder Wealth. Journal of Financial and Quantitative Analysis, March, 1975

Bierman, H.: Risk and the Addition of Debt to the Capital Structure. Journal of Financial and Quantitative Analysis, December 1968

Bierman, H.-Smidt, S.: Capital Budgeting and the Problem of Reinvesting Cash Proceeds. Journal of Business, October 1957

Black, F.: Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing. Journal of Business, July 1972 444-454. pp

Black, F.-Scholes, M.: The Effects of Dividend Yield and Dividend Policy on Common Stock Prices and Returns. Journal of Financial Economics, May 1974

Black, F.-Scholes, M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy, May-June 1973 637-654. pp

Black, F.-Scholes, M.: The Valuation of Options Contracts and a Test of Market Efficiency. Journal of Finance, May 1972 399-418. pp

Blume, M. E.: The Relative Efficiency Various Portfolios: Some Further Evidence. Journal of Finance, May 1980

Blume, M.-Friend, I.: A New Look at the Capital Asset Pricing Model. Journal of Finance, March 1973 19-33. pp

Bogue, M. C.-Roll, R.: Capital Budgeting of Risky Projects With "Imperfect" Markets for Physical Capital. Journal of Finance, May 1974 601-613. pp

Brealy, R.-Myers, S.: Principles of Corporate Finance. McGraw Hill, 1984 847 pp

Brennan, M.: A Note on Dividend Irrelevance and the Gordon Valuation Model. Journal of Finance, December 1971

Brigham, E. F.: Hurdle Rates for Screening Capital Expenditure Proposals. Financial Management, Autumn 1975

Brigham, E.-Gordon, M. J.: Leverage, Dividend Policy, and the Cost of Capital. Journal of Finance, March 1968

Cass, D.-Stiglitz, J.: The Structure of Investor Preferences and Asset Returns, and Separability in Portfolio Allocation: A Contribution to the Pure

Theory of Mutual Funds, Journal of Economic Theory, February 1970 122-160. pp

Chen, N. F.-Roll, R.-Ross, S.: Economic Forces and the Stock Market. Journal of Business, July 1986 383-403. pp

Cohen, K. J.-Pogue, G. A.: An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio Selection Models. Journal of Business, April 1967 166-193. pp

Copeland, T. E.-Weston, J. F.: Financial Theory and Corporate Policy. Addison-Wesley Publishing Company, 1988 536 pp

Dean, J.: Measuring the Productivity of Capital. Harvard Business Review, January-February 1954

Diamond, P.-Stiglitz, J.: Increases in Risk and in Risk Aversion. Journal of Economic Theory, 1974/8 337-360. pp

Dorfman, R.: The Meaning of the Internal Rate of Return. Journal of Finance, December 1981

Durand, D.: Growth Stocks and the Petersburg Paradox. Journal of Finance, September 1957

Durand, D.: The Cost of Capital in an Imperfect Market: A Replay to Modigliani and Miller. American Economic Review, September 1959

Durand, D.: The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment: Comment. American Economic Review, September 1959

Epstein, L. G.-Turnbull, S. M.: Capital Asset Prices and the Temporal Resolution of Uncertainty. Journal of Finance, June 1980

Fama, E. F.: Agency Problems and the Theory of the Firm. Journal of Political Economy, April 1980 288-298. pp

Fama, E. F.: Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. Journal of Finance, May 1970 383-417. pp

Fama, E. F.: Risk Adjusted Discount Rates and Capital Budgeting under Uncertainty. Journal of Financial Economics, August 1977 3-24. pp

Fama, E. F.: Risk, Return and Equilibrium: Some clarifying Comments. Journal of Finance, March 1968

Fama, E. F.: Stock Returns, Expected Returns and Real Activity. Journal of Finance, September 1990 1089-1108. pp

Fama, E. F.: The Behavior of Stock Market Prices. Journal of Business, January 1965 34-105. pp

Fama, E. F.: The Empirical Relationship between the Dividend and Investment Decisions of Firms. American Economic Review, June 1974 304-318. pp

Fama, E. F.:Components of Investment Performance. Journal of Finance, June 1972 551-568. pp

Fama, E. F.-French, K. R.: Business Conditions and Expected Returns on Stocks and Bonds. Journal of Financial Economics, 1989/25 23-49. pp

Fama, E. F.-French, K. R.: Dividend Yields and Expected Stock Returns. Journal of Financial Economics, October 1988 3-25. pp

Fama, E. F.-French, K. R.: Permanent and Temporary Components of Stock Prices. Journal of Political Economy, April 1988 246-273. pp

Fama, E. F.-Jensen, M. C.: Agency Problems and Residual Claims. Journal of Law and Economics, June 1983 301-325. pp

Fama, E.: The Empirical Relationships between the Dividend and Investment Decisions of Firm. American Economic Review, June 1974

Finnerty, J. E.: Insiders and Market Efficiency. Journal of Finance, September 1976

Fisher, L.-Lorie, J. H.: Rates of Return on Investments in Common Stocks. Journal of Business, January 1964

Fleischer, G. A.: Capital Allocation Theory. Appleton-Century-Crofts, 1969 285 pp

Francis, J. C.: Investments: Analysis and Management. McGraw Hill Inc. 1991 825 pp

Friedman, M.-Savage, L. J.: The Utility Analysis of Choices Involving Risk. Journal of Political Economy, August 1948 279-304. pp

Gordon, M. J.: Optimal Investment and Financing Policy. Journal of Finance, May 1963

Gordon, M. J.-Shapiro, E.: Capital Equipment Analysis: The Required Rate of Profit. Management Science, October 1956

Gordon, M.: The Savings, Investment and Valuation of a Corporation. Review of Economics and Statistics, February 1962 37-51. pp

Hakansson, N. H.: Capital Growth and the Mean-Variance Approach to Portfolio Selection. Journal of Financial and Quantitative Analysis, January 1971

Haley, C. V.-Shall, L. D.: Problems with the Concept of the Cost of Capital. Journal of Financial and Quantitative Analysis, December, 1978

Hamada, R. S.: Portfolio Analysis, Market Equilibrium and Corporate Finance. Journal of Finance, March 1969 13-31. pp

Hamada, R. S.: Portfolio Analysis, Market Equilibrium and Corporation Finance. Journal of Finance, March 1969 435-452. pp

Hamada, R. S.: The Effects of the Firm's Capital Structure on the Systematic Risk of Common Risk. Journal of Finance, May 1972 435-452. pp

Haugen, R.: Modern Investment Theory. Prentice Hall International, 1993 730 pp

Haugen, R.-Senbet, L.: The Insignificance of Bankruptcy Costs to the Theory of Optimal Capital Structure. Journal of Finance, May 1978 383-393. pp

Hertz, D. B.: Risk Analysis in Capital Investment. Harvard Business Review, January-February 1964

Hillier, F. S.: The Derivation of Probabilistic Information for the Evaluation of Risky Investments. Management Science, 1963/9 443-457. pp

Hirshleifer, I.: Investment Decisions Under Uncertainty: Applications of the State Preference Approach. Quarterly Journal of Economics, May 1966

Hirshleifer, I.: On the Theory of Optimal Investment Decision. Journal of Political Economy, August 1958 329-352. pp

Hirshleifer, J.: Efficient Allocation of Capital in an Uncertain World. American Economic Review, May 1964 77-85. pp

Ibbotson, R. G.: Price Performance of Common Stock New Issues. Journal of Financial Economics, September 1975 235-272. pp

Ingersoll, J. E.: Theory of Financial Decision Making. Rowman-Littlefield 1987

Ingersoll, J. E.-Ross, S. A.: Waiting to Invest: Investment and Uncertainty. Journal of Business, March 1992 1-29. pp

Ivison, S.-Moss, C.-Simpson, M. (ed.): British Readings in Financial Management. Harper and Row Publishers, 1986 385 pp

Jarrow, R. A.: Finance Theory. Prentice Hall, 1988 298 pp

Jensen, M. C.: Capital Markets: Theory and Evidence. Bell Journal of Economics, Autumn 1972

Jensen, M. C.: Risk, the Pricing of Capital Assets, and the Evolution of Investment Portfolios. Journal of Business, April 1969

Jensen, M. C.: The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964. Journal of Finance, May 1968 389-416. pp

Jensen, M. C.-Meckling, W. H.: Theory of the Firm: Managerial Behavior Agency Cost and Ownership Structure. Journal of Financial Economics, October 1976 305-360. pp

Krause, A.-Litzenberger, R. H.: A State-Preference Model of Optimal Financial Leverage. Journal of Finance, September 1973

Krouse, C. G.: Optimal Financing and Capital Financing Programs for the Firm. Journal of Finance, December 1972

Kumar, P.: Market Equilibrium and Corporate Finance: Some Issues. Journal of Finance, September 1974

Levy, H.: Equilibrium in an Imperfect Market: A Constraint on the Number of Securities in the Portfolio. American Economic Review, September 1978

Levy, H.-Sarnat, M.: Capital Investment and Financial Decisions. Prentice Hall International 1986 703 pp

Levy, H.-Sarnat, M.: International Diversification of Investment Portfolios. American Economic Review, September 1970 668-675. pp

Lintner, J.: Distribution of Income of Corporations among Dividends, Retained Earnings and Taxes. American Economic Review, May 1956

Lintner, J.: Dividends, Earnings, Leverage, Stock Prices and the Supply of Capital to Corporations. Review of Economics and Statistics, August 1962

Lintner, J.: Optimal Dividends and Corporate Growth under Uncertainty. Quarterly Journal of Economics, February 1964

Lintner, J.: Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification. Journal of Finance, December 1965 589 p.

Lintner, J.: The Cost of Capital and Optimal Financing of Corporate Growth. Journal of Finance, May 1963

Lintner, J.: The valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. Review of Economics and Statistics, February 1965 13-37. pp

Litzenberger, R. H.-Budd, A. P.: Corporate Investment Criteria and the Valuation of Risky Assets. Journal of Financial and Quantitative Analysis, December 1970

Litzenberger, R. H.-Rao, C. V.: Portfolio Theory and Industry Cost-of-Capital Estimates. Journal of Financial and Quantitative Analysis, March, 1972

Lumby, S.: Investment Appraisal and Financing Decisions. Chapman and Hall, 1991 522 pp

Lutz, F.-Lutz, V.:Theory of Investment of the Firm. Princeton University, Princeton 1951

Markowitz, H.: Foundations of Portfolio Theory. Journal of Finance, June 1991 469-477. pp

Markowitz, H.: Portfolio Selection. Journal of Finance, March 1952 77-91. pp

Martin, J. D.-Scott, D. F.: Debt Capacity and the Capital Budgeting Decision: A Revisitation. Financial Management, Spring 1980

Merton, R. C.: On the Pricing on Contingent Claims and the Modigliani-Miller Theorem. Journal of Financial Economics, November 1977

Miller, E.: The Competitive Market Assumption and Capital Budgeting Criteria. Financial Management, Winter 1987

Miller, M. H.: The Modigliani-Miller Propositions After Thirty Years. Journal of Economic Perspectives 1988/2 99-120. pp

Miller, M. H.-Modigliani, F.: Dividend Policy, Growth and the Valuation of Shares. Journal of Business, October 1961 411-433. pp

Miller, M.: Debt and Taxes. Journal of Finance, May 1977 261-275. pp

Miller, M.-Scholes, M.: Dividends and Taxes. Journal of Financial Economics, December 1978

Modigliani, F.-Miller, M. H.: Dividend Policy, Growth and the Valuation of Shares. Journal of Business, October 1961

Modigliani, F.-Miller, M. H.: Taxes and the Cost of Capital: a Correction. American Economic Review, June 1963 433-443. pp

Modigliani, F.-Miller, M. H.: The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment. American Economic Review, June 1958 261-297. pp

Mossin, J.: Equilibrium in a Capital Asset Market. Econometrica, October 1996 768-783. pp

Mossin, J.: Optimal Multiperiod Portfolio Policies. Journal of Business, April 1968 215-229. pp

Mossin, J: Security Pricing and Investment Criteria in Competitive Markets. American Economic Review, December 1969 749-756. pp

Moyer, R. C.-McGuigan, J. R.-Kretlow, W. J.: Contemporary Financial Management. West Publishing Company, 1990 788 pp

Myers S. C.-Turnbull, S. M.: Capital Budgeting and the Capital Asset Pricing Model: Good News and Bad News. Journal of Finance, May 1977 321-332. pp

Myers, S. C.: Determinants of Corporate Borrowing. Journal of Financial Economics, November 1977

Myers, S. C.: Interactions of Corporate Financing and Investment Decisions – Implications for Capital Budgeting. Journal of Finance, March 1974 1-25. pp

Myers, S. C.: Procedures for Capital Budgeting Under Uncertainty. Industrial Management Review, Spring 1968 1-15. pp

Neave, E. H.-Wiginton, J. C.: Financial Management Theory and Strategies. Prentice Hall, 1981 581 pp

Neumann, J.-Morgenstern, O.: The Theory of Games and Economic Behaviour. Princeton University Press, 1947

Phillipatos, G. C.: Financial Management. Theory and Techniques. Holden Dary, 1973 661 pp

Pratt, J. W.: Risk Aversion in the Small and in the Large. Econometrica, 1964/32. 122-136. pp

Robichek, A. A.: Interpreting the Results of Risk Analysis. Journal of Finance, December 1975

Robichek, A. A.-Bogue, M. C.: A Note on the Behavior of Expected Price-Earnings Ratios Over Time. Journal of Finance, June 1971

Roll, R.: A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests. Journal of Financial Economics, March 1977 129-176. pp

Roll, R.: A Possible Explanation of the Small Firm Effect. Journal of Finance, September 1981 879-888. pp

Roll, R.: Measuring Portfolio Performance and the Empirical Content of Asset Pricing Models: A Replay. Journal of Financial Economics, 1979/7 391-400. pp

Roll, R.: Performance Evaluation and Benchmark Error I. Journal of Portfolio Management, Summer 1980

Roll, R.: Performance Evaluation and Benchmark Error II. Journal of Portfolio Management, Winter 1981

Roll, R.-Ross, S. A.: An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory. Journal of Finance, December 1980 1073-1103. pp

Ross, S. A.: The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing. Journal of Economic Theory, December 1976 341-360. pp

Ross, S. A.-Westerfield, R. W.: Corporate Finance. Times Mirror/Mosby College Publishing, 1988 857 pp

Ross, S.: Mutual Fund Separation in Financial Theory – The Separating Distributions. Journal of Economic Theory, 1978/17 254-286. pp

Rubinstein, M. E.: A Mean-Variance Synthesis of Corporate Financial Theory. Journal of Finance, March 1973

Samuels, J. M.-Wilkes, F. M.: Management of Company Finance. Van Nostrand Reinhold, 1986 638 pp

Sarnat, M.-Levy, H.: The Relationship of Rules of Thumb to the Internal Rate of return: A Restatement and Generalization. Journal of Finance, June 1969

Schall, L. D.: Asset Valuation, Firm Investment and Firm Diversification. Journal of Business, January 1972 11-28. pp

Scholes, M.: The Market for Securities: Substitution versus Price Pressure and the Effects of Information on Share Prices. Journal of Business, April 1972 179-211. pp

Sharpe, W. F.: A Simplified Model for Portfolio Analysis. Management Science, January 1963 277-293. pp

Sharpe, W. F.: Capital Asset Prices with and without Negative Holdings. Journal of Finance, June 1991 489-509. pp

Sharpe, W. F.: Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Condition of Risk, Journal of Finance, September 1964 425-442. pp

Sharpe, W. F.: Mutual Fund Performance. Journal of Business, January 1966 119-138. pp

Sharpe, W. F.-Alexander, G. I.: Investments. Prentice Hall, 1990 833 pp

Solomon, E.: Leverage and the Cost of Capital. Journal of Finance, May 1963

Solomon, E.: Measuring a Company's Cost of Capital. Journal of Business, October 1955

Solomon, E.: The Arithmetic of Capital Budgeting Decisions. Journal of Business, April 1956

Stapleton, R. C.: Portfolio Analysis, Stock Valuation and Capital Budgeting Rules for Risky Projects. Journal of Finance, March 1971

Stiglitz, J. E.: A Re-Examination of the Modigliani-Miller Theorem. American Economic Review, December 1969 78-93. pp

Stiglitz, J. E.: On the Irrelevance of Corporate Financial Policy. American Economic Review, December 1974 851-866. pp

Tobin, J.: Liquidity Preference as Behavior Toward Risk. Review of Economic Studies, February 1958 65-86. pp

Treynor, J. L.: How to Rate Management of Investment Funds? Harvard Business Review, January-February 1965

Treynor, J. L.: Toward a Theory of Market Value of Risky Assets. Unpublished manuscript, 1961.

Van Horne, J. C.: An Application of the CAPM to Divisional Required Returns. Financial Management, Spring 1980

Wei, K. C.: An Asset-Pricing Theory Unifying the CAPM and APT. Journal of Finance, September 1988

Weston, J. F.: Investment Decisions Using the Capital Asset Pricing Model. Financial Management, Spring 1973

Weston, J. F.-Brigham, E. F.: Managerial Finance. Holt, Rinehart and Winston 1979 718 pp

Weston, J. F.-Copeland, T. E.: Mangerial Finance. Dryden Press, 1992 1182 pp

Wilkes, F. M.: Inflation and Capital Budgeting Decisions. Journal of Business Finance, Autumn 1972

RÖVIDÍTÉS-JEGYZÉK

A	kockázati tartózkodás indexe
APT	arbitrázs értékelési elmélet (Arbitrage Pricing Theory)
A(W)	abszolút kockázati tartózkodás mértéke
A'(W)	az A(W) gazdagság szerinti elsőrendű deriváltja
B = D	idegen tőke (adósság) piaci értéke (Bonds or Debt)
β_{ik}	az i-edik eszköz megtérülésének a k-adik kockázati tényezőrevaló érzékenysége (k = 1,...,K)
β_{iM}	az i-edik eszköz megtérülésének a piaci kockázati tényezőre való érzékenysége
$\beta_j = \frac{COV(R_j R_M)}{\sigma_M^2}$	a j-edik eszköz szisztematikus kockázatának mérőszáma (béta)
β_L	áttételes vállalati béta
β_P	portfolió béta
β_{PF_K}	a portfolió érzékenysége a k-adik kockázati tényezőre

β_S	a vállalati részvénytőke béta értéke
β_U	nem áttételes (kizárólag részvénytőkével finanszírozott) vállalat bétája
$\overline{C}$	várható vagy átlagos pénzáram
C_0	az egyén jelenbeli fogyasztása pénzáramként tekintve
C_1	az egyén 1. évben történő fogyasztása pénzáramként tekintve
C_2	az egyén 2. évben történő fogyasztása pénzáramként tekintve
C_i	pénzáram lehetséges értéke
C_t	befektetésből származó pénzáram a t-edik periódusban (t = 1,...,n)
$\tilde{C}_t$	befektetésből származó bizonytalan pénzáram a t-edik periódusban (t = 1,...,T)
CAPM	a tőkepiaci értékelés egyensúlyi modellje (Capital Asset Pricing Model)
CE	bizonyossági egyenértékes
CE_A és CE_B	az „A" és „B" befektető bizonyossági egyenértékese
CI_t	a kölcsön összegét és a kamatokat magában foglaló visszafizetés a t-edik időpontban (t = 1,...,n)
$COV(R_i\ R_j)$	az i-edik és a j-edik értékpapír megtérülése közötti kovariancia

$COV(R_j\, R_M)$	a j-edik eszköz megtérülése és a piaci portfolió megtérülése közötti kovariancia
$COV(\varepsilon_i\, R_M)$	a véletlen hiba és a piaci portfolió megtérülése közötti kovariancia
CV	szóródási koefficiens vagy relatív szórás
D_t	t-edik periódus osztalékfizetése (t = 1,...,n)
E	részvénytőke
EBIT	kamat és adófizetés előtti nyereség (Earnings Before Interest and Taxes)
E(C)	pénzáramok várható értéke
E(NPV)	várható nettó jelenérték
EPS	részvényegységre jutó nyereség (Earnings Per Share)
$E(R_j)$ vagy $\overline{R}_j$	a j-edik eszköz, vagy projekt vagy értékpapír várható megtérülése
$E(R_j^e)$	a j-edik értékpapír egyensúlyi várható megtérülése
$E(R_M)$ vagy $\overline{R}_M$	piaci portfolió várható megtérülése
$E(R_p)$ vagy $\overline{R}_p$	a portfolió várható megtérülése
$E(S_1)$ és $E(S_2)$	alternatív beruházási stratégiák várható értéke
E(U)	várható hasznosság
E(x) vagy μ	véletlen változó várható értéke
ε_i	véletlen hiba

$E(\varepsilon_i)$	véletlen hiba várható értéke
$f(x) = p(X \leq x)$	kumulált valószínűségi eloszlás
$F_1,\ldots, F_k$	kockázati tényezők
H	birtokolt eszközök darabszáma
I	adózás utáni éves kamatteher
I'	adózás előtti éves kamatteher
I_0	a beruházás kezdeti kiadása
k	tőke haszonáldozati költsége, amely tökéletes tőkepiacon, bizonyosság feltételezése mellett megfelel az R_F kockázatmentes kamatrátának.
K = R	költség = megtérülés elvárás (Cost = Return)
$K_B = K_D$	kölcsöntőke költsége adózás után
$K_B' = K_D'$	kölcsöntőke költsége adózás előtt
K_{ES}	részvénytőke költsége a személyi jövedelemadó fizetése után (tőkésítési ráta)
K_E^L	áttételes vállalat részvénytőke költsége
K_E	részvénytőke költsége
K_U	nem áttételes (kizárólag részvénytőkével finanszírozott) vállalat (részvény)tőkeköltsége
α	optimizmus koefficiens
α_i	az i-edik eszköz vagy értékpapírt jellemző paraméter a piaci modellben

λ	egységnyi kockázat piaci ára
NPV	nettó jelenérték (Net Present Value)
η	várakozások elaszticitása
p_i	az i-edik pénzáram lehetséges bekövetkezési valószínűsége $(i = 1,...,n)$
$p(S_1)$ és $p(S_2)$	alternatív beruházási stratégiák lehetséges kimeneteinek bekövetkezési valószínűsége
P_0	az eszköz beszerzési ára
P_1	1. periódusvégi eszközár
P_E	egy részvény piaci értéke
π_t	a (adózás előtti) profit a t-edik időszakban
r	beruházás értékeléséhez használt, kockázattal korrigált diszkontráta
R	megtérülési ráta vagy piaci kamatráta
R^0	feltételezett újra-befektetési ráta
R^2	a korrelációs koefficiens négyzete
R_F	kockázatmentes kamatráta vagy megtérülési ráta
R_g	megtérülések mértani átlaga
R_M	piaci portfolió vagy index megtérülési rátája
R_{ps}	lehetséges portfolió megtérülés *s* működési állapotban
R_t	megtérülési ráta a t-edik periódusban

R^e	a befektetés belső megtérülési rátája
$R(W)$	relatív kockázati tartózkodás mértéke
$R'(W)$	az R(W) a W elsőrendű deriváltja
$S = E$	részvénytőke piaci értéke (Share or Equity)
ρ_{ij}	az i-edik és a j-edik értékpapír megtérülése közötti korreláció koefficinse
S_1 és S_2	alternatív beruházási stratégiák
σ_A és σ_B	az „A" és „B" projekt vagy értékpapír megtérülésének szórása
$\sigma_A^2 = VAR(A)$	az „A" projekt vagy portfolió megtérülés varianciája
$\sigma_B^2 = VAR(B)$	a „B" projekt vagy portfolió megtérülés varianciája
σ_C	pénzáram szórása
σ_i	az i-edik értékpapír megtérülésének szórása
$\sigma_i^2 = VAR(R_i)$	az i-edik értékpapír megtérülési varianciája
σ_j^{NS}	a j-edik értékpapír nem szisztematikus kockázata
σ_j^S	a j-edik értékpapír szisztematikus kockázata
σ_M	a piaci portfolió szórása
$\sigma_M^2 = VAR(R_M)$	a piaci portfolió varianciája
σ_p	a portfolió megtérülésének szórása

$\sigma_P^2 = VAR(P)$	portfolió megtérülés varianciája
σ_P^{NS}	a portfolió nem szisztematikus kockázata
σ_P^S	a portfolió szisztematikus kockázata
$\sigma_{\varepsilon_i}^2 = VAR(\varepsilon)$	véletlen hiba varianciája vagy reziduális variancia
T	vállalati adóráta
T_D	a kötvény-jövedelem személyi adó rátája
T_S	a részvény-jövedelem személyi adó rátája
u	utilisek (hasznosság egységek)
U(CE)	bizonyossági egyenértékes hasznossági indexe
U[E(X)]	várható kimenet hasznossága
U(X)	hasznossági függvény
U = f(W) vagy U(W)	a hasznosság gazdagsági függvénye
U'(W) = dU/dW	marginális hasznosság
x	lehetséges kimeneti érték
x_1, x_2, x_3	egyes stratégiák lehetséges kimenetei
Y_1	az egyén jövedelme az 1. évben
Y_2	az egyén jövedelme a 2. évben
V	a vállalat piaci értéke
V_1	a vállalat piaci értéke az 1. időpontban

V_L	áttételes vállalat értéke
V_U	nem áttételes (kizárólag részvénytőkével finanszírozott) vállalat értéke
WACC	súlyozott átlagköltség
$VAR(C) = \sigma_C^2$	pénzáram varianciája
VAR(x)	véletlen változó varianciája
w_i	az i-edik értékpapír portfolióbeli súlyaránya
W	a gazdagság jele
W_0	az egyén induló forrása
W_t	periódusvégi vagyon
W_{t-1}	periódus eleji vagyon
$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$	standard mérték, mely a normális eloszlású görbe alatti területet mutatja, a várható értéktől mért, szórásegységben kifejezett távolság alapján

ÁBRAJEGYZÉK

TÁBLÁK JEGYZÉKE

TÁRGYMUTATÓ

A

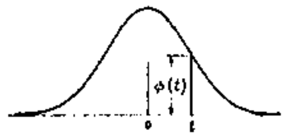
H

O

A STANDARD NORMÁLIS ELOSZLÁS TÁBLÁZATAI

STANDARD NORMAL CURVE ORDINATES

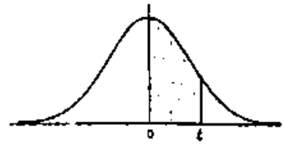
This table gives values $\phi(t)$ of the standard normal distribution ϕ at $t \geq 0$ in steps of 0.01.



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.3089	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3080	.3977	.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.9	.2661	.2637	.2613	.2689	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1532	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1146	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0396	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.1	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026	.0025	.0025
3.2	.0024	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0020	.0019	.0018	.0018
3.3	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0013	.0013
3.4	.0012	.0012	.0012	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010	.0009	.0009
3.5	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007	.0007	.0007	.0006
3.6	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0004
3.7	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003	.0003	.0003	.0003
3.8	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
3.9	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001

STANDARD NORMAL CURVE AREAS

This table gives areas under the standard normal distribution ϕ between 0 and $t \geqq 0$ in steps of 0.01.



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000