MATEMATIKA

MATEMATIKA

az Orvosi Laboratóriumi
és Képalkotó Diagnosztikai Analitikus
alapszak hallgatói részére

Szerző:

Nagy István

Medicina Könyvkiadó Zrt. • Budapest, 2014

A kiadvány a következő program keretében jelent meg:
TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0106

Lektor:
Farkas János

ISBN 978 963 226 454 7

Borítóterv: Bede Tamásné
Műszaki szerkesztő: Kökösi-Sigmond Gábor
Az ábrákat rajzolta: Olgyay Gézáné
Az animációkat készítette: Nagy István
Azonossági szám: 3697

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Ezen tananyag az orvosdiagnosztikai laboratóriumi és képalkotó diagnosztikus szak hallgatói számára íródott. A megírás oka az, hogy nem áll rendelkezésre olyan könyv vagy jegyzet, ami éppen azt az ismeretanyagot tartalmazná, amire ezen a szakon szükség van. Léteznek kitűnő könyvek, amelyek jól használhatóak az ismeretek elmélyítésére, de általában sokkal több anyagot tárgyalnak, mint amennyit a szakon oktatunk. Emiatt a hallgatóknak erősen szelektálniuk kellene, ami a felkészülést túlzottan munka- és időigényessé tenné.

A tananyag célja tehát az, hogy a szakon szükséges matematikai ismereteket foglalja össze olyan jól kezelhető elektronikus formában, ami segíti az anyag megértését és elsajátítását.

Az oktatás és a tananyag is természetes módon épít a középiskolai ismeretekre. Célja azonban a magasabb matematikába való betekintés, a differenciál- és integrálszámítás alapjainak átadása. Mivel nem matematikus hallgatókat oktatunk, és a tanterv által rendelkezésünkre bocsátott idő is rövid, sokszor engednünk kell a szigorú matematikai következetességből.

Mint ismert, a matematika axiomatikus tudomány. Ez azt jelenti, hogy minden kimondott tételt korábban igazolt tételekre vezet vissza, azok alapján bizonyítja be a tétel igazságát. A visszavezetés azonban nem folytatódhat a végtelenségig. Előbb-utóbb eljutunk olyan ítéletekhez, melyeket nem bizonyítunk, hanem alapvető, szemléletünkből következő vagy általánosításokból adódó igazságnak, axiómának fogadjuk el őket. Tulajdonképpen tehát minden tétel az axiómákra vezethető vissza, sorozatos bizonyítások útján.

Ez a következetes levezetés az, amiben komoly megalkuvásokra kényszerülünk. A szakon a matematika oktatásának nem az a célja, hogy minden tételt szigorúan bizonyítsunk, hanem az, hogy a hallgatók használni legyenek képesek matematikai ismereteiket. A megértést és a használatot megkönnyítheti azonban a tételek bizonyításának ismerete. Ismertetünk ezért olyan tételeket, melyeknek bizonyítását leírjuk és ismeretét meg is követeljük a hallgatóktól. Szerepelnek a tananyagban olyan tételek is, melyeket kimondunk és használunk ugyan, de bizonyításukkal hely- és időhiány, a bizonyítás bonyolultsága vagy a szükséges előismeretek hiánya miatt nem foglalkozunk. Néha utalunk szemléletünkre is, ami egy matematikus számára természetesen elfogadhatatlan, de egy analitikus talán hagyatkozhat rá.

Definíciókat is sűrűn fogunk leírni a tananyagban. A definíció a definiálandó fogalmat más, korábban megalkotott, egyszerűbb definíciók segítségével írja le. A legegyszerűbb fogalmakat nincs mire visszavezetnünk, ezeket alapfogalmaknak tekintjük, legfeljebb körülírással írhatjuk le őket. Ilyen alapfogalom például a pont vagy a halmaz.

Kedves Olvasók!

Mindezeket szem előtt tartva fogjanak hozzá az anyag elsajátításához! Higgyék el a szerzőnek, hogy a matematikában sok szépség rejlik, egy-egy feladat megoldása komoly sikerélményt okozhat! Ha néhány hallgató felfedezi ezt a szépséget, a többiek pedig csupán elsajátítják a szükséges ismereteket, akkor a tananyag és a szerző is elérte célját.

1. Halmazok

A halmazok és a velük kapcsolatos definíciók és műveletek központi szerepet játszanak a matematikában. Találkozunk velük a függvénytan, a differenciál- és integrálszámítás, a valószínűségszámítás, a matematikai statisztika tárgyalásánál egyaránt. Fontosságukra való tekintettel áttekintjük a halmazokra vonatkozó alapvető ismereteket annak ellenére, hogy a középiskolai tananyag foglalkozik a halmazokkal.

1.1. A halmaz fogalma

A **halmaz** bizonyos meghatározott dolgok összessége. Ezek a dolgok lehetnek valóságosak is, illetve olyanok, amelyek csak gondolatban léteznek. A halmazokat alkotó dolgokat a **halmaz elemei**nek nevezzük. Azt, hogy egy *a* elem a *H* halmaznak eleme, a következő módon jelöljük:

$$a \in H .$$

A

$$b \notin H$$

jelölés azt fejezi ki, hogy *b* nem eleme *H*-nak.

Meg kell jegyeznünk, mielőtt továbbmennénk, hogy a fenti halmazfogalom nem definíció, csupán a fogalom körülírása. Az *összesség* szó ugyanis a halmaz szinonímája, tehát a fogalmat nem vezettük vissza más, már definiált fogalomra. A halmaz *alapfogalom* a matematikában.

A halmazt többféleképpen megadhatjuk. Ha viszonylag kevés eleme van, akkor egyszerűen felsorolhatjuk az elemeket, kapcsos zárójelek közé téve őket:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

vagy

$$C = \{hétfő, kedd, szerda, csütörtök, péntek, szombat, vasárnap\}. \tag{1.1}$$

Megadhatjuk a halmazt definícióval is. Például az (1.1) felsorolás helyett használható a következő forma:

$$C = \{A\, hét\, napjai\}.$$

Nagyon fontos, hogy egyértelműen el tudjuk dönteni egy elemről, hogy az adott halmazhoz tartozik-e vagy sem. A következő definíció például nem megfelelő:

$$D = \{Az\, évfolyam\, magas\, hallgatói\}, \tag{1.2}$$

mivel az, hogy ki a magas, nem egyértelműen meghatározott. (1.2) helyett például a következő definíció lehet jó:

$$D = \{Az\ évfolyam\ 175\ cm\text{-}nél\ magasabb\ hallgatói\}.$$

Ha felsorolással kívánjuk megadni a halmazunkat, de nagyon sok elemünk van, és van analógia az elemek között, akkor nem feltétlenül kell megadnunk az összes elemet. Három ponttal jelezhetjük a kihagyott, de értelemszerűen a halmazhoz tartozó elemeket:

$$E = \{1, 2, 3, ..., 40\}. \tag{1.3}$$

Végtelen sok elemet tartalmazó halmaz elemeit eleve lehetetlen felsorolni:

$$F = \{10, 11, 12, 13, ...\}.$$

Ez a jelölésmód azonban nem teljesen szabatos, hiszen a halmaz definíciója szerint nem kell összefüggésnek lennie az elemek között.

Ezen esetekben a szabatos eljárás a következő: keresünk egy olyan, már definiált halmazt, ami tartalmazza az általunk megadni kívánt halmaz összes elemét, és megadjuk azt a tulajdonságot, amely egyértelműen kijelöli az általunk definiálni kívánt halmaz elemeit.

A matematikában több nevezetes számhalmazt definiálunk és rendszeresen hivatkozunk is rájuk. Ezek a halmazok a tananyagban használt jelölésükkel együtt a következők:

$\mathbb{N}^+$: a pozitív egész számok halmaza;

$\mathbb{N}$: a nem negatív egész számok halmaza;

$\mathbb{N}^-$: a negatív egész számok halmaza;

$\mathbb{Z}$: az egész számok halmaza;

$\mathbb{Q}$: a racionális számok halmaza;

$\mathbb{Q}^*$: az irracionális számok halmaza;

$\mathbb{R}$: a valós számok halmaza.

Eszerint például az (1.3) halmazdefiníció a következő alakban korrekt:

$$E = \left\{x:\ x \in \mathbb{N}^+ \,\middle|\, x \le 40\right\}.$$

A definícióban a függőleges jel (|) feltételt jelöl. Eszerint tehát azok a pozitív egész számok elemei E-nek, melyek eleget tesznek annak a feltételnek, hogy 40-nél nem nagyobbak.

Két alapvető definíció a halmazokra vonatkozóan:

1.1. definíció: Két halmaz akkor és csak akkor *egyenlő*, ha elemeik ugyanazok.

Jelölés: $A = B$.

Tehát A és B halmaz csak akkor egyenlő, ha $a \in A$ esetén $a \in B$ is teljesül, és ha $b \notin A$, akkor $b \notin B$ is igaz.

A definícióból adódik, hogy a halmaz elemeinek sorrendje közömbös.

1.2. definíció: Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, *üres halmaz*nak nevezzük.

Jelölés: $\varnothing$.

Ez utóbbi definícióval kiterjesztettük a halmaz eredeti definícióját, hiszen a szemléletes fogalomba nem fér bele olyan „összesség”, ami üres. Minden esetben üres halmazhoz vezetnek a logikai ellentmondások, illetve a teljesíthetetlen feltételek. Például:

$$G = \left\{ x : x \in \mathbb{R} \middle| \sin x > 1 \right\},$$

vagy

$$H = \left\{ x : x \in \mathbb{N}^+ \middle| x < 0 \right\}.$$

A $G = \varnothing$ és $H = \varnothing$ összefüggések egyaránt igazak a feltételek teljesíthetetlensége miatt.

1.2. Részhalmaz, tartalmazás

1.3. definíció: Az A halmazt a B halmaz *részhalmaz*ának nevezzük, ha A minden eleme egyúttal B-nek is eleme.

Jelölés: $A \subseteq B$, esetleg $B \supseteq A$.

Az 1.1. definíció szerint igaz a következő állítás: $A = B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A \subseteq B$ és egyúttal $B \subseteq A$ is igaz.

Az 1.3. definíció szerint minden halmaz részhalmaza (része) önmagának. Bevezetünk egy erősebb fogalmat is:

1.4. definíció: Az A halmazt a B halmaz *valódi részhalmaz*ának nevezzük, ha $A \subseteq B$ teljesül, de $A \neq B$.

Jelölés: $A \subset B$, esetleg $B \supset A$.

Vagyis: $A \subset B$ akkor és csak akkor, ha A minden eleme B-nek is eleme, de B-nek van olyan eleme is, ami A-nak nem eleme.

A $\subseteq$, illetve a $\subset$ jelet a tartalmazás, illetve a valódi tartalmazás jelének nevezzük. Ha ezek ellenkezőjét kívánjuk hangsúlyozni, akkor a $\not\subseteq$ és a $\not\subset$ jelet használhatjuk. Tehát $N \not\subset L$ azt jelöli, hogy N halmaz nem részhalmaza L halmaznak.

Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza, valamint minden nem üres halmaznak valódi részhalmaza:

$$\varnothing \subseteq H \text{ és } \varnothing \subset J,$$

ahol H tetszőleges halmaz, J tetszőleges nem üres halmaz.

1.3. Műveletek halmazokkal

1.5. definíció: Két halmaz *unió*ja (vagy *egyesített*je) az a halmaz, amely az összes olyan elemet tartalmazza, amely valamelyik halmaznak eleme.

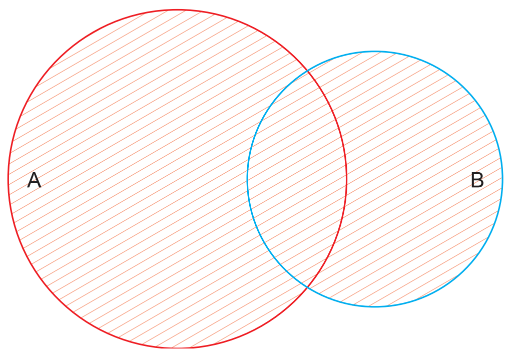
Jelölés: $A \cup B$.

A következő képzési szabállyal adhatjuk meg az A és a B halmazok unióját:

$$A \cup B = \{ x : x \in A \text{ vagy } x \in B \}$$

Tehát az unió képzése a *vagy* kötőszóval adható meg. A *vagy* kétféle értelemben használható. A *megengedő vagy* azt jelenti, hogy vagy az egyik állítás igaz, vagy a másik, vagy mindkettő. Például: ha könyvtárba megyek, akkor könyvet kölcsönzök vagy folyóiratot olvasok. Az is előfordulhat, hogy mindkettőt megteszem egyidejűleg. A *kizáró vagy* szigorúbb: a két állítás közül csak az egyik lehet igaz. Például: a hallgató a határidő lejárta előtt leadja a házi dolgozatát, vagy elégtelent kap. Látható, hogy az unió definíciójában a megengedő vagy szerepel.

A halmazok viszonyait és a rajtuk végzett műveleteket jól szemléltethetjük *Venn-diagram*ok segítségével. Az unió műveletét az 1.1. ábrán mutatjuk be. A halmazokat síkidomokkal, általában körökkel ábrázoljuk. Megadjuk az ábrán a jelölésüket, de beleírhatjuk a körökbe a halmaz elemeit vagy az elemek számát is.



1.1. ábra Halmazok uniója Venn-diagramon.
Az A és B halmaz unióját vonalazás jelöli.

Példák:

1. Ha $A = \{1,3,5,7,9\}$ és
   $B = \{2,4,6,8,10\}$, akkor
   $A \cup B = \{x : x \in \mathbb{N}^+ \,|\, x < 11\}$.
2. Ha $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ és

$B = \{2,4,6,8,10\}$, akkor

$A \cup B = \left\{x : x \in \mathbb{N}^+ \middle| x < 11\right\}$ az előző példához hasonlóan.

A definíció alapján könnyen belátható, hogy az unióképzésnek a következő tulajdonságai vannak:

$$A \cup B = B \cup A \text{ (kommutativitás),} \tag{1.4}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ (asszociativitás),} \tag{1.5}$$

$$A \cup A = A \text{ (idempotencia),} \tag{1.6}$$

$$A \cup \varnothing = A\,. \tag{1.7}$$

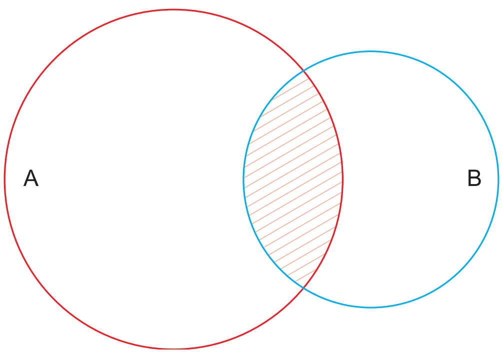
1.6. definíció: Két halmaz *metszet*e (vagy *közös része*) az a halmaz, amely az összes olyan elemet tartalmazza, amelyik mindkét halmaznak eleme.

Jelölés: $A \cap B$.

A metszethalmaz képzési szabálya a következő:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ és } x \in B\}$$

A műveletet az 1.2. ábra szemlélteti.



1.2. ábra Halmazok metszete

Ha nincs olyan elem, amelyet *A* és *B* halmaz is tartalmaz, akkor a metszet üres:

$$A \cap B = \varnothing.$$

Ilyen esetben azt mondjuk, hogy a két halmaz *idegen* (*diszjunkt*).

Példák:

1. Ha $A = \left\{x : x \in \mathbb{N}^+ \middle| x < 20\right\}$ és

   $B = \left\{x : x \in \mathbb{N}^+ \middle| x > 10\right\}$, akkor

$A \cap B = \left\{ x : x \in \mathbb{N}^+ \middle| 10 < x < 20 \right\}$, vagy másképp:

$A \cap B = \{11,12,13,14,15,16,17,18,19\}$.

2. Ha $A = \{1,3,5,7,9\}$ és

$B = \{2,4,6,8,10\}$, akkor

$A \cap B = \varnothing$.

A metszetképzésnek az (1.4) – (1.7) azonosságokhoz hasonló tulajdonságai vannak:

$$A \cap B = B \cap A \text{ (kommutativitás),}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \text{ (asszociativitás),}$$

$$A \cap A = A \text{ (idempotencia),}$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing .$$

Az unióképzésre és a metszetképzésre együtt a következő, könnyen belátható azonosságok érvényesek:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), \tag{1.8}$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \tag{1.9}$$

$$A \cup (A \cap B) = A, \tag{1.10}$$

$$A \cap (A \cup B) = A. \tag{1.11}$$

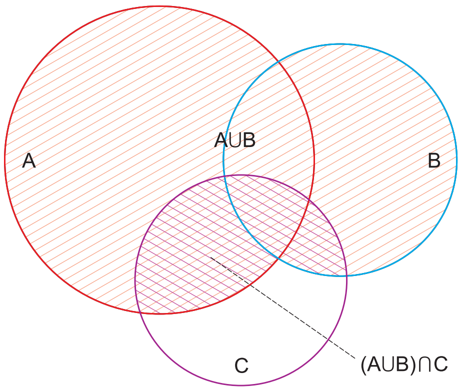
(1.8) és (1.9) a *disztributív* tulajdonságok, (1.10) és (1.11) az *elnyelési* tulajdonságok.

Hogy bemutassuk az ilyen azonosságok igazolásának menetét, igazoljuk például az (1.9) összefüggést.

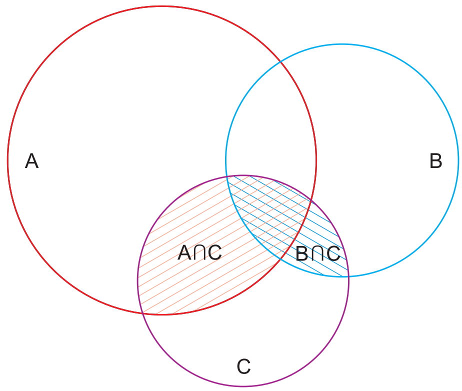
A definíciók alapján a következő lehet a bizonyítás menete:

- Egy adott a elemre $a \in (A \cup B) \cap C$ akkor és csak akkor teljesül, ha egyrészt $a \in C$, másrészt pedig $a \in A$ vagy $a \in B$.
- Az, hogy $a \in C$, valamint $a \in A$ vagy $a \in B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a \in C$ és $a \in A$, vagy $a \in C$ és $a \in B$ (a két eset egyidejűleg is fennállhat a *vagy* megengedő értelmében).
- De $a \in C$ és $a \in A$ azt jelenti, hogy $a \in A \cap C$, emellett $a \in C$ és $a \in B$ azt jelenti, hogy $a \in B \cap C$.
- $a \in A \cap C$ vagy $a \in B \cap C$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
- Összegezve: $a \in (A \cup B) \cap C$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ teljesül, az állítást ezzel igazoltuk.

A bizonyítás jól illusztrálható és követhető Venn-diagramon történő ábrázolással. Az 1.3. ábra az (1.9) azonosság baloldalát, az 1.4. ábra a jobboldalát ábrázolja.



1.3. ábra Az (1.9.) egyenlet baloldalának Venn-diagramja



1.4. ábra Az (1.9.) egyenlet jobboldalának Venn-diagramja ($A \cap C$ jobbra dőlően, $B \cap C$ balra dőlően vonalazott.)

Látható, hogy az 1.3. ábrán a duplán vonalazott síkidom ($(A \cup B) \cap C$) ugyanaz, mint az 1.4. ábrán a vonalazott síkidom ($(A \cap C) \cup (B \cap C)$).

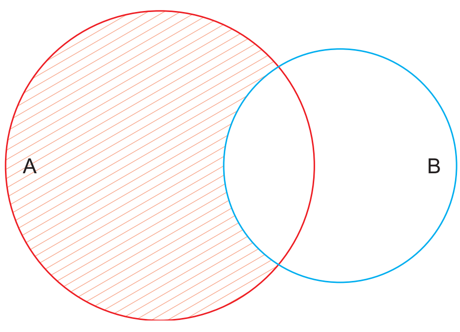
1.7. definíció: Az A és B halmazok *különbségén* azt a halmazt értjük, amelyik A minden olyan elemét tartalmazza, amelyik B-nek nem eleme.

Jelölés: $A \setminus B$ vagy $A - B$.

A különbséghalmaz képzési szabálya a következő:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \ de \ x \notin B\}$$

Az $A \setminus B$ halmazt az 1.5. ábra szemlélteti.



1.5. ábra Az A és a B halmazok különbsége ($A \setminus B$)

Természetesen a B és az A halmazok különbségét hasonlóan értelmezzük: a $B \setminus A$ halmaz B minden olyan elemét tartalmazza, amelyik A-nak nem eleme.

Példa:

Ha $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ és

$B = \{2,4,6,8,10\}$, akkor

$A \setminus B = \{1,3,5\}$ és $B \setminus A = \{8,10\}$.

A különbségképzésre a következő azonosságok érvényesek:

$$A \setminus A = \varnothing,$$

$$A \setminus \varnothing = A,$$

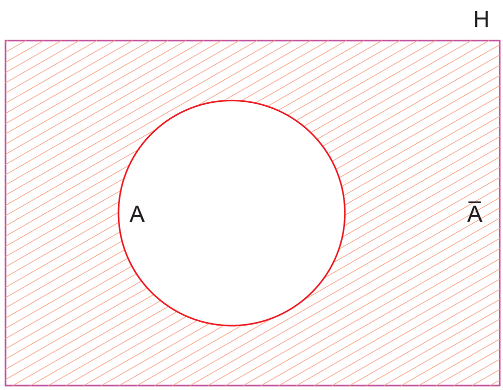
$$\varnothing \setminus A = \varnothing .$$

A különbségképzés nem asszociatív és nem kommutatív.

1.8. definíció: Legyen egy nem üres H halmaznak egy részhalmaza A. Az A halmaz H-ra vonatkozó *komplementer*én (*kiegészítőjé*n) a $H \setminus A$ halmazt értjük.

Jelölés: $\overline{A}$, precízebben $\overline{A_H}$.

Az $\overline{A_H}$ halmazt az 1.6. ábra szemlélteti.



1.6. ábra Az A halmaz komplementere H halmazon

Példa:

Ha $H = \{\mathbb{N}^+\}$ és

$A = \{\text{páros számok}\}$, akkor

$\overline{A} = \{\text{páratlan számok}\}$.

A definícióból közvetlenül adódnak a következő azonosságok:

$$\overline{\overline{A}} = A,$$
$$\overline{H} = \varnothing,$$
$$\overline{\varnothing} = H,$$
$$A \bigcup \overline{A} = H,$$
$$A \bigcap \overline{A} = \varnothing, (1.12)$$

vagyis (1.12) értelmében A és $\overline{A}$ (azaz halmaz és komplementere) diszjunkt halmazok.

1.4. A függvény

1.9. definíció: Ha egy *A* halmaz elemeihez hozzárendeljük a *B* halmaz egy-egy elemét, akkor ezzel a művelettel egy, az *A* halmazból a *B*-be vivő *függvény*t értelmezünk.

Jelölés: $f : A \to B$.

Az *A* halmazt a függvény *alaphalmaz*ának, a *B*-t a függvény *képhalmaz*ának nevezzük.

B-nek azt az elemét, amelyiket az *f* függvény az *A* halmaz *x* eleméhez rendeli, $f(x)$ -szel jelöljük és az *f* függvény *x helyen* felvett *helyettesítési érték*ének, rövidebben *érték*ének nevezzük. Hangsúlyozzuk, hogy a későbbiekben a függvényekkel kapcsolatban gyakran használt „*hely*” fogalom az alaphalmaz egy-egy elemét, míg az „*érték*” fogalom mindig a képhalmaz egy-egy elemét jelenti.

Az alaphalmaz és a képhalmaz is nagyon sokféle lehet. Egy síkidomhoz hozzárendelhetjük a tükörképét, a Föld felszínének pontjaihoz koordinátaértékeket rendelhetünk, a hallgatók csoportjának minden tagjához hozzárendelhetjük a magasságát, vagy az elektromos erőtér minden pontjához egy, a térerősséget megadó vektort rendelhetünk. Mindegyik esetben függvényt kapunk.

Tanulmányainkban kiemelkedő jelentősége lesz az olyan függvényeknek, amelyekkel valós számokhoz valós számokat rendelünk ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Ezeket a függvényeket *egyváltozós valós függvény*eknek nevezzük. Ha az alaphalmazt valós számpárok képezik, míg a képhalmazt valós számok ($f : (\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$), akkor *kétváltozós valós függvény*ről beszélünk. Ilyenekkel is fogunk találkozni, de a mi tananyagunkban jelentőségük kisebb.

Nagyon fontos kiemelni, hogy a függvénykapcsolat egyértelmű hozzárendelés, azaz az alaphalmaz *egy* eleméhez a képhalmazból csak *egy* elemet rendelhetünk, többet nem. Visszafelé ez nem igaz, a képhalmaz egy eleme tartozhat az alaphalmaz több eleméhez is. Ha például az alaphalmaz elemeihez a négyzetüket rendeljük hozzá, akkor a 2-höz és a –2-höz is a 4 tartozik. Ha viszont a négyzetgyöküket, akkor nem mondhatjuk azt, hogy az alaphalmazból a 4-hez a képhalmazból a 2-t és a –2-t is hozzárendeljük (bár mindkét szám négyzete 4), mert így nem függvényt kapnánk. Emiatt úgy definiáljuk a négyzetgyökfüggvényt, hogy az alaphalmaz egy eleméhez a képhalmazból azt a *nem negatív* számot rendeljük hozzá, amit önmagával megszorozva az alaphalmaz elemét kapjuk meg. Így már függvénykapcsolatot létesítettünk a két halmaz között.

Egy adott függvényt nem feltétlenül kell értelmeznünk az egész alaphalmazon, illetve sokszor nem is tudjuk ezt megtenni. Meg kell adnunk, hogy az alaphalmaz mely értékeihez rendelünk a képhalmazból elemeket, és tudnunk kell azt is, hogy a képhalmaz mely elemei lesznek függvényértékek.

1.10. definíció: Az $f : A \to B$ függvény *értelmezési tartomány*án az A halmaz azon részhalmazát értjük, amelynek elemeihez f ténylegesen rendel elemeket a B-ből. A B halmaz azon részhalmazát pedig, melynek elemeit f hozzárendeli az A legalább egy eleméhez, a függvény *értékkészlet*ének nevezzük.

Jelölés: D_f az f függvény értelmezési tartománya, R_f az értékkészlete. (Használatos még a Dom f és a Ran f jelölés is.)

Az alaphalmaz és a képhalmaz nem egyértelműen meghatározott a függvények esetében, hiszen ha $A \subseteq C$ és $B \subseteq D$, akkor az $f : A \to B$ jelölés helyett nyilvánvalóan használhatjuk az $f : C \to D$ jelölést. Tehát egy-egy nagyon bő halmaz megadásával gyakorlatilag szabadon kijelölhetjük az alaphalmazt és a képhalmazt is.

Az értelmezési tartománnyal és az értékkészlettel már bonyolultabb a helyzet. Nem minden függvény értelmezhető ugyanis a teljes alaphalmazán. Például a négyzetgyökfüggvény csak a nem negatív számokon értelmezhető, hiszen akár negatív, akár pozitív számot szorzunk meg önmagával, az eredmény pozitív lesz. Emiatt az értelmezési tartomány eleve az alaphalmaznak csak egy valódi részhalmaza. Ezen túl azonban megtehetjük azt is, hogy a lehetséges legbővebb értelmezési tartományt önkényesen, céljainknak megfelelően korlátozzuk. Az értékkészlet megadása soha nem önkényes, mindig az értelmezési tartománytól függ. Meghatározása sokszor komoly megfontolásokat igényel.

Példa:

Tekintsük az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{x-3}+4$$

függvényt!

Mivel a négyzetgyökjel alatt nem állhat negatív szám, az $x-3 \geq 0$ feltétel miatt

$$D_f = \{x : x \in \mathbb{R} | x \geq 3\}.$$

Ez a lehetséges legbővebb értelmezési tartomány. Az ehhez tartozó értékkészlet meghatározása némi számolást igényel:

– a négyzetgyökfüggvény szigorúan monoton növekvő (lásd a 3.8 definíciót);
– a négyzetgyökjel alatti legkisebb érték 0 lehet, emiatt a legkisebb függvényérték 4 lesz;
– a gyökjel alatt bármilyen nagy pozitív szám állhat, a négyzetgyök mindig pozitív, tehát a függvényérték tetszőlegesen nagy pozitív szám lehet.

Összegezve:

$$R_f = \{ f(x) : f(x) \in \mathbb{R} | f(x) \geq 4 \}.$$

Ez a halmaz a lehetséges legbővebb értékkészlet.

Megtehetjük azonban, hogy a lehetséges legbővebb halmazon belül szűkítjük az értelmezési tartományt. Kiköthetjük például a

$$D_f = \{ x : x \in \mathbb{R} | 12 \leq x \leq 28 \}$$

feltételt, azaz az *f* függvényt csak ezen a halmazon értelmezzük. Ebben az esetben az értékkészletre az

$$R_f = \{ f(x) : f(x) \in \mathbb{R} | 7 \leq f(x) \leq 9 \}$$

halmaz adódik.

A későbbiekre nézve megállapodunk a következőkben:

- A jelölés egyszerűsítése érdekében nem fogunk megadni alaphalmazt és képhalmazt, ha egyváltozós valós függvényekről beszélünk. Ilyenkor tudjuk, hogy az alaphalmaz és a képhalmaz is a valós számok halmaza.
- Ha nem adjuk meg külön az értelmezési tartományt, akkor mindig azt a legbővebb halmazt tekintjük értelmezési tartománynak, ahol a függvény egyáltalán értelmezhető, az értékkészlet pedig ezen halmaz leképezéséből adódó halmaz lesz.
- A szabatos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x)$ jelölés helyett általában egyszerűsített, de a gyakorlatban elterjedten használt jelölést fogunk alkalmazni. Például az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^3$ helyett az $x \mapsto x^3$ vagy az $f(x) = x^3$ formát, leggyakrabban az utolsót.
- Használni fogjuk az $y = f(x)$ típusú jelölést is. Ez a jelölés tulajdonképpen a függvény képének egyenlete a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben, de jól használható a függvény megadására is. Ha ilyen típusú jelölést alkalmazunk, akkor *x*-et *független*, *y*-t *függő változó*nak nevezhetjük.

Feladatok

1. Adottak a következő halmazok:

$$H = \{ Emberek \};$$

$$A = \{ A \text{ } Balatonnál \text{ } tartózkodó \text{ } emberek \};$$

$$B = \{ Magyarok \};$$

$$C = \{ Nyaraló \text{ } emberek \}.$$

Adja meg halmazműveletek segítségével a következő halmazokat:

$$D = \{ A \text{ } Balatonnál \text{ } nyaraló \text{ } külföldiek \};$$

$E = \{Magyarok,\ akik\ nincsenek\ a\ Balatonnál\}$;

$F = \{Nem\ a\ Balatonnál\ nyaraló\ emberek\}$;

$G = \{A\ Balatonnál\ lévő\ nem\ nyaraló\ magyarok\}$!

2. Adottak a következő halmazok:

$H = \{-5,\ -4,\ \ldots,\ 3,\ 4,\ 5\}$;

$A = \{Páros\ számok\}$;

$B = \{Hárommal\ osztható\ számok\}$;

$C = \{Negatív\ számok\}$.

Sorolja fel a következő halmazok elemeit:

$D = A$,

$E = B \cap C$,

$F = (A \cap B) \setminus C$,

$G = (A \cup B) \cap C$!

Figyelem: a nulla páros és hárommal is osztható!

3. Adottak a következő halmazok:

$H = \{x : x \in \mathbb{N}^+ | 1 \le x \le 16\}$;

$A = \{Páratlan\ számok\}$;

$B = \{Néggyel\ osztható\ számok\}$;

$C = \{Kétjegyű\ számok\}$.

Sorolja fel a következő halmazok elemeit:

$D = \overline{C}$,

$E = B \cap C$,

$F = A \cup B$,

$G = C \setminus \overline{A}$!

2. Vektorok

Röviden áttekintjük a vektorokkal kapcsolatos, számunkra legfontosabb ismereteket. A szükséges mértékben túllépünk a középiskolai tananyag összefoglalásán, újdonságokat is fogunk tárgyalni.

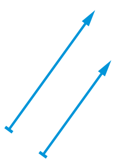
2.1. A vektor definíciója

A fizikából ismerjük, hogy a mennyiségeket alapvetően két csoportba sorolhatjuk be. Az egyik csoportba az olyan mennyiségek tartoznak, melyeknek nagyságuk lényeges, irányuk viszont nem értelmezett. Ezeket *skalármennyiségek*nek nevezzük, ilyen például a tömeg, a sűrűség, az út, a hőmérséklet és sok más mennyiség. Sok mennyiségnek azonban nem csak a nagysága, hanem az iránya is fontos, ezek a *vektormennyiségek*. Ilyen az erő, a sebesség, az elmozdulás, az elektromos térerősség.

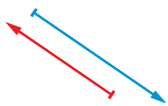
Innen származik a vektor szemléletes fogalma:

2.1. definíció: *Vektor*on irányított szakaszt értünk. Két vektor *egyező állású*, ha egyeneseik párhuzamosak, ellenkező esetben *különböző állású*ak.

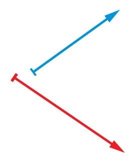
Egyező állású vektorok lehetnek *egyező irányú*ak (vagy *egyirányú*ak), ha a kezdőpontjukból induló, a végpontjukon átmenő félegyenesek eltolással fedésbe hozhatóak. Ha ez nem lehetséges, akkor a vektorok *ellentétes irányú*ak. Az elmondottakat a 2.1., 2.2. és a 2.3. ábra szemlélteti.



2.1. ábra Egyező állású, egyező irányú vektorok



2.2. ábra Egyező állású, ellentétes irányú vektorok



2.3. ábra Különböző állású vektorok

Jelölés: nyomtatásban vastagon szedett kisbetű (például **a**), kézírásban aláhúzott betű, illetve a kezdő- és a végpont feltüntetése ($\overrightarrow{AB}$, ha a vektor az A pontból a B pontba mutat).

2.2. definíció: Vektor *abszolútértékén, nagyságán vagy hosszán* a vektort ábrázoló irányított szakasz hosszát értjük.

Jelölés: az **a** vektor abszolútértéke $|\mathbf{a}|$.

Minden olyan vektort, melynek abszolútértéke 1, *egységvektor*nak nevezünk. *Nullvektor*nak olyan vektort nevezünk, melynek abszolútértéke 0. Eszerint a nullvektor kezdő- és végpontja egybeesik, iránya tetszőleges. Megállapodás szerint a nullvektor minden vektorral egyező állású és irányú, ez azt is jelenti, hogy minden vektorra merőleges is. Jelölése: **0**.

2.3. definíció: *Két vektor szögé*n azt a szöget értjük, amelyet egy tetszőlegesen felvett pontból kiinduló, az adott vektorokkal egyező irányú félegyenesek bezárnak.

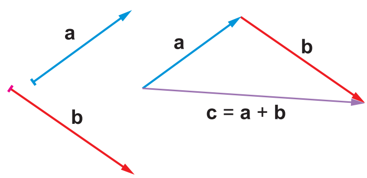
Jelölés: az **a** és a **b** vektor szöge $(\mathbf{a},\mathbf{b})_{\sphericalangle}$.

A definíció szerint $0° \le (\mathbf{a},\mathbf{b})_{\sphericalangle} \le 180°$.

Mivel a vektoroknak nagyságuk és irányuk is fontos, két vektor akkor egyenlő, ha nagyságuk és irányuk is megegyezik (azaz párhuzamos eltolással egymással fedésbe hozhatók).

2.2. Vektorok összege

2.4. definíció: Az **a** és a **b** vektor **c** összegén a következő szerkesztéssel kapott vektort értjük:



2.4. ábra Vektorok összeadása

Eltoljuk a **b** vektort úgy, hogy kezdőpontja az **a** vektor végpontjába essen, majd vektort szerkesztünk **a** kezdőpontjából **b** végpontjába (2.4. ábra).

Jelölés:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Látható, hogy a három vektor három szakasza egy háromszög három oldalát alkotja (ez a háromszög szakasszá válik, ha **a** és **b** egyállásúak). Emiatt

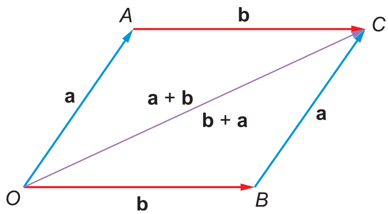
$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

2.1. tétel: A vektorösszeadás kommutatív és asszociatív művelet, azaz tetszőleges **a**, **b** és **c** vektorokra:

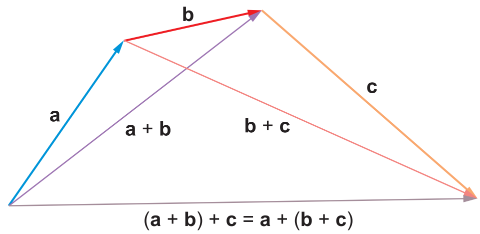
$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a},$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

A kommutatív tulajdonságot a 2.5. ábra, az asszociativitást a 2.6. ábra szemlélteti. A tételt nem bizonyítjuk.



2.5. *ábra* A vektorösszeadás kommutativitása



2.6. *ábra* A vektorösszeadás asszociativitása

A 2.5. ábráról leolvasható nem egyállású vektorok összeadásának egy másik, az előzővel egyenértékű szabálya: a két összeadandó vektort közös kezdőpontba toljuk, a vektorok végpontjain át párhuzamosokat húzunk. Az így kapott paralelogrammának a vektorok közös kezdőpontjából a szemközti csúcsba mutató vektor lesz az összeg. Ez a vektorok összeadásának *paralelogrammaszabály*a.

2.3. Vektorok különbsége

Tekintsük az összeadást a számok körében:

$$a+b=x\ ,$$

ahol x a keresett számot, az összeget jelöli.

Vizsgálhatjuk azonban azt is, hogy egy adott d számhoz mit kell hozzáadni, hogy e-t kapjunk, ekkor a következőt írhatjuk:

$$d+x=e\ .$$

Az összefüggésben szereplő ismeretlen x számot e és d *különbség*ének nevezzük, keresésének műveletét pedig *kivonás*nak. Jelölése:

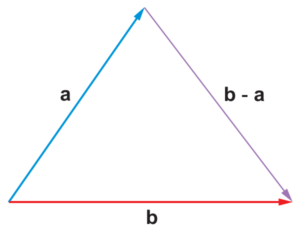
$$x=e-d\ .$$

A kivonás a számok körében tehát az összeadás inverze, a vektorok körében hasonlóan értelmezzük.

2.2. tétel: A vektorösszeadás invertálható művelet, azaz tetszőleges **a** és **b** vektorhoz mindig található olyan **x** vektor, hogy $\mathbf{a}+\mathbf{x}=\mathbf{b}$.

Bizonyítás

A bizonyításban megmutatjuk, hogy hogyan szerkeszthetjük meg a keresett $\mathbf{x}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$ vektort. Eltoljuk a **b** vektort úgy, hogy kezdőpontja az **a** vektor kezdőpontjába essen, majd vektort szerkesztünk **a** végpontjából **b** végpontjába (2.7. ábra).



2.7. ábra Vektorok különbsége

Az ábrán látható, hogy az így megszerkesztett vektorra valóban igaz, hogy $\mathbf{a}+\left(\mathbf{b}-\mathbf{a}\right)=\mathbf{b}$.

Számok ellentettjéhez hasonlóan az **a** vektor ellentettjének nevezzük és (–**a)**-val jelöljük azt a vektort, melyre $\mathbf{a}+\left(-\mathbf{a}\right)=\mathbf{0}$.

2.4. Vektor szorzása skalárral

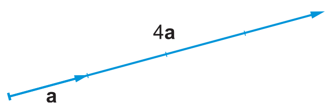
A valós számok körében, ha több azonos számot kell összeadnunk, akkor az összeadást *szorzás*sal helyettesítjük. Például:

$$3+3+3+3=4\cdot 3=12$$

Ennek analógiájára értelmezhetjük vektor skalárral (számmal) történő szorzását:

$$\mathbf{a}+\mathbf{a}+\mathbf{a}+\mathbf{a}=4\mathbf{a}.$$

Ha egy vektort önmagához háromszor hozzáadjuk (tehát összesen négyszer vesszük), akkor olyan vektort kapunk, ami **a**-val egyező irányú, hossza pedig **a** hosszának négyszerese (2.8. ábra).



2.8. ábra Vektor szorzása néggyel (skalárral)

A példát általánosítva a következő definíciót kapjuk:

2.5. definíció: Az **a** vektor *λ-szorosá*n (*λ* görög betű, kiejtése „lambda") azt a *vektor*t értjük, melynek abszolútértéke *λ* abszolútértékének és **a** abszolútértékének szorzata, vagyis $|\lambda||a|$, iránya **a** irányával megegyezik, ha *λ* pozitív, ellentétes vele, ha *λ* negatív. A definícióban *λ* valós szám.

Megállapodunk, hogy $\lambda\mathbf{a}=\mathbf{a}\lambda$ legyen.

Vektor számmal történő osztását a szorzásra vezetjük vissza a következőképpen:

$$\frac{\mathbf{a}}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\mathbf{a}\quad(\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq 0).$$

Ennek legfontosabb alkalmazása: ha egy adott $\mathbf{a}$ $(\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$ vektort elosztunk saját abszolútértékével, akkor az $\mathbf{a}$ irányú *egységvektor*t kapjuk meg. Ennek magyarázata a következő:

Jelöljük az eredményként kapott vektort $\mathbf{e}$-vel, vagyis

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}.$$

Iránya megegyezik $\mathbf{a}$ irányával, mivel $\frac{1}{|\mathrm{a}|}$ szorzó pozitív, hossza pedig 1 az

$$|\mathbf{e}| = \left|\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right| = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|} = 1$$

levezetés szerint.

Fontos speciális esetek:

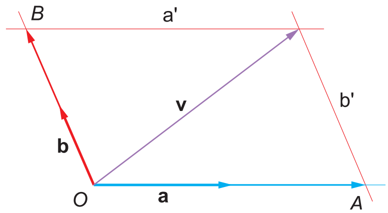
$$0\mathbf{a} = \mathbf{0}; \quad 1\mathbf{a} = \mathbf{a}; \ (-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}; \quad k\mathbf{0} = \mathbf{0}. \tag{2.1}$$

Az igazolásokat az olvasóra bízzuk.

2.5. Vektor felbontása összetevőire

A 2.5. ábra kapcsán találkoztunk a vektorösszeadás paralelogrammaszabályával. Ennek a szabálynak a segítségével bonthatunk fel vektorokat összetevőikre, erre vonatkozik a következő tétel.

2.3. tétel: Ha két vektor különböző állású, akkor bármely vektor felbontható ezzel a két vektorral egyező állású összetevőkre, és ez a felbontás egyértelmű (2.9. ábra).



2.9. ábra Vektor felbontása összetevőire

Bizonyítás

Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két különböző állású vektor, bontsuk fel a $\mathbf{v}$ vektort a velük egyező állású összetevőkre! Ha szükséges, akkor eltoljuk a három vektort közös kezdőpontba. Meghúzzuk a *b'* egyenest $\mathbf{v}$ végpontján keresztül úgy, hogy párhuzamos legyen $\mathbf{b}$-vel. Mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem egyállásúak, ezért *b'* biztosan metszi $\mathbf{a}$-t vagy annak egyenesét egy *A* pontban. A $\mathbf{v}$ végpontján át húzott, $\mathbf{a}$-val párhuzamos *a'* egyenes $\mathbf{b}$ egyenesét egy *B* pontban metszi.

Mivel az $\overrightarrow{OA}$ vektor egy egyenesbe esik **a**-val, $\overrightarrow{OB}$ pedig **b**-vel, létezik olyan p és q valós szám, hogy

$$\overrightarrow{OA} = p\mathbf{a} \qquad \text{és} \qquad \overrightarrow{OB} = q\mathbf{b}\,.$$

De

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\,,$$

tehát

$$\mathbf{v} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}, \tag{2.2}$$

ahogyan a tételben állítottuk.

Az egyértelmű felbontás azt jelenti, hogy csak egyetlen p illetve q szám tesz eleget a feltételeknek. Azt, hogy ez valóban így van, indirekt módon bizonyítjuk.

Tegyük fel, hogy **v** egy másik,

$$\mathbf{v} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} \tag{2.3}$$

alakban is előállítható, ahol x és y szintén valós számok. Ekkor azonban (2.2) és (2.3) jobboldala is egyenlő, tehát

$$p\mathbf{a} + q\mathbf{b} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}\,.$$

Ebből átrendezéssel

$$(p-x)\mathbf{a} = (y-q)\mathbf{b}$$

adódik. Ha $x \neq p$ lenne, akkor oszthatnánk az egyenletet $(p-x)$-szel:

$$\mathbf{a} = \frac{y-q}{p-x}\mathbf{b}$$

Ez azt jelenti, hogy **b**-t egy valós számmal, $\dfrac{y-q}{p-x}$-szel szorozva **a** állna elő. Ez azonban nem lehetséges, mivel **a** és **b** nem egyállású vektorok.

Hasonló módon belátható, hogy y sem különbözhet q-tól, tehát a tétel igaz.

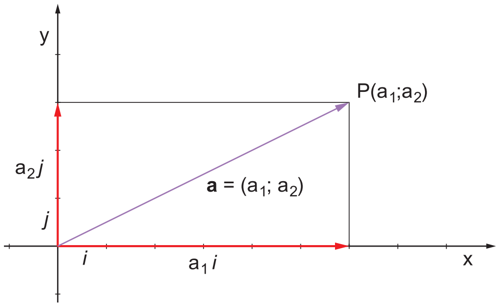
2.6. Vektor koordinátái

Felveszünk a síkon egy derékszögű koordinátarendszert. Felveszünk továbbá két, egymásra merőleges egységvektort, melyek az origóból indulnak ki. Az egyik az (1;0) pontba mutat, ezt **i**-vel jelöljük, a másik a (0;1) pontba, ezt **j**-vel. **i** és **j** *alapvektorok* vagy *bázisvektorok*, mert a 2.3. tétel értelmében a sík bármely **v** vektora egyértelműen felbontható **i**-vel és **j**-vel párhuzamos összetevőkre (2.10. ábra):

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}.$$

(Természetesen **i**-n és **j**-n kívül más vektorpárok is alkothatnak bázist.)

Az összefüggésben szereplő v_1 és v_2 valós számok a vektor *koordinátái*.



2.10. ábra Vektor felbontása tengelyirányú összetevőkre

Jelölés: $\mathbf{v}[v_1;v_2]$ vagy $\mathbf{v}=[v_1;v_2]$.

A koordináták rendezett számpárt alkotnak, egyértelműen definiálnak egy vektort (2.4. tétel). A rendezettség azt jelenti, hogy a koordináták sorrendje is lényeges, nem csak értékük.

Néha előnyösebb lehet, ha a koordinátákat nem egy sorba, hanem egy oszlopba írjuk:

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Az előbbi esetben sorvektorról, utóbbiban oszlopvektorról beszélhetünk.

Néhány kitüntetett vektor koordinátákkal megadva:

$$\mathbf{0}=[0;0]=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{i}=[1;0]=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{j}=[0;1]=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A továbbiakban néhány, a vektorok koordinátáival felírható tételt fogalmazunk meg.

2.4. tétel: Két vektor akkor és csak akkor egyenlő, ha megfelelő koordinátáik egyenlőek.

Bizonyítás

– Legyen $\mathbf{a}=[a_1;a_2]$ és $\mathbf{b}=[b_1;b_2]$, vagyis

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j} \quad \text{és} \quad \mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}.$$

Ha $a_1=b_1$ és $a_2=b_2$, akkor nyilvánvaló, hogy $\mathbf{a}=\mathbf{b}$.

– Fordítva, ha $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, akkor

$$a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}.$$

Átrendezve:

$$(a_1 - b_1)\mathbf{i} = (b_2 - a_2)\mathbf{j}.$$

Mivel **i**-nek **j** irányú összetevője, valamint **j**-nek **i** irányú összetevője is **0** (hiszen merőlegesek egymásra), így teljesülnie kell az

$$a_1 = b_1 \qquad \text{és} \qquad a_2 = b_2$$

egyenlőségeknek. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

2.5. tétel: Vektor számszorosának koordinátáit megkapjuk, ha a vektor koordinátáit megszorozzuk az adott számmal.

Legyen $\mathrm{a} = [a_1; a_2]$, ekkor a tétel állítása szerint:

$$k[a_1; a_2] = [ka_1; ka_2].$$

Bizonyítás

A vektort összetevőivel felírva és átalakítva:

$$k(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) = k(a_1\mathbf{i}) + k(a_2\mathbf{j}) = (ka_1)\mathbf{i} + (ka_2)\mathbf{j}.$$

2.6. tétel: Koordinátákkal adott vektorok összegének koordinátáit megkapjuk, ha megfelelő koordinátáikat összeadjuk; különbségük koordinátáit pedig úgy kapjuk meg, ha a kisebbítendő vektor koordinátáiból kivonjuk a kivonandó vektor megfelelő koordinátáit.

Képlettel:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{bmatrix}.$$

Láthatjuk, hogy itt előnyös oszlopvektorokat használni.

Bizonyítás

A vektorokat összetevőikkel felírva és átalakítva:

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) + (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = (a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{i}) + (a_2\mathbf{j} + b_2\mathbf{j}) = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}.$$

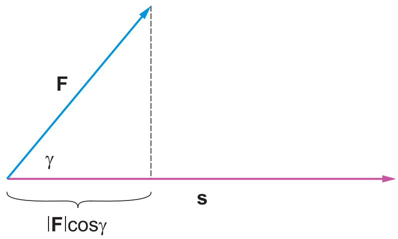
Az átalakításnál felhasználtuk a 2.1. tételt. Az összeadásra vonatkozó állítást igazoltuk, a kivonásra vonatkozó állítás hasonlóan igazolható, felhasználva, hogy $-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a}$ (lásd (2.1) azonosságok).

2.7. Vektorok skaláris szorzata

Az eddigiekben a vektorokkal elvégzett műveletek vektorokat eredményeztek. Vannak azonban olyan esetek is, amikor az eredmény szám kell hogy legyen.

Tekintsünk egy fizikai példát! A munka, ami skaláris mennyiség, arányos a munkát végző erő és az elmozdulás nagyságával. Tudjuk, hogy az erő és az elmozdulás is vektormennyiség. A munka kiszámításakor tehát két *vektor* összeszorzásával *skaláris mennyiséget, szám*ot kapunk eredményül.

Tudjuk továbbá, hogy az erőnek csak az elmozdulással azonos irányú komponense végzi a munkát. Ennek nagysága $|\mathbf{F}|\cos\gamma$, ha $\mathbf{F}$ jelöli az erőt, γ az elmozdulás és az erő által bezárt szöget (2.11. ábra). Az elmondottak alapján a következő definíciót célszerű megalkotni:



2.11. ábra A munka kiszámításához használt mennyiségek

2.6. definíció: Két vektor *skaláris szorzat*án a két vektor abszolútértékének és az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatát értjük.

Jelölés: **a** és **b** skaláris szorzata $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ vagy $\mathbf{ab}$ (de semmiképpen nem $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$).

Képlettel:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_{\sphericalangle}. \tag{2.4}$$

Megjegyzések:

- Az **a** vektor önmagával képzett aa skaláris szorzatát az **a** vektor négyzetének nevezzük, és $\mathbf{a}^2$-tel is jelöljük.
- Mivel minden vektor önmagával 0 fokos szöget zár be, és $\cos 0=1$ így
  $$\mathbf{a}^2=|\mathbf{a}|^2,$$
  vagyis
  $$|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}^2}, \tag{2.5}$$
  ugyanúgy, mint a valós számok esetében.
- Ha **a** és **b** közül valamelyik vagy mindkettő nullvektor, akkor a szorzat értéke 0, mivel nullvektor abszolútértéke nulla. Ez attól függetlenül igaz, hogy a nullvektor iránya nem egyértelmű, és így a szög koszinuszának nagysága sem az.

2.6. tétel: Vektorok skaláris szorzata akkor és csak akkor nulla, ha a vektorok merőlegesek egymásra.

Bizonyítás

– Ha $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, akkor közbezárt szögük 90°, ennek koszinusza nulla, tehát a szorzat nulla.

– Fordítva: ha

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_{\sphericalangle} = 0,$$

akkor a szorzat valamelyik tényezőjének nullának kell lennie.

Ha $|\mathbf{a}| = 0$, akkor **a** nullvektor, ennek iránya tetszőleges, vagyis merőlegesnek tekinthető **b**-re. Hasonló a helyzet akkor is, ha $|\mathbf{b}| = 0$. Ha egyik vektor sem nullvektor, akkor $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_{\sphericalangle} = 0,$ vagyis a két vektor merőleges egymásra.

Két vektor skaláris szorzatát könnyen kiszámíthatjuk a következő tétel segítségével.

2.7. tétel: Koordinátáikkal megadott két vektor skaláris szorzata egyenlő a megfelelő koordináták szorzatainak összegével.

Képlettel:

Ha $\mathbf{a} = [a_1; a_2]$ és $\mathbf{b} = [b_1; b_2]$, akkor

$$\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2. \tag{2.6}$$

Bizonyítás

Felírjuk a két vektort komponenseikkel és átalakítjuk a jobboldalt:

$$\mathbf{ab} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j});$$

$$\mathbf{ab} = (a_1\mathbf{i})(b_1\mathbf{i}) + (a_1\mathbf{i})(b_2\mathbf{j}) + (a_2\mathbf{j})(b_1\mathbf{i}) + (a_2\mathbf{j})(b_2\mathbf{j});$$

$$\mathbf{ab} = a_1 b_1 \mathbf{i}^2 + a_1 b_2 \mathbf{ij} + a_2 b_1 \mathbf{ji} + a_2 b_2 \mathbf{j}^2.$$

Mivel **i** és **j** merőlegesek, szorzatuk a 2.6. tétel értelmében nulla. **i** és **j** abszolútértéke 1, ezért $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = 1.$ Ezek alapján a fenti összefüggés továbbalakítható:

$$\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2,$$

amit bizonyítani akartunk.

Alkalmazások

– A (2.5) azonosságot és a 2.7. tételt összevetve látjuk, hogy vektor abszolútértékét könnyen kiszámíthatjuk az

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \tag{2.7}$$

összefüggéssel.

– (2.4) és (2.6) egyaránt a skaláris szorzat értékét adja, tehát

$$|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_{\sphericalangle} = a_1 b_1 + a_2 b_2. \tag{2.8}$$

Átrendezve és (2.7)-et felhasználva:

$$\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_{\sphericalangle} = \frac{\mathrm{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}, \tag{2.9}$$

vagyis koordinátáikkal adott vektorok szögének koszinuszát a koordinátákból egyszerűen ki tudjuk számolni, ebből pedig a szöget meg tudjuk határozni. Erre az alkalmazásra a 2.10. fejezetben még visszatérünk.

2.8. Vektorok vektoriális szorzata

Ismét fizikai példával kezdünk. Középiskolai tanulmányainkból tudjuk, hogy ha elektromos töltés mágneses térben mozog, akkor erő hat rá. Az erőt a következő két lépésben határozhatjuk meg: ha a mágneses tér indukciója **B**, a töltés sebessége **v**, akkor a töltésre ható erő abszolútértéke

$$|\mathbf{F}| = |\mathbf{v}||\mathbf{B}|\sin(\mathbf{v},\mathbf{B})_{\sphericalangle},$$

amennyiben a töltés nagysága egységnyi.

Az erő *merőleges* a **v** és **B** vektorok által kifeszített síkra (tehát mindkét vektorra), iránya pedig olyan, hogy **v**, **B** és **F** ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert, rövidebben jobbrendszert alkotnak.

A jobbrendszert kétféle módon is definiálhatjuk:

– ha jobb kezünk hüvelykujja mutatja **v**, mutatóujja **B** irányát, akkor **F** irányát a középső ujjunk jelzi;
– ha **v**-t elforgatjuk **B**-be, akkor **F** arra mutat, amerre egy jobbmenetes csavar haladna, ha ugyanilyen irányban forgatnánk.

A vektoriális szorzat definíciója a példának megfelelően a következő:

2.7. definíció: Két vektor *vektoriális szorzat*án vektort értünk, aminek nagyságát és irányát is meg kell adnunk. A vektoriális szorzat

– nagysága a két vektor abszolútértékének és az általuk közbezárt szög szinuszának a szorzata;
– állása a szorzótényezők által kifeszített síkra merőleges,
– iránya pedig olyan, hogy az első tényező, a második tényező és a szorzat ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkot (2.12. ábra).

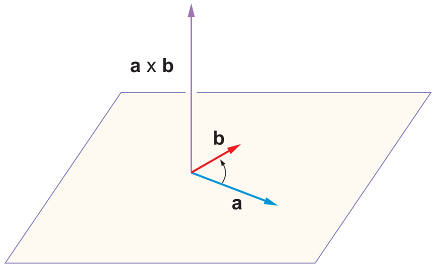
Jelölés: **a** és **b** vektoriális szorzata $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (felolvasva „a kereszt b”):

$$\mathrm{c} = \mathrm{a}\times\mathrm{b}.$$

Nagyságát tehát a

$$|\mathrm{c}| = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_{\sphericalangle}.$$

formulával számíthatjuk ki, állását és irányát a definíció alapján határozzuk meg.



2.12. ábra Vektorok vektoriális szorzata

2.8. tétel: Két vektor vektori szorzata akkor és csak akkor nullvektor ($\mathbf{0}$), ha a két vektor egyező állású.

Bizonyítás

– Ha $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, akkor közbezárt szögük vagy 0° vagy 180°, mindkettőnek nulla a szinusza, ezért

$$|\mathrm{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cdot 0 = 0,$$

vagyis

$$\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

– Fordítva: ha

$$\mathbf{c} = \mathbf{0},$$

akkor

$$|\mathrm{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0,$$

vagyis

$$|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\sphericalangle} = 0.$$

Eszerint négy eset lehetséges:

$$|\mathbf{a}| = 0, \qquad |\mathbf{b}| = 0,$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\sphericalangle} = 0^\circ, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\sphericalangle} = 180^\circ.$$

Mind a négy eset azt jelenti, hogy $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ (az első két eset azért, mert a nullvektor minden vektorral egyező állásúnak is tekinthető).

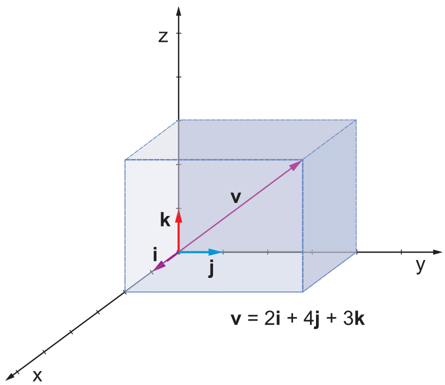
Megjegyezzük, hogy a definíció szerint a vektoriális szorzat kiszámítása nem kommutatív művelet, vagyis a tényezők nem cserélhetők fel. $\mathrm{a} \times \mathrm{b}$ és $\mathrm{b} \times \mathrm{a}$ nagysága és állása megegyezik, irányuk viszont a jobbsodrás miatt éppen ellentétes, tehát

$$\mathrm{b} \times \mathrm{a} = -\mathrm{a} \times \mathrm{b}.$$

További tanulmányainkban a vektoriális szorzatra csak ritkán lesz szükség. A 2.12. ábrán látható, hogy a vektoriális szorzat nincs a tényezők síkjában, ezért nem is adhatjuk meg kétdimenziós koordinátákkal. Koordinátákkal megadott vektorok vektoriális szorzatának kiszámításához olyan ismeretekre lenne szükség, amelyekre egyéb területeken nincs szükségünk, ezért ennek tárgyalásától eltekintünk. A téma iránt érdeklődő hallgatók bővebb ismereteket szerezhetnek Szász Gábor könyvéből[1].

2.9. Térbeli koordinátarendszer

A bennünket körülvevő világ nem két-, hanem háromdimenziós, vagyis a tárgyak nem síkban, hanem térben helyezkednek el. Ezért nagyon sok esetben szükségünk van koordinátarendszer használatára a térben is (2.13. ábra).



2.13. ábra Vektor térbeli koordinátarendszerben

Ebben a koordinátarendszerben három, egymásra páronként merőleges tengely van. Ezek neve: x, y és z tengely. A tengelyeken egységvektorokat vehetünk fel: az x tengely egységvektora a szokott módon **i**, az y tengelyé **j**, a z tengelyé **k**. A tengelyeket úgy vesszük fel, hogy **i**, **j** és **k** ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkot.

A 2.6. fejezetben leírtak analógiájára térben is felbonthatjuk a vektorokat tengelyirányú összetevőkre, de itt a vektoroknak három komponensük lesz:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}.$$

Emiatt a vektorokat három koordinátával adhatjuk meg:

$$\mathbf{v} = \left[v_1; v_2; v_3\right],$$

vagy

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

A 2.13. ábra **v** vektora koordinátákkal: $\mathbf{v} = \left[2;4;3\right]$.

Definícióink és tételeink értelemszerűen érvényesek térbeli vektorok esetében is, mivel ezekben nem tettünk kikötést a *dimenziószám*ra. Dimenziószámon a koordinátákkal megadott vektor koordinátáinak számát értjük. Eszerint a síkban kétdimenziós, a térben háromdimenziós vektorok szerepelnek.

A 2.4 – 2.7. tételek mindegyike érvényes háromdimenziós vektorokra is, csak két koordináta helyett mindenütt hármat kell használnunk.

Tehát, ha $\mathbf{a}=[a_1;a_2;a_3]$ és $\mathbf{b}=[b_1;b_2;b_3]$, akkor:

– **a** és **b** akkor és csak akkor egyenlő, ha

$$a_1=b_1, \quad a_2=b_2 \quad \textit{és} \quad a_3=b_3; \tag{2.10}$$

– skalárral való szorzásra:

$$k\mathbf{a}=k[a_1;a_2;a_3]=[ka_1;ka_2;ka_3]; \tag{2.11}$$

– összeadásra és kivonásra:

$$\mathbf{a}\pm\mathbf{b}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\pm\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\pm b_1\\a_2\pm b_2\\a_3\pm b_3\end{bmatrix}; \tag{2.12}$$

– skaláris szorzatra:

$$\mathbf{ab}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \tag{2.13}$$

Érvényes a (2.7) és a (2.9) azonosság kiterjesztése is:

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \tag{2.14}$$

és

$$\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_{\sphericalangle}=\frac{\mathrm{ab}}{|\mathrm{a}||\mathrm{b}|}\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{2.15}$$

2.10. Magasabb dimenziószámú vektorok

A (2.10) – (2.15) összefüggések egy nagyon fontos általánosításra adnak lehetőséget. Mindegyik kétdimenziós összefüggésből származik, az eltérés annyi, hogy a koordináták száma eggyel több. Miért ne növelhetnénk a dimenziószámot négyre, ötre, vagy akár még tovább, tetszőlegesen? Mindegyik összefüggés könnyedén kiterjeszthető, a műveletek elvégezhetők maradnának.

Meg is tesszük ezt a kiterjesztést, és ezzel áttérünk a vektor új definíciójára:

2.8. definíció: *n-dimenziós vektor*on rendezett szám n-est értünk.

Jelölés: $\mathbf{v}=[v_1;v_1;\ldots;v_n]$ vagy $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{bmatrix}$.

Az egyetlen probléma a kiterjesztéssel az, hogy el kell szakadnunk a vektor geometriai definíciójától és ábrázolásától, hiszen maximum háromdimenziós vektorokat tudunk szemléltetni.

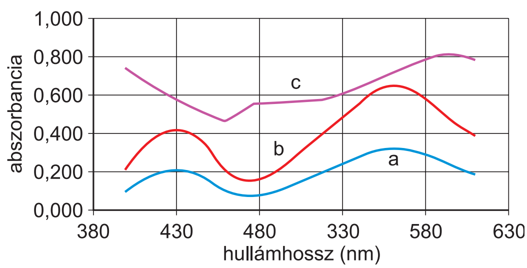
A (2.10) – (2.15) összefüggések teljes általánosítása:

– **a** és **b** akkor és csak akkor egyenlő, ha $a_i = b_i$ minden i-re;
– $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{c}$, ahol $c_i = \lambda a_i$ minden i-re;
– $\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \mathbf{c}$, ahol $c_i = a_i \pm b_i$ minden i-re;
– $\mathbf{ab} = \sum_i^n a_i b_i$
– $|\mathbf{a}| = \sqrt{\sum_i^n a_i^2}$
– $$\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\measuredangle = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\sum_i^n a_i b_i}{\sqrt{\sum_i^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_i^n b_i^2}} \quad . \tag{2.16}$$

A vektorok alapvető jelentőségűek a matematika különböző ágaiban, a fizikában, a műszaki életben, az informatikában egyaránt. További ismeretekkel a későbbi tanulmányaink során találkozhatunk, most egy érdekes analitikai alkalmazást mutatunk be annak illusztrálásaként, hogy milyen távolinak tűnő problémák oldhatók meg vektorok segítségével.

Példa

Feladatunk az, hogy eldöntsük a 2.14. ábrán látható három görbéről, hogy közülük melyik kettő hasonlít a legjobban egymásra. A hasonlóság mértékét jó lenne valamilyen számmal jellemezni.



2.14. ábra Hipotetikus spektrumok

Ilyen típusú görbékkel, a *spektrum*okkal analitikai tanulmányaink során sokszor fogunk találkozni. Előzetesen csak annyit róluk, hogy a vízszintes tengelyen a besugárzó fény hullámhossza van feltüntetve, ennek egysége nm (nanométer). A függőleges tengelyen a vizsgált oldat által elnyelt fény mértékét ábrázoltuk. Ez utóbbi mennyiség neve *abszorbancia*, mértékegysége nincs.

Azonos anyagok különböző töménységű oldatainak vizsgálatánál kapott spektrumok abban térnek el, hogy az elnyelés mértéke a hígabb oldat esetében arányosan kisebb minden hullámhosszon, de a görbék lefutása hasonló (ugyanott vannak rajtuk a maximumok és a minimumok, jellegük is megegyezik). Ha az anyagok eltérőek, akkor spektrumaik többé-kevésbé eltérő lefutásúak. Emiatt ha két spektrum eltérő lefutású, akkor biztosan különböző anyagok voltak az oldatokban.

A 2.14. ábrán szemmel is jól látható, hogy az a és a b jelű görbék hasonlítanak, csak az a görbe hígabb oldatról készülhetett. A c jelű görbe eltér mindkettőtől. Ha azonban a spektrumokat számítógép tárolja, akkor más módszert kell találni az összehasonlításukra, hiszen a gépnek nincs szeme.

A számítógép adatsorokat tud tárolni. A fenti görbéket például úgy tárolhatja, hogy a 15 nm-enként mért abszorbanciaértékeket raktározza el. Az adatok a 2.1. táblázatban láthatók.

Tekintsük az abszorbanciák oszlopait 15 dimenziós oszlopvektoroknak (mivel minden oszlopban 15 adat van), és számítsuk ki páronként az általuk bezárt szögek koszinuszait. Ha van a vektorok között olyan, amelyiknek mindegyik koor-

2.1. táblázat Hipotetikus görbék adatai

Hullámhossz, nm	Abszorbancia		
	a görbe	*b* görbe	*c* görbe
400	0,105	0,211	0,737
415	0,184	0,368	0,658
430	0,211	0,421	0,579
445	0,184	0,368	0,526
460	0,105	0,211	0,474
475	0,079	0,158	0,553
490	0,105	0,211	0,563
505	0,158	0,316	0,574
520	0,211	0,421	0,579
535	0,263	0,526	0,632
550	0,316	0,632	0,684
565	0,326	0,653	0,737
580	0,289	0,579	0,789
595	0,237	0,474	0,816
610	0,195	0,389	0,789

dinátája λ-szorosa egy másik vektor megfelelő koordinátájának, akkor ez két különböző dolgot is jelent egyszerre. Kémiailag azt, hogy a két vektornak megfelelő spektrumok ugyanannak az anyagnak a spektrumai, csak a koncentrációk térnek el a két esetben. Matematikai szempontból azt, hogy a két vektor iránya megegyezik, hiszen egyik λ-szorosa a másiknak. Ekkor a vektorok által bezárt szög koszinuszának értéke 1 lesz.

Határozzuk meg tehát a vektorok által bezárt szögek koszinuszát! A (2.16) azonosságot alkalmazva a következő eredményeket kapjuk:

$$\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_{\measuredangle}=1{,}000;\quad \cos(\mathbf{b},\mathbf{c})_{\measuredangle}=0{,}9521;\quad \cos(\mathbf{a},\mathbf{c})_{\measuredangle}=0{,}9521,$$

ha $\mathbf{a}$ az a görbe, $\mathbf{b}$ a b görbe, $\mathbf{c}$ a c görbe vektora. Tehát az a és a b jelű görbe ugyanazon anyag két különböző oldatának a spektruma, a c jelű görbe valamilyen más anyagról készült.

A hasonlóság mértékének jellemzésére jól használható a szög koszinuszának értéke. Minél közelebb van 1-hez, annál jobban hasonlít a két vizsgált görbe. Megjegyezzük, hogy a valóságban az ideális 1 érték elérése ritkán következik be.

Feladatok:

1. Adott az $\mathbf{a}=[2;-5]$ és a $\mathbf{b}=[1;-2]$ vektor. Számítsa ki az összegüket, a különbségüket és a skaláris szorzatukat! Ábrázolja a vektorokat, az összeget és a különbséget derékszögű koordinátarendszerben!

2. Adott az $\mathbf{n}=[3;5]$ és a $\mathbf{m}=[3;-4]$ vektor. Számítsa ki a következőket:

   a) $\mathbf{n}+\mathbf{m}$ *b)* $3\mathbf{n}$ *c)* $\mathbf{n}-4\mathbf{m}$ *d)* $\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}$ *e)* $|\mathbf{n}-\mathbf{m}|$

3. Számítsa ki a következő vektorok hosszát!

   a) $\mathbf{n}=[6;8]$

   b) $\mathbf{m}=\left[1;\sqrt{8}\right]$

   c) $\mathbf{p}=\left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$

   d) $\mathbf{q}=[1;2;-3]$

4. Döntse el, hogy merőlegesek-e egymásra az alábbi vektorok!

   a) $\mathbf{u}=[4;-6]$ és $\mathbf{v}=[-2;3]$

   b) $\mathbf{a}=\left[\frac{3}{4};-\frac{2}{3}\right]$ és $\mathbf{b}=\left[-\frac{2}{3};-\frac{3}{4}\right]$

   c) $\mathbf{n}=\begin{bmatrix}1\\3\\-4\end{bmatrix}$ és $\mathbf{m}=\begin{bmatrix}2\\-2\\-1\end{bmatrix}$

5. Számítsa ki a következő vektorok által bezárt szög nagyságát!

   a) $\mathbf{a} = [2;2]$ és $\mathbf{b} = [1;0]$

   b) $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$ és $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

   c) $\mathbf{v} = [1;-1;0]$ és $\mathbf{w} = [0;1;1]$

6. Igazolja vektorok segítségével, hogy a rombusz átlói merőlegesek egymásra!

3. Egyváltozós valós függvények

Az 1.9. definícióban megadtuk a függvény fogalmát általában. Az 1.4. fejezetben több, a függvényekre vonatkozó fogalmat is definiáltunk. Jelen fejezetben a függvények erősen szűkített, de nagyon fontos részhalmazával, az egyváltozós valós függvényekkel foglalkozunk, a „függvény” szót is ilyen, erősen leszűkített értelemben használjuk. Ezeknél a függvényeknél az alaphalmaz és a képhalmaz is a valós számok halmaza. Tárgyaljuk a függvények megadásának lehetőségeit, néhány további fogalmat definiálunk a függvényekkel kapcsolatban, megbeszéljük a függvények osztályozását, majd részletesen tárgyaljuk a leggyakrabban használt függvényeket.

3.1. A függvények megadásának módjai

Matematikában a leggyakoribb a függvények képlettel történő megadása. Erre mutattunk példákat az 1.4. fejezetben. Álljon csak itt egy egyszerű függvény:

$$f(x) = x^2$$

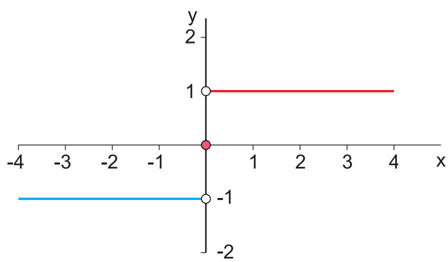
Vannak függvények, melyek nem adhatók meg egyetlen képlettel, ilyen az abszolútérték függvény (képe az 5.8. ábrán látható):

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, \ ha \ \ x \ge 0 \\ -x, \ ha \ \ x < 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

vagy az előjel (szignum) függvény:

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, \ ha \ \ x > 0 \\ 0, \ ha \ \ x = 0. \\ -1, \ ha \ \ x < 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Ez utóbbi függvény képe a 3.1. ábrán látható.



3.1. ábra Az előjelfüggvény grafikonja

Ha a képlet $y = f(x)$ alakban adott, vagyis egyik oldalon csak a függő, a másikon csak a független változó szerepel, akkor *explicit* függvényről beszélünk. Ha azonban a két változó nincs elkülönítve az egyenlet két oldalán, akkor *implicit* függvénnyel van dolgunk.

Ezek sokszor $f(x, y) = 0$ (nullára redukált) alakban adottak, de nem minden esetben. Implicit függvény például a következő:

$$x^2 y - xy + 4 = 0, \tag{3.3}$$

de a következő is:

$$x + y = \sin y. \tag{3.4}$$

A függvény mindig nullára redukálható, például a (3.4) is:

$$x + y - \sin y = 0.$$

Az implicit függvényt sokszor explicit alakúvá alakíthatjuk, például a (3.3) egyszerű átrendezéssel a

$$y = \frac{-4}{x^2 - x}$$

alakra hozható, de például a (3.4) függvényt nem tudjuk explicit alakban megadni, mert ekvivalens átalakításokkal nem tudjuk a függő változót kifejezni. Ilyen esetekben a függvény ábrázolása, tulajdonságainak megállapítása nagy nehézségekbe ütközhet.

Megadhatjuk a függvényt *paraméteres*en is, ha szükséges, vagy valamilyen okból célszerű. A paraméteres függvénymegadás azt jelenti, hogy a független és a függő változó egyaránt egy paraméter függvénye, a paraméter kapcsolja össze őket. A paramétert általában t-vel jelöljük.

Példa:

Vízszintesen, v_0 kezdősebességgel elhajított test pályájának egyenletét szeretnénk megadni. Itt a t paraméternek konkrét fizikai jelentése van, az elhajítástól eltelt időt mutatja. A test helyzetének x koordinátája az idő függvényében (ha a test az origóból indul):

$$x(t) = v_0 t. \tag{3.5}$$

Az y koordinátáé:

$$y(t) = -\frac{g}{2} t^2. \tag{3.6}$$

A negatív előjel arra utal, hogy a test lefelé esik, így y csökken; g a nehézségi gyorsulás értéke. Az összefüggést függvényünk két változója között tehát egy

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\}$$

alakú egyenletrendszer jelenti, amely a függvényt egyértelműen megadja.

A paraméter sok esetben kiküszöbölhető, például a fenti függvénynél is. A (3.5) egyenletből kifejezhetjük t-t:

$$t = \frac{x}{v_0}$$

és beírhatjuk a (3.6) egyenletbe:

$$y = -\frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2,$$

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

A paraméter kiküszöbölése nem feltétlenül szükséges, sokszor nem is lehetséges.

Példa:

$$x(t) = t - \sin t,$$

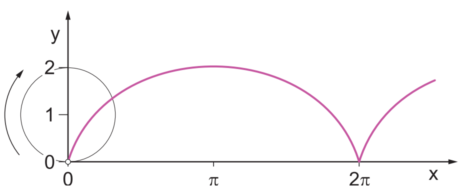
$$y(t) = 1 - \cos t.$$

Az érdekesség kedvéért megjegyezzük, hogy ez az egyenletrendszer egy olyan kör egy pontjának pályáját adja meg, melynek sugara egységnyi, és csúszás nélkül gördül az x tengelyen (3.2. ábra). A görbe a *ciklois*ok közé tartozik.

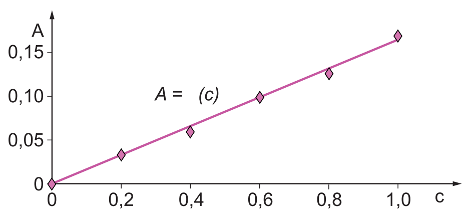
A gyakorlatban sokszor találkozunk olyan függvényekkel, amelyek nem egyenlettel, hanem más módon adottak.

Megadhatók a függvények értéktáblázattal, illetve grafikonjaikkal is. Mindkét megadási forma gyakori a mérésekkel kapcsolatban.

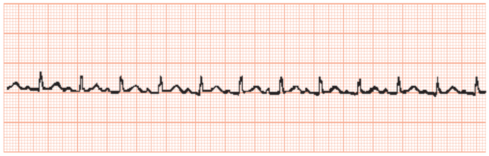
Értéktáblázatot akkor kapunk, amikor a független változó bizonyos diszkrét értékeihez meghatározzuk a függő változó értékeit. Analitikából véve példát: egy anyag különböző koncentrációjú (c) oldatainak megmérjük a fényelnyelését (A), ezzel az $A = f(c)$ függvény néhány pontját kapjuk meg. A pontokat koordinátarendszerben ábrázolhatjuk. Ezt követően vagy grafikusan megszerkesztjük az összefüggő függvénygrafikont (3.3. ábra), vagy matematikai módszerekkel olyan összefüggést keresünk, amely megfelelő pontossággal adja vissza mérési pontjainkat. Hogy ezt hogyan tehetjük meg, arra statisztikai tanulmányainkban fogunk visszatérni.



3.2. ábra Egy ciklois grafikonja



3.3. ábra Fényelnyelés mérésének eredményei
A pontok a diszkrét mérési eredmények, a vonal a pontokra illesztett lineáris függvény grafikonja



3.4. ábra EKG görbe

Folytonosan regisztráló műszerekkel a függvények grafikonját kapjuk meg. Ilyen például a 2.14. ábra három görbéje, vagy például az EKG görbe (3.4. ábra), ami a szívnek egy potenciálértékét mutatja az idő függvényében $\left(U = f\left(t\right)\right)$.

Erre a görbére nem igyekszünk matematikai összefüggést találni, az orvos ismeretei és tapasztalatai alapján értékeli jellemzőit és von le belőlük következtetéseket a páciens állapotára nézve.

Analitikai mérések során is kaphatunk függvénygrafikonokat. Mennyiségi következtetések levonásához megállapíthatjuk a grafikonok bizonyos paramétereit, és ezekből számolhatunk eredményeket. Ezek a munkafolyamatok általában jól algoritmizálhatók, számítógépes programmal könnyen elvégeztethetők. Műszeres analitikai tanulmányaink során sok ilyen grafikonnal fogunk találkozni.

3.2. A függvények jellemzői

Ebben a fejezetben olyan fogalmakat definiálunk, melyek a függvények jellemzésénél, ábrázolásánál használatosak.

Az értelmezési tartománnyal és az értékkészlettel az 1.10. definícióban már találkoztunk, itt csak emlékeztetünk rájuk.

3.1. definíció: *Intervallum*nak nevezzük a valós számok egy összefüggő részhalmazát. Az intervallum határait általában a-val és b-vel jelöljük. a illetve b vagy hozzátartozik az intervallumhoz, vagy nem. Ha mindkettőt hozzáértjük, akkor zárt intervallumról, ha egyiket sem, akkor nyitott intervallumról beszélünk. Egyéb esetekben az intervallum félig nyitott, félig zárt.

Jelölések:

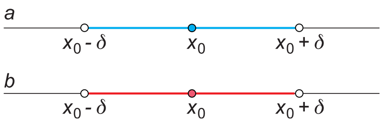
zárt intervallum:	$\left[a;b\right] = \left\{x : x \in \mathbb{R} \middle| a \le x \le b\right\}$;
nyílt intervallum:	$\left]a;b\right[= \left\{x : x \in \mathbb{R} \middle| a < x < b\right\}$;
jobbról nyílt, balról zárt:	$\left[a;b\right[= \left\{x : x \in \mathbb{R} \middle| a \le x < b\right\}$;
balról nyílt, jobbról zárt:	$\left]a;b\right] = \left\{x : x \in \mathbb{R} \middle| a < x \le b\right\}$.

Az intervallum balra is és jobbra is nyúlhat a végtelenbe. Ilyenkor azt mondjuk, hogy határa a végtelen, de természetesen amelyik oldalon végtelen a határ, ott nem lehet zárt az intervallum. Egy végtelenbe nyúló intervallum például a $\left[4;\infty\right[$; az összes valós számot tartalmazza a $\left]-\infty;\infty\right[$ nyílt intervallum.

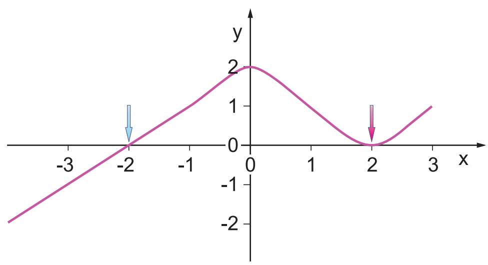
3.2. definíció: Az x_0 szám δ *sugarú környezeté*nek az $]x_0-\delta; x_0+\delta[$ nyílt intervallumot nevezzük, *nem beleértve* magát x_0-t. Ha x_0-t is számításba vesszük, akkor x_0 δ *sugarú teljes környezeté*ről beszélünk (3.5. ábra).
Szükségünk lesz még a jobb- illetve a baloldali környezet fogalmára is. x_0 δ sugarú jobboldali környezete az $]x_0; x_0+\delta[$, δ sugarú baloldali környezete pedig az $]x_0-\delta; x_0[$ nyílt intervallum.

3.3. definíció: Az x_i helyet $\left(x_i \in D_f\right)$ az $f(x)$ függvény *zérushely*ének nevezzük, ha $f(x_i)=0$. Ez azt is jelenti, hogy ezen a helyen a függvény grafikonja metszi vagy érinti az x tengelyt, egyben azt is, hogy az $f(x)=0$ egyenlet egyik megoldása az adott x_i érték.

A 3.6. ábra függvényének zérushelyei: $x_1=-2$ és $x_2=2$.



3.5. ábra A környezet (a) és a teljes környezet (b)



3.6. ábra Illusztráció a zérushely definíciójához

A zérushelyek keresése az $f(x)=0$ egyenlet megoldását jelenti. Ez lehet viszonylag egyszerű feladat is, de elemi úton sokszor megoldhatatlan. Gondoljunk az

$$f(x)=1-x^2$$

illetve az

$$f(x)=2x-\sin x$$

függvényekre.

A megoldandó egyenletek:

$$1-x^2=0, \tag{3.7}$$

illetve

$$2x-\sin x=0. \tag{3.8}$$

(3.7) algebrai úton könnyen megoldható, gyökeinek, azaz a zérushelyeknek az értéke: $x_1=-1$ és $x_2=1$. A (3.8) egyenlet megoldásait elemi úton nem, csak közelítő módszerek alkalmazásával tudjuk megkeresni.

3.4. definíció: Az x_i helyet $\left(x_i \in D_f\right)$ az f függvény *szakadási hely*ének nevezzük, ha ott a függvény nem folytonos. A folytonosság fogalmát később, a 4.6. definícióban fogalmazzuk meg.

3.5. definíció: Az f függvény értelmezési tartományának $[a;b]$ intervallumán *alulról korlátos*, ha $f(x) \geq m$ teljesül minden x-re, ha $x \in [a;b]$. Az m számot *alsó korlát*nak nevezzük.

Ha találunk alsó korlátot, akkor ez egyben azt is jelenti, hogy végtelen sok alsó korlát van, hiszen minden k szám alsó korlát, ha $k < m$ és m alsó korlát.

3.6. definíció: Az f függvény értelmezési tartományának $[a;b]$ intervallumán *felülről korlátos*, ha $f(x) \leq M$ teljesül minden x-re, ha $x \in [a;b]$. Az M számot *felső korlát*nak nevezzük.

Ha találunk felső korlátot, akkor végtelen sokat találhatunk, hiszen minden K szám felső korlát, ha $K > M$ és M felső korlát.

3.7. definíció: Az f függvény értelmezési tartományának $[a;b]$ intervallumán *korlátos*, ha alulról és felülről is korlátos az adott intervallumon.

Az alsó és a felső korlátot kereshetjük a függvény egész értelmezési tartományán is, ekkor egyszerűen annyit mondunk, hogy a függvénynek alsó illetve felső korlátja van, vagy korlátos, nem jelölünk ki intervallumot.

Példák:

1. Az $f(x) = x^2 + 2$ függvény alulról korlátos. Alsó korlátja például a zéró, de bármilyen, a zérónál kisebb szám is. A legnagyobb alsó korlát értéke 2.
2. Az $f(x) = -|x| + 5$ függvény felülről korlátos, a legkisebb felső korlátja 5.
3. Az $f(x) = \sin x$ függvény korlátos, hiszen $-1 \leq \sin x \leq 1$.

3.8. definíció: Az f függvény értelmezési tartományának $[a;b]$ intervallumán *monoton növekvő*, ha $f(x_1) \leq f(x_2)$ minden esetben, ha $x_1 < x_2$, és $x_1, x_2 \in [a;b]$.

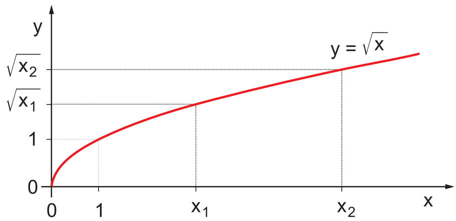
Ha az $f(x_1) < f(x_2)$ reláció teljesül, akkor *szigorúan monoton* növekedésről beszélünk.

3.9. definíció: Az f függvény értelmezési tartományának $[a;b]$ intervallumán *monoton csökkenő*, ha $f(x_1) \geq f(x_2)$ minden esetben, ha $x_1 < x_2$, és $x_1, x_2 \in [a;b]$.

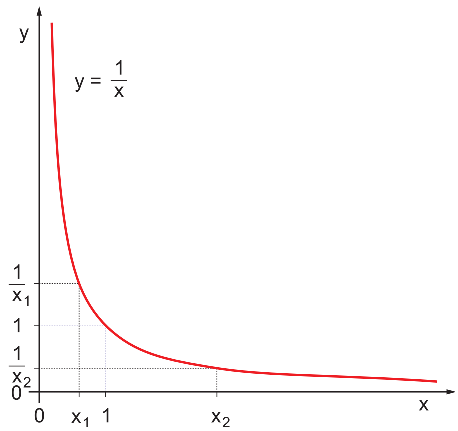
Ha az $f(x_1) > f(x_2)$ reláció teljesül, akkor *szigorúan monoton* csökkenésről beszélünk.

Példák:

1. Az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény teljes értelmezési tartományán szigorúan monoton növekvő, hiszen $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, ha $x_1 < x_2$. Egyszerűen fogalmazva: nagyobb szám négyzetgyöke nagyobb (3.7. ábra).



3.7. ábra A négyzetgyökfüggvény monotonitása



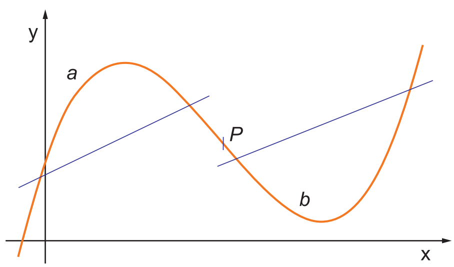
3.8. ábra A reciprokfüggvény pozitív ágának monotonitása

2. Az $f(x)=\dfrac{1}{x}$ függvény szigorúan monoton csökken a $]0;\infty[$ intervallumon, mert $\dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2}$, ha $x_1<x_2$. Nagyobb pozitív szám reciproka tehát kisebb (3.8. ábra).

3.10. definíció: Az f függvény értelmezési tartományának $[a;b]$ intervallumán *alulról konvex*, ha abban bármely x_1 és x_2 helyhez tartozó húrjának y koordinátái az $[x_1;x_2]$ intervallumon legalább akkorák, mint a függvény megfelelő y koordinátái. (Egyszerűbben fogalmazva a függvény görbéje az $[a;b]$ intervallumon mindenütt a húr *alatt* halad.) Ellenkező esetben a függvény alulról *konkáv*. Függvény konvex és konkáv tartománya a 3.9. ábrán látható.

3.11. definíció: Az f függvény *inflexiós pont*ja az a pont, amely a függvény konvex és konkáv szakaszát elválasztja egymástól (3.9. ábra).

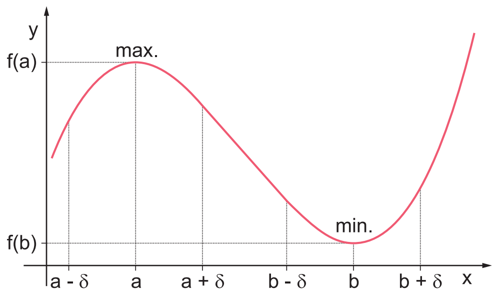
Az inflexiós pont megkeresése nem egyszerű feladat, az 5.8.7. fejezetben fogjuk megtanulni az erre alkalmas eljárást.



3.9. ábra Konvex (a) és konkáv (b) függvénytartomány, inflexiós pont (P)

3.12. definíció: Az f függvénynek *helyi* vagy *lokális maximum*a van egy x_0 helyen, ha az x_0 helynek van olyan δ sugarú környezete, amelyben $f(x_0) > f(x)$, ha $|x - x_0| < \delta$, és $x \neq x_0$ (3.10. ábra).

(Az $|x - x_0| < \delta$ összefüggés csak annyit fejez ki, hogy x benne van x_0 δ sugarú környezetében. Ilyen típusú összefüggést többször fogunk használni annak megadására, hogy két változó vagy szám mennyire van közel egymáshoz.)



3.10. ábra Helyi maximum (helye a), és helyi minimum (helye b)

3.13. definíció: Az f függvénynek *helyi* vagy *lokális minimum*a van egy x_0 helyen, ha az x_0 helynek van olyan δ sugarú környezete, amelyben $f(x_0) < f(x)$, ha $|x - x_0| < \delta$, és $x \neq x_0$ (3.10. ábra).

A minimumot és a maximumot közös néven *szélsőérték*nek nevezzük.

Egy függvénynek természetesen több helyi minimuma és maximuma lehet. Gondoljunk például az $f(x) = \sin x$ függvényre (3.4.3. fejezet), amelynek végtelen sokszor felveszi minimumát illetve maximumát.

Ha a helyi szélsőérték egyben a függvény legnagyobb vagy legkisebb értéke, akkor *abszolút* maximumról illetve minimumról beszélünk. Annak eldöntése, hogy egy szélsőérték abszolút maximum vagy minimum-e általában nem jelentős, a helyi maximumok illetve minimumok megkeresésének problémájával viszont sokszor találkozunk az élet számos területén. A helyi szélsőértékek keresése során természetesen az abszolút szélsőértékeket is megtaláljuk. Az 5.8.7. fejezetben ismerjük meg a szélsőértékek megkeresésének módszerét.

3.14. definíció: Az $f(x)$ függvényt *páros*nak nevezzük, ha $f(x) = f(-x)$ teljesül, ha $x \in D_f$.

A definícióból következik, hogy páros függvény grafikonja az y tengelyre szimmetrikus.

Páros függvény az összes páros kitevőjű hatványfüggvény (3.4.1. fejezet), a koszinuszfüggvény (3.4.3. fejezet), a 3.2. ábrán látható ciklois és még sok egyéb.

3.15. definíció: Az $f(x)$ függvényt *páratlan*nak nevezzük, ha $f(x) = -f(-x)$ teljesül, ha $x \in D_f$.

A definícióból következik, hogy páratlan függvény grafikonja az origóra szimmetrikus.

Páratlan függvény az összes páratlan kitevőjű hatványfüggvény, a szinuszfüggvény, az előjelfüggvény (3.1. ábra) és még sok egyéb.

Megjegyezzük, hogy egy függvény nem feltétlenül páros vagy páratlan, sok függvény nem sorolható be ilyen szempont alapján.

3.16. definíció: Az f függvényt *periodikus*nak nevezzük, ha $f(x) = f(x+p)$ teljesül, ha $x \in D_f$. A p számot a függvény *periódus*ának nevezzük.

A periodikusság azt jelenti, hogy a függvény szakaszai ismétlődnek, két szomszédos szakasz kezdőpontjának távolsága p.

Ha $f(x) = f(x+p)$ teljesül, akkor természetesen $f(x) = f(x+kp)$ is teljesül, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

A trigonometrikus függvények mindegyike periodikus, de nagyon sok periodikus függvény konstruálható egyéb függvényekből is. A műszaki életben jelentőségük nagy, az analitikában kisebb.

3.3. A függvények osztályozása

A függvényeket (emlékszünk: egyváltozós valós függvényeket) két csoportba sorolhatjuk be: az *elemi függvények* és a *nem elemi függvények* csoportjába.

3.17. definíció: *Elemi függvények*nek azokat a függvényeket nevezzük, melyek az elemi alapfüggvényekből véges számú

összeadással, szorzással, osztással, gyökvonással,
inverz függvény képzésével,
összetett függvény képzésével

előállíthatók és képlettel megadhatók.

Elemi függvény például a következő:

$$x \mapsto \frac{5x^3 - 4x^2 + \sin x}{\log_3 x} - e^x.$$

A nem elemi függvények nem állíthatók elő ilyen módon.

Nem elemi függvény például az abszolútérték függvény (3.1), vagy az előjelfüggvény (3.2).

Az inverz függvényeket az 5.4. fejezetben, az összetett függvényeket az 5.3. fejezetben definiáljuk.

3.18. definíció: *Elemi alapfüggvények* a következők:

$x \mapsto C$,

$x \mapsto x$,

$x \mapsto a^x$,

$x \mapsto \sin x$,

ahol C valós, a pozitív konstans.

Az elemi függvényeket tovább osztályozhatjuk algebrai és transzcendens függvényekre.

3.19. definíció: Az *algebrai függvények* azok a függvények, melyek a változóból és konstansokból véges számú

összeadással, szorzással, osztással,
egész kitevőjű gyökvonással

előállíthatók és képlettel megadhatók.

Például:

$$x \mapsto \frac{x^3+3x^2-5x+6}{\sqrt{x^2-3}}. \tag{3.9}$$

A *nem algebrai elemi* függvények a *transzcendens* függvények.

Például:

$$x \mapsto \sin^2 x - 2\cos^2 x$$

Az algebrai függvények *racionális*ak, ha képzésük során gyökvonást nem kell felhasználni; ha igen, akkor a függvény *irracionális*.

Racionális függvény például a következő:

$$x \mapsto \frac{3x^2+6}{x^3-5}. \tag{3.10}$$

Irracionális például a (3.9) függvény.

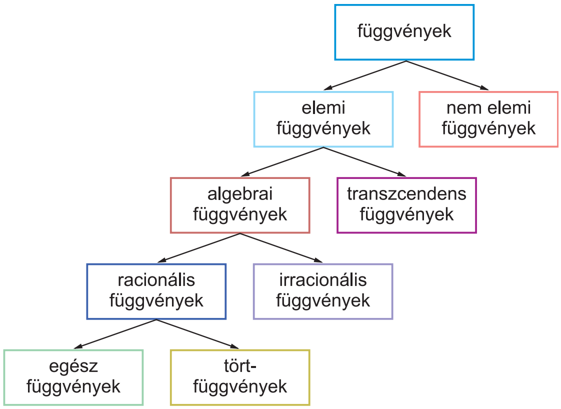
A racionális függvény *egész*, ha még az osztás műveletét sem használjuk; ha igen, akkor racionális *törtfüggvény*t kapunk.

Egészfüggvényre példa:

$$x \mapsto x^3 - x^2 - 5x + 34.$$

Törtfüggvény például a (3.10).

Az osztályozást a 3.11. ábra szemlélteti.



3.11. ábra A függvények osztályozása

A továbbiakban ismerkedjünk meg néhány elemi függvénnyel.

3.4. A leggyakrabban használt függvények

3.4.1. Hatványfüggvények

Az $f(x)=x^n$ típusú függvények tartoznak ebbe a csoportba. Az összefüggésben n különböző értékeket vehet fel.

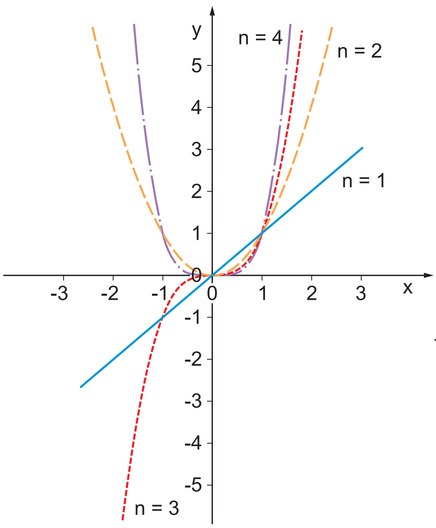
– A legszorosabb értelemben vett hatványfüggvényeket akkor kapjuk, ha $n \in \mathbb{N}^+$.

Ilyen függvényeket láthatunk a 3.12. ábrán.

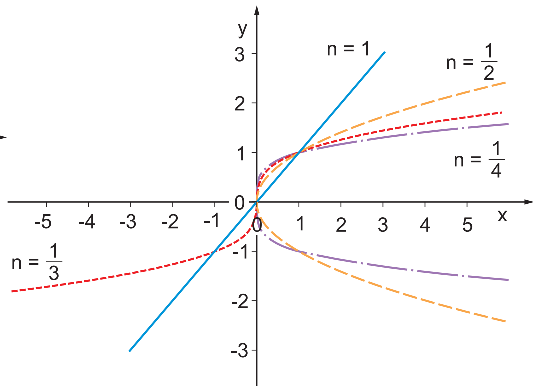
Az ábráról közvetlenül leolvashatók a következő megállapítások:

– Mindegyik függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza.
– Ha n páratlan, akkor értékkészletük az összes valós szám. Ebben az esetben a függvények páratlanok, korlátjuk nincs, szigorúan monoton nőnek. Ha $n \neq 1$, akkor a 0 helyen inflexiós pontjuk van, előtte konkávok, utána konvexek.
– Ha n páros, akkor értékkészletük az összes nem negatív szám. Párosak, alulról korlátosak, legnagyobb alsó korlátjuk a nulla. A $]-\infty;0[$ intervallumon szigorúan monoton csökkennek, a $[0;\infty[$ intervallumon szigorúan monoton nőnek. Minimumuk az $x=0$ helyen van, a minimum értéke mindig nulla. Egész értelmezési tartományukon konvexek.

– Ha $n = \dfrac{1}{k}$, ahol $k \in \mathbb{N}^{+}$, akkor valójában a *gyökfüggvényeket* kapjuk, hiszen $x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x}$. A gyökfüggvények a hatványfüggvények inverzei. Függvények inver-



3.12. ábra Pozitív egész kitevőjű hatványfüggvények



3.13. ábra Gyökfüggvények

zeiről és tulajdonságaikról a 3.4.4. fejezetben lesz szó. Néhány gyökfüggvény képe a 3.13. ábrán látható.

Az ábráról leolvashatók a függvények tulajdonságai, a feladat elvégzését az olvasóra bízzuk. Kiemeljük azonban a tulajdonságok közül, hogy páros gyökkitevőjű függvények értelmezési tartománya és értékkészlete egyaránt a nem negatív valós számok halmaza.

Az értelmezési tartományba azért nem tartoznak bele a negatív számok, mert a valós számok körében negatív szám páros kitevőjű gyökét nem tudjuk értelmezni. (Nincs olyan szám, amit páros kitevőjű hatványra emelve negatív számot kapnánk.)

Az értékkészletből pedig azért zárjuk ki a negatív számokat, mert a függvény definíciója szerint (1.9. definíció) az értelmezési tartomány minden eleméhez csak egyetlen értékkészletbeli elemet rendelhetünk hozzá.

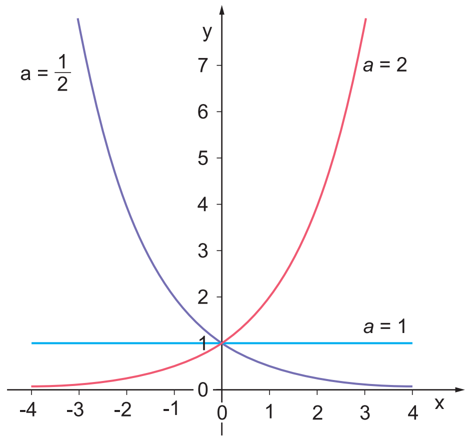
Tehát például hiába igaz a $2^2 = 4$ és a $(-2)^2 = 4$ összefüggés egyaránt, definíció szerint $2 = \sqrt{4}$, de $-2 \neq \sqrt{4}$, ellenben $-2 = -\sqrt{4}$.

– Ha $n = -k$, ahol $k \in \mathbb{N}^+$, akkor racionális törtfüggvényt kapunk, mivel definíció szerint $x^{-k} = \frac{1}{x^k}$. Az ilyen függvényekkel a 3.4.8. fejezetben foglalkozunk.

– Azok az esetek, amikor $n = \frac{p}{q}$, ahol $p \in \mathbb{N}^+$ és $q \in \mathbb{N}^+$, illetve amikor $n \in \mathbb{Q}^*$, számunkra kevéssé fontosak, ezért nem tárgyaljuk őket.

3.4.2. Exponenciális függvények

Az $f(x) = a^x$ típusú függvények tartoznak ebbe a csoportba. A hatvány alapjára igaz, hogy $a \in \mathbb{R} | a > 0$.



3.14. ábra $f(x) = a^x$ alakú függvények görbéi

A függvények értelmezési tartománya minden esetben a valós számok halmaza. Mindegyik függvény görbéje átmegy a $(0;1)$ ponton, hiszen bármelyik pozitív szám nulla kitevőjű hatványának értéke definíciószerűen 1. Egyéb tulajdonságaik a értékétől függően eltérőek lehetnek:

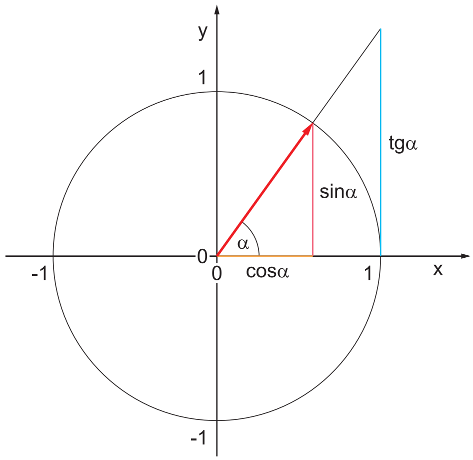
– Ha $a > 1$, akkor a függvények szigorúan monoton növekvők, értékkészletük a pozitív valós számok halmaza. A 3.14. ábrán az ilyen függvények közül az $f(x) = 2^x$ függvény szerepel illusztrációként ehhez a ponthoz. Látható, hogy görbéje konvex, szélsőértéke nincs, és x növekedésével a függvényértékek rohamosan nőnek. Innen ered a közkeletű „exponenciális növekedés” kifejezés.

– Ha $0 < a < 1$, akkor a függvények szigorúan monoton csökkennek, értékkészletük szintén a pozitív valós számok halmaza. A 3.14. ábrán az $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ függvényt ábrázoltuk. Látható, hogy ennek görbéje is konvex, szélsőértéke nincs.

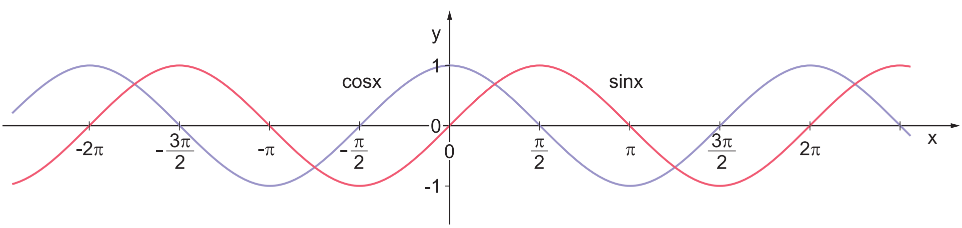
– Ha $a=1$, akkor az $f(x)=1$ egyenletű konstans függvényt kapjuk, hiszen 1 bármelyik hatványának értéke 1. Így ennek a függvénynek az értékkészlete csupán az 1.

3.4.3. Trigonometrikus függvények

Ez a csoport az $f(x)=\sin x$ függvényt és a belőle leszármaztatható függvényeket jelenti. Bár a *koszinusz-* és a *tangensfüggvény* is leszármaztatható a szinuszfüggvényből, ($\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg}(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$), mégis célszerű alapfüggvényként kezelni őket.



3.15. ábra A szinusz- és a koszinuszfüggvény értelmezése



3.16. ábra A szinusz- és a koszinuszfüggvény

Mint ismeretes, $\sin\alpha$ az origó kezdőpontú, az x tengellyel α szöget bezáró egységvektor függőleges, $\cos\alpha$ ugyanezen vektor vízszintes koordinátájaként értelmezhető. $\operatorname{tg}\alpha$ a két érték hányadosa, geometriai megjelenítése a 3.15. ábrán látható.

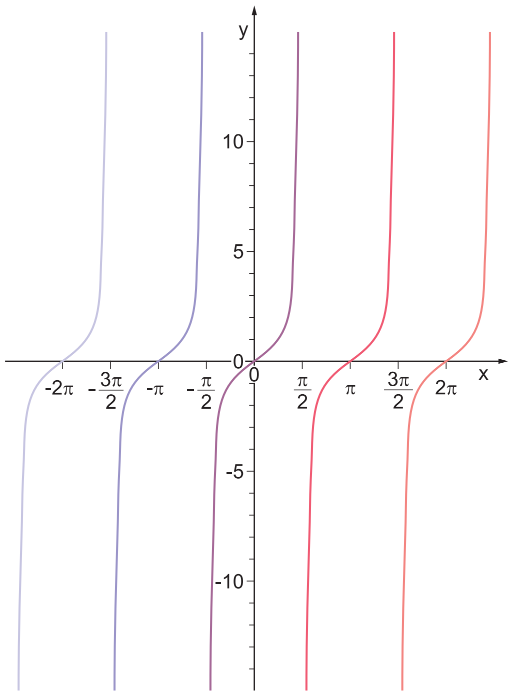
A negyedik trigonometrikus alapfüggvény a *kotangensfüggvény,* a tangensfüggvény reciproka: $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. Ritkábban használjuk, a tangensfüggvény használata általában elegendő.

A szinusz- és a koszinuszfüggvény grafikonja a 3.16. ábrán látható.

Mindkét függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészletük: $R_f = \left\{ f(x) : f(x) \in \mathbb{R} \middle| -1 \le f(x) \le 1 \right\}$, ebből következően korlátosak. Periodikusak, periódusuk nagysága 2π. Végtelen sok minimum- és maximumhelyük, inflexiós pontjuk és zérushelyük van. Jellegzetes görbealakjukból származik a „szinuszgörbe” elnevezés.

A szinuszfüggvény páratlan, a koszinuszfüggvény páros. Ennek a ténynek egy érdekes következményével az 5.8.5. fejezetben fogunk találkozni.

A tangensfüggvény ábrája a 3.17. ábrán látható.



3.17. ábra A tangensfüggvény grafikonja

Mivel $\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ helyeken a tangens függvény nem értelmezhető.

Az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ egyenletű egyenesek a *tg x* függvény *aszimptotái*. A függvény görbéje tetszőlegesen közel kerül az aszimptotához, de el soha nem éri.

Tehát $D_{\operatorname{tg} x} = \left\{ x : x \in \mathbb{R} \middle| x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$, $R_{\operatorname{tg} x} = \left\{ f(x) : f(x) \in \mathbb{R} \right\}$.

A görbe szigorúan monoton növekszik mindenütt, végtelen sok zérushelye van, a zérushelyek egyben inflexiós pontok is. A függvény páratlan, szélsőértéke nincs.

3.4.4. Függvény inverze

Egy geometriai példa segítségével vezetjük be a függvény inverzének fogalmát. Tudjuk, hogy egy négyzet területe oldalának hosszából a

$$T(a) = a^2 \tag{3.11}$$

képlettel számítható ki. A $T(a)$ jelölés arra utal, hogy a terület az oldal hosszának függvénye.

Feltehetjük azonban a következő kérdést is: adott területű négyzetnek mekkora az oldala? Válasz: az oldal hossza az

$$a(T) = \sqrt{T} \tag{3.12}$$

összefüggéssel számítható ki.

A (3.11) képlettel megadott függvénynél az oldal hosszához rendeltük hozzá a terület nagyságát, míg a (3.12) képlet a terület nagyságához rendeli hozzá az oldal hosszát. Mindkét hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű, azaz egy adott oldalhosszhoz csak egyetlen terület, illetve egy adott területhez csak egyetlen oldalhossz rendelhető.

A két függvény ugyanazt a kapcsolatot fejezi ki, annyi köztük a különbség, hogy az alaphalmaz és a képhalmaz felcserélődött. Ezt a tényt úgy fejezzük ki, hogy a (3.12) függvény (3.11) *inverze*.

3.20. definíció: Az *f* függvényt értelmezési tartományának *H* részhalmazán *invertálható*nak nevezzük, ha *f H különböző* elemeihez az értékkészlet *különböző* elemeit rendeli hozzá.

Képlettel:

$$f(x_1) \neq f(x_2), \text{ ha } x_1 \neq x_2.$$

Könnyen belátható, hogy a feltételnek olyan *H* részhalmazok tesznek eleget, amelyeken *f* szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő. Ha ugyanis a függvény nem szigorúan monoton nő vagy csökken, akkor biztosan van H-nak olyan x_1 és x_2 eleme, melyek különböznek egymástól, de igaz rájuk, hogy $f(x_1) = f(x_2)$. Ilyenkor azonban *f* inverze $f(x_1)$-hez x_1-et és x_2-t is hozzárendelné, ez a kapcsolat pedig az 1.9. definíció szerint már nem függvény!

Ha egy függvény egész értelmezési tartományán invertálható, akkor röviden csak invertálhatónak nevezzük.

3.21. definíció: Ha az *f* függvény értelmezési tartományának *H* részhalmazán invertálható, akkor *f H*-ra korlátozott inverzének azt az f_{-1} függvényt nevezzük, amelyet a következő két követelmény határoz meg:

1. Az f_{-1} függvény *értelmezési tartomány*a az *f* függvény *H*-n felvett *értékeiből* áll, azaz $D_{f_{-1}} = \{ f(x) | x \in H \}$;

2. bármely $y_0 \in D_{f_{-1}}$ elemre

$$f_{-1}(y_0) = x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = y_0. \tag{3.13}$$

Ha $H = D_f$, akkor a definícióban nincs szükség a „*H*-ra korlátozott" jelzőre. Ilyenkor természetesen $D_{f_{-1}} = R_f$.

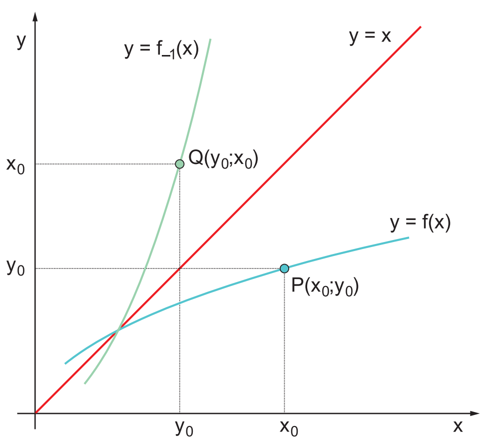
A (3.13) összefüggés azt fogalmazza meg tömören, hogy az inverz képzésénél csak a hozzárendelés irányát változtatjuk meg, de az egymáshoz rendelt elemek ugyanazok maradnak.

Rögtön látható, hogy a függvénynek és inverzének kapcsolata kölcsönös: ha *f* –nek *H*-ra korlátozott inverze f_{-1}, akkor f_{-1}-nek $D_{f_{-1}}$-re korlátozott inverze *f*. Tehát

$$f\left(f_{-1}(x)\right) = x \text{ és } f_{-1}\left(f(x)\right) = x,$$

vagyis az inverz invertálásával a változó értékét kapjuk vissza, mintha nem csináltunk volna semmit.

Az inverz definíciójának megfelelően ha egy $P(x_0; y_0)$ pont rajta van *f* grafikonján, akkor a $Q(y_0; x_0)$ pont f_{-1} grafikonján lesz rajta (3.18. ábra), a két pont egymás tükörképe az $y = x$ egyenesre nézve.



3.18. ábra Függvénynek és inverzének grafikonja

f_{-1} grafikonját tehát nagyon egyszerűen megkapjuk *f* grafikonjából, amennyiben azt ismerjük, csak tükröznünk kell azt az $y = x$ egyenesre.

Az ábra azt is illusztrálja, hogy az $y = f(x)$ egyenletű görbéből az inverz görbe egyenletét a változók felcserélésével kaphatjuk meg: $x = f(y)$. Ha ebből ki tudjuk fejezni *y*-t, akkor az így adódó $y = f_{-1}(x)$ egyenletben éppen az inverz függvény szerepel.

Példák:

1. Az $f(x) = 2x + 3$ függvény teljes értelmezési tartományán szigorúan monoton növekvő, ezért invertálható is. Grafikonjának egyenlete:
$$y = 2x + 3$$
A változók felcserélésével az
$$x = 2y + 3$$
egyenletet kapjuk, ebből
$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2},$$
tehát
$$f_{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$
Közös koordinátarendszerben ábrázolva a két egyenest látható, hogy valóban tükörképei egymásnak az $y = x$ egyenesre nézve. Az ábrázolást az olvasóra bízzuk.

2. Az $f(x) = x^3$ függvény teljes értelmezési tartományán szintén szigorúan monoton növekvő (3.12. ábra), ezért invertálható. Grafikonjának egyenlete:
$$y = x^3.$$
Cseréljük fel a változókat:
$$x = y^3.$$
Ebből az összefüggésből y-t köbgyökvonással tudjuk kifejezni:
$$y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}},$$
tehát
$$f_{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$
Ezért állítottuk a 3.4.1. fejezetben, hogy a gyökfüggvények a hatványfüggvények inverzei.

3. Az $f(x) = x^2$ függvény teljes értelmezési tartományán nem szigorúan monoton (3.12. ábra), ezért csak az értelmezési tartomány részhalmazain invertálható. Tekintsük a $H = \{x : x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$ részhalmazt, vagyis a nem negatív valós számokat. Ezen az intervallumon a függvény szigorúan monoton növekvő, így invertálható is. Grafikonjának egyenlete:
$$y = x^2.$$
Cseréljük fel a változókat:
$$x = y^2.$$
Ebből
$$y = \sqrt{x},$$

adódik. Az inverzfüggvény képlete:

$$f_{-1}(x)=\sqrt{x},$$

de ennek a függvénynek az értelmezési tartománya megegyezik $f(x)$ értékkészletével a H halmaz felett. Ezek éppen a nem negatív valós számok, tehát a négyzetgyökfüggvényt negatív számokon nem értelmezzük.

3.4.5. Logaritmusfüggvények

Az előző kitérő után újabb függvénytípust írunk le, ez a logaritmusfüggvények családja. Ha az

$$f(x)=a^x$$

képletű exponenciális függvény (3.4.2. fejezet) inverzét keressük, akkor az előbb elmondottak szerint az

$$y=a^x$$

egyenletben cseréljük fel a változókat:

$$x=a^y.$$

Vagyis azt a kitevőt keressük, amire a-t emelve x-et kapunk.

Ebből az egyenletből y-t a *logaritmuskeresés* műveletével tudjuk kifejezni:

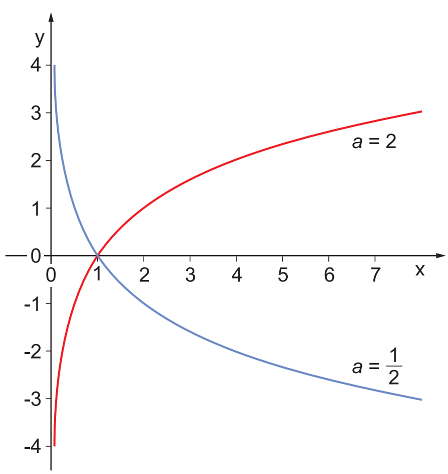
$$y=\log_a x,$$

tehát a logaritmusfüggvény képlete:

$$f(x)=\log_a x. \tag{3.14}$$

Feltételek: $a>0$ és $a\neq 1$. (Az exponenciális függvények esetében megengedhettük az $a=1$ választást, bár a kapott függvény eléggé érdektelen. Itt az $a=1$ eset értelmetlen, hiszen csak az 1 állítható elő 1 hatványozásával, egyéb szám nem. Ha az invertálhatóság feltételére gondolunk, az $f(x)=1^x=1$ függvény értelmezési tartományán, mivel konstans, nincs invertálható intervallum!)

A függvények képe a 3.19. ábrán látható.



3.19. ábra Logaritmusfüggvények grafikonjai

Az alap értékétől függetlenül mindegyik függvénygörbe átmegy a $(0;1)$ ponton, hiszen bármilyen szám nulla kitevőjű hatványa 1.

Mindegyik függvény értelmezési tartománya $D_f = \{x : x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, értékkészletük az összes valós szám.

Ha $0 < a < 1$, akkor a függvény szigorúan monoton csökkenő, görbéje konvex, ha $a > 1$, akkor szigorúan monoton növekvő, görbéje konkáv.

3.4.6. Trigonometrikus függvények inverzei

Bár az analitikai gyakorlatban ezen függvényeket ritkán használjuk, fizikai tanulmányaink miatt mindenképpen meg kell említenünk őket.

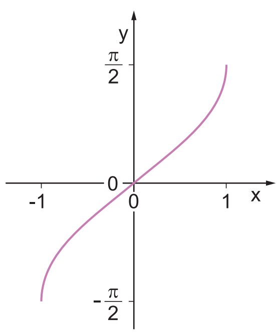
Egyik trigonometrikus függvény sem invertálható az egész értelmezési tartományán, mivel mindegyik periodikus. Mindegyikük értelmezési tartományából kiválaszthatunk azonban olyan intervallumot, melyen a függvény szigorúan monoton és ezért invertálható. Ezek az intervallumok célszerűen (lásd a 3.16. és a 3.17. ábrán):

- $\sin x$ esetében $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, itt a függvény szigorúan monoton nő;
- $\cos x$ esetében $[0;\pi]$, itt a függvény szigorúan monoton csökken;
- $\operatorname{tg} x$ esetében $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, itt a függvény szigorúan monoton nő.

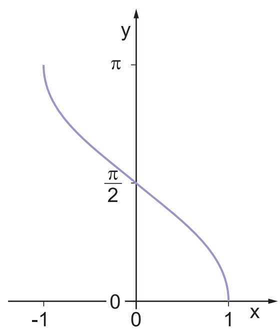
A trigonometrikus függvények inverzeit *arkuszfüggvényeknek* nevezzük és *arc*-cal jelöljük. Így tehát

- $\arcsin x$ azt a szöget jelöli, melynek szinusza *x*, nagysága pedig a $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumba esik;
- $\arccos x$ azt a szöget jelöli, melynek koszinusza *x*, nagysága pedig a $[0;\pi]$ intervallumba esik;
- $\operatorname{arc\,tg} x$ azt a szöget jelöli, melynek tangense *x*, nagysága pedig a $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumba esik.

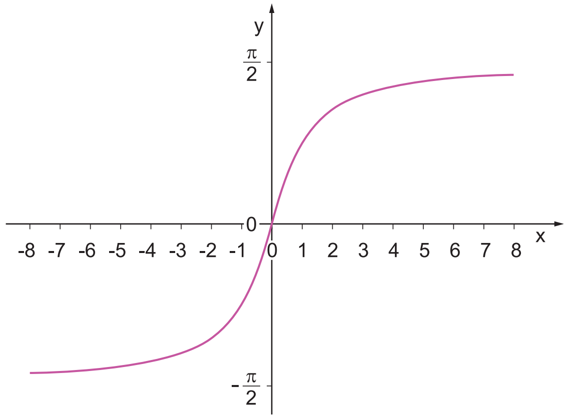
Az arkuszfüggvények ábrái a 3.20., 3.21. és a 3.22. ábrán láthatóak.



3.20. ábra Az arkusz szinusz függvény grafikonja



3.21. ábra Az arkusz koszinusz függvény grafikonja



3.22. ábra Az arkusz tangens függvény grafikonja

3.4.7. Racionális egész függvények

3.22. definíció: Valós n-edfokú *racionális egész függvény*en olyan

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

alakú függvényt értünk, amelyben $n \in \mathbb{N}$, az $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ együtthatók valós számok, továbbá $a_n \neq 0$.

A racionális egész függvényeket gyakran *polinomfüggvény*eknek vagy röviden *polinomok*nak is nevezzük.

A polinomok a hatványfüggvények származékainak tekinthetők. Értelmezési tartományuk a valós számok halmaza. Értékkészletük, menetük és egyéb tulajdonságaik is nagyon változatosak lehetnek, emiatt nagyon sok elemi függvényt meg tudunk közelíteni polinomokkal (5.8.5. fejezet).

Ha $n = 0,$ akkor nulladfokú függvényeket kapunk, ezek a konstansfüggvények. Ha $n = 0$ és egyúttal $a_0 = 0$ is teljesül, tehát $f(x) = 0,$ akkor a polinom fokszámát megállapodásszerűen $-\infty$ -nek tekintjük.

Polinomok összege, különbsége és szorzata is polinom, hányadosuk viszont általában racionális törtfüggvény (3.4.8. fejezet).

Polinomok között a maradékos osztás műveletét az egész számokkal végzett maradékos osztás analógiájára tudjuk értelmezni. Nézzünk ehhez egy számpéldát:

Osszuk el 1298-at 37-tel:

$$1298 : 37 = ?$$

Az osztandó első két számjegyéből álló szám még nem osztható 37-tel, ezért három számjegyet veszünk (129) és osztunk:

$$1298 : 37 = 3.$$

A kapott számmal megszorozzuk a 37-et és az eredményt leírjuk az osztandó alá:

$$\begin{array}{l} 1298 : 37 = 3. \\ 111 \end{array}$$

Kivonjuk az eredményt a kijelölt számjegyekből álló számból:

$$\begin{array}{l} 1298 : 37 = 3, \\ \underline{111} \\ \ \ 18 \end{array}$$

az eredményhez hozzáírjuk a következő számjegyet és a lépéseket ismételjük:

Osztunk:

$$\begin{array}{l} 1298 : 37 = 35, \\ \underline{111} \\ \ \ 188 \end{array}$$

a kapott számjeggyel szorzunk:

$$\begin{array}{l} 1298 : 37 = 35, \\ \underline{111} \\ \ \ 188 \\ \ \ 185 \end{array}$$

az eredményt kivonjuk:

$$\begin{array}{l} 1298 : 37 = 35. \\ \underline{111} \\ \ \ 188 \\ \ \ \underline{185} \\ \ \ \ \ \ 3 \end{array}$$

Ha lenne következő számjegy az osztandóban, akkor folytathatnánk az osztást. Mivel nincs, és 3 már nem osztható 37-tel, a műveletet befejeztük.

Az eredmény: 1298-ban a 37 35-ször van meg, a maradék 3.

Szorzással felírva:

$$1298 = 37 \cdot 35 + 3.$$

A definíció tehát a következő:

3.23. definíció: f és g legyen polinomfüggvény. f-nek g-vel való *maradékos osztás*án olyan p és r polinomok meghatározását értjük, melyekkel a függvények egész értelmezési tartományán

$$f(x) = g(x) \cdot p(x) + r(x).$$

A p polinom a *hányados*, r a *maradék*.

Ha $r(x) = 0$, akkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} = p(x),$$

vagyis az osztás ilyen esetben eredményez polinomot.

A következőkben konkrét példán röviden bemutatjuk az osztás menetét a gyakorlatban. A példa alapján a művelet könnyen általánosítható.

Példa:

Legyen $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 8x - 4$, $g(x) = x^2 + x - 2$!

Az elvégzendő osztás a következő:

$$\left(x^4 - x^3 - x^2 + 8x - 4\right) : \left(x^2 + x - 2\right).$$

A művelet végrehajtása hasonló az előzőekhez. A hányados első tagját úgy kapjuk meg, hogy elosztjuk $f(x)$ első tagját, x^4-t $g(x)$ első tagjával, x^2-tel. Az eredmény természetesen x^2 lesz. Ezt leírjuk, majd megszorozzuk vele az osztó tagjait, és leírjuk őket $f(x)$ alá:

$$\begin{array}{l}\left(x^4 - x^3 - x^2 + 8x - 4\right) : \left(x^2 + x - 2\right) = x^2 \\ \underline{x^4 + x^3 - 2x^2}\end{array}$$

A szorzat tagjait kivonjuk az osztandóból (célszerűen a *teljes* osztandóból):

$$\begin{array}{l}\left(x^4 - x^3 - x^2 + 8x - 4\right) : \left(x^2 + x - 2\right) = x^2 \\ \underline{x^4 + x^3 - 2x^2} \\ \quad -2x^3 + x^2 + 8x - 4\end{array}$$

Kaptunk egy eggyel kisebb fokszámú polinomot, ezzel a fent leírtakat ismételve folytathatjuk az osztást, mert fokszáma még nem kisebb az osztó fokszámánál:

A hányados következő tagja $-2x$ lesz, ezzel kell szoroznunk az osztót:

$$\left(x^4-x^3-x^2+8x-4\right):\left(x^2+x-2\right)=x^2-2x$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^4+x^3-2x^2} \\
\quad -2x^3+x^2+8x-4 \\
\quad \underline{-2x^3-2x^2+4x}
\end{array}$$

A kivonás elvégzése után a következő a kép:

$$\left(x^4-x^3-x^2+8x-4\right):\left(x^2+x-2\right)=x^2-2x$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^4+x^3-2x^2} \\
\quad -2x^3+x^2+8x-4 \\
\quad \underline{-2x^3-2x^2+4x} \\
\qquad\qquad 3x^2+4x-4
\end{array}$$

A hányados következő tagja 3 lesz. A szorzás és a kivonás elvégzése után megkapjuk a végeredményt,

$$\left(x^4-x^3-x^2+8x-4\right):\left(x^2+x-2\right)=x^2-2x+3$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^4+x^3-2x^2} \\
\quad -2x^3+x^2+8x-4 \\
\quad \underline{-2x^3-2x^2-4x} \\
\qquad\qquad 3x^2+4x-4 \\
\qquad\qquad \underline{3x^2+3x-6} \\
\qquad\qquad\qquad x+2
\end{array}$$

ugyanis x már nem osztható x^2-tel, fokszáma kisebb.

A hányados tehát x^2-2x+3, a maradék $x+2$:

$$x^4-x^3-x^2+8x-4=\left(x^2+x-2\right)\left(x^2-2x+3\right)+\left(x+2\right).$$

Az analitikai gyakorlatban nagyon gyakoriak a különböző lineáris függvények (3.1. fejezet). Annyira jól használhatóak, hogy nem lineáris függvényeket is gyakran lineárisakká alakítanak megfelelő konverziókkal. Egyetlen példa a linearizálásra:

Az

$$f\left(x\right)=qx^p$$

függvény mindkét oldalának logaritmusát véve:

$$\lg f\left(x\right)=p\lg x+\lg q.$$

Ha bevezetjük az $u = \lg x$, a $v = \lg q$ és a $g(u) = \lg f(x)$ jelöléseket, akkor a könnyen ábrázolható és vizsgálható

$$g(u) = pu + v$$

függvényt kapjuk, ahol v egy konstans logaritmusaként maga is konstans. Csak pozitív számoknak van logaritmusa, ezt a konverziónál figyelembe kell venni.

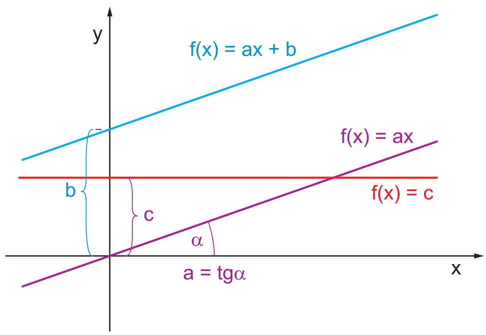
Általánosan az

$$f(x) = a_1 x^1 + a_0$$

egyenletű polinomot nevezzük lineáris függvénynek, mert a grafikonja egyenes. Gyakoribb az együtthatók fentitől eltérő jelölése, például

$$f(x) = ax + b.$$

Az a együtthatót *meredekség*nek vagy *iránytangens*nek, a b állandót *tengelymetszet*nek nevezzük (3.23. ábra).



3.23. ábra Lineáris függvények

Értelmezési tartománya és értékkészlete is a valós számok halmaza, ha $a \neq 0$. Ha $a = 0$, akkor az

$$f(x) = b$$

konstans függvényt kapjuk. Ennek értékkészlete egyetlen valós szám, a b, amit ilyenkor inkább C-vel szokás jelölni:

$$f(x) = C.$$

A függvény jellemzője, hogy értéke valójában nem függ x értékétől.

Amennyiben $b = 0$, akkor az

$$f(x) = ax$$

függvényt kapjuk. Átrendezve:

$$\frac{f(x)}{x} = a,$$

vagyis a függvényérték és a változó összetartozó értékeinek hányadosa állandó (eltekintve az $x = 0$ esettől). Az ilyen típusú összefüggés neve *egyenes arányosság*, az analitikában a jelentősége alapvető.

A lineáris függvények egyenleteit általában mérési pontokra történő függvényillesztésekkel kapjuk meg. Annak eldöntése, hogy a meredekség vagy a tengelymetszet értéke nulla-e vagy attól különböző érték, komoly matematikai statisztikai számításokat igényel.

3.4.8. Racionális törtfüggvények

A racionális törtfüggvények két polinom hányadosai:

$$Q(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0},$$

ahol a nevező fokszáma, *m* legalább 1.

Mint említettük, a polinomok tulajdonságai nagyon változatosak, még inkább igaz ez a törtfüggvényekre, annyira, hogy általánosságban csak nagyon keveset mondhatunk róluk.

A számláló zérushelyei egyben a függvény zérushelyei is, kivéve, ha a nevezőnek is éppen zérushelyei, erre fokozott figyelmet kell fordítani. Az ilyen törtek egyszerűsíthetők, de tudnunk kell, hogy az egyszerűsítéssel változtatunk az értelmezési tartományon.

A nevező zérushelyein a függvénynek nincs értelme, ezek szakadási helyek. Minden esetben vizsgálni kell a határértékeket a szakadási helyek mindkét oldalán külön-külön.

Példa:

Az

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

függvény számlálója és nevezője is szorzattá alakítható:

$$f(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x+1)}.$$

A nevező zérushelyei a –2, az 1 és a –1, ezeken a helyeken a függvény nincs értelmezve. A számláló zérushelyei a 3 és az 1. Ezek a függvénynek is zérushelyei lennének, de a nevező miatt 1 kiesik, tehát csak a 3 a zérushely.

A tört egyszerűsíthető $(x-1)$ -gyel:

$$f(x) = \frac{(x-3)}{(x+2)(x+1)},$$

de figyelembe kell vennünk, hogy a kapott tört értelmezési tartományába az 1 már beletartozik, a két képlet nem egyenértékű.

Törtfüggvény vizsgálatával az 5.8.7. fejezetben is találkozunk.

Ha a függvény képletében $n \geq m$, akkor polinomosztással átalakíthatjuk a képletet a 3.23. definíciónak megfelelően, csökkentve így a számláló fokszámát, ez sokszor nagy segítséget jelent.

Feladatok:

1. Adja meg a következő függvények lehetséges legbővebb értelmezési tartományát!

   a) $f(x) = 3x - 5$ *b)* $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$

   c) $f(x) = \sqrt{x-4}$ *d)* $f(x) = e^{x-5}$

   e) $f(x) = \lg(4x-4)$ *f)* $f(x) = \sqrt{\lg x}$

   g) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$ *h)* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{-x}}$

   i) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$ *j)* $f(x) = \sqrt{tgx}$

2. Adja meg a következő függvények képletét!

   a) Az $a = 6$ oldalú téglalapok területe a másik oldal függvényében.

   b) A $T = 9$ területű háromszögek magassága az alap függvényében.

   c) Az $a = 4$ szárú egyenlőszárú háromszögek területe a szárak közötti szög függvényében.

   d) Az $r = 9$ sugarú körbe írható téglalapok *a* oldala a *b* oldal függvényében.

   e) A gömb térfogata a felszíne függvényében.

3. Invertálja a következő függvényeket! Ha szükséges, adjon meg intervallumot, amelyen a függvény invertálható!

   a) $f(x) = 2x - 1$ *b)* $f(x) = (x-2)^3$

   c) $f(x) = (x-2)^2$ *d)* $f(x) = 3^x$

4. Számítsa ki illetve írja fel a következő függvények helyettesítési értékeit az adott helyeken!

   a) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = 3$

   b) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = 3 + h$

   c) $f(x) = x^2 - x + 2$, $x_0 = -2$

   d) $f(x) = x^2 - x + 2$, $x_0 = -2 + h$

   e) $f(x) = \sqrt{2x+3}$, $x_0 = 3$

   f) $f(x) = \sqrt{2x+3}$, $x_0 = 3 + h$

5. Végezze el a következő műveleteket!

a) $(x-2)(x+3)$

b) $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)$

c) $\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}\right)$

d) $\dfrac{x^2-2x-3}{x}$

e) $\left(2x^3-x^2-7x+2\right):(x-2)$

4. Határértékszámítás

4.1. Bevezetés

Az előző fejezetekben összefoglalt ismeretek a gimnáziumi tananyag részeit képezik. Ebben a fejezetben már új ismeretekkel találkozunk, belépünk a magasabb matematika világába. Új fogalmakkal találkozunk és újfajta szemléletet kell elsajátítanunk. Látható lesz, hogy a fogalmak logikusan épülnek egymásra a halmaz, függvény, határérték, derivált, integrál, differenciálegyenlet sorrendben. Tudnunk kell azonban, hogy a fogalmak nem ebben a – ma már tisztának és logikusnak tűnő – sorrendben alakultak ki.

Néhány tudós nevét, akik a matematika ezen ágának kialakulásában alapvető érdemeket szereztek, mindenképpen meg kell említenünk.

A görög *Arkhimédesz* (i. e. 287? – i. e. 212) már az ókorban foglalkozott különböző görbékkel határolt síkidomok, például parabolaszeletek területének, illetve különböző testek (kúp, gömb, henger) térfogatának kiszámításával, π értékének meghatározásával, gyakorlatilag megkapta a kör területére az általunk ismert $r^2\pi$ formulát[8]. Módszere a ma integrálszámításnak nevezett eljárás csíráit hordozta, aminek korrekt megalapozása az angol *Isaac Newton* (1642 – 1727) és a német *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646 – 1716) nevéhez fűződik[2,3]. Mint látható, a két tudós kortárs volt, de az új eljárást, a *differenciál- és integrálszámítás*t („kalkulust”) valószínűleg egymástól függetlenül, közel egyidőben dolgozták ki. Mindketten életük végéig küzdöttek elsőbbségük elismeréséért, de a kérdés máig sem tisztázódott megnyugtatóan. Ma már látjuk, hogy a differenciál- és integrálszámításban alapvető a határérték fogalma, ezt azonban sem Leibniznek, sem Newtonnak nem sikerült korrekt módon megalkotnia, nem is tekintették fontosnak.

A határérték fogalmának tisztázásában és a matematikai analízis modern tárgyalásmódjának kialakításában alapvető érdemeket szerzett *Augustin Louis Cauchy* (1789 – 1857) francia matematikus. A cseh *Bernhard Bolzano* (1781 – 1848), a német *Heinrich Eduard Heine* (1821 – 1881) és a szintén német *Karl Theodor Wilhelm Weierstrass* (1815 – 1897) munkásságával jelentős mértékben járult hozzá a Newton és Leibniz által kapott, a gyakorlatban rendkívül gyümölcsöző eredmények szigorú és korrekt megalapozásához[4].

Felsorolásunk természetesen közel sem teljes. Az említetteken kívül még számosan hozzájárultak – egymás eredményeit továbbfejlesztve és egymás hibáit kiküszöbölve – a differenciál- és integrálszámítás fejlődéséhez. A terület rendkívüli jelentőségét mutatja, hogy ma már a valószínűségszámítás, a kémia, a fizika, a biológia, a műszaki élet legkülönbözőbb területei, az űrkutatás, a távközlés, a közgazdaságtan vagy akár az időjárás előrejelzése is elképzelhetetlen a differenciál- és integrálszámítás nélkül.

4.2. Függvény határértéke a végtelenben

Tekintsük példaként a következő három függvényt:

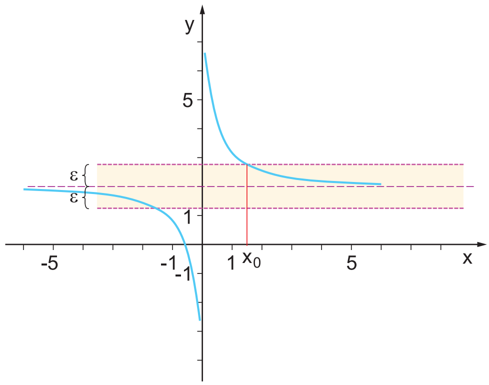
$$f(x) = \frac{2x+1}{x}, \tag{4.1}$$

$$f(x) = \sin x \tag{4.2}$$

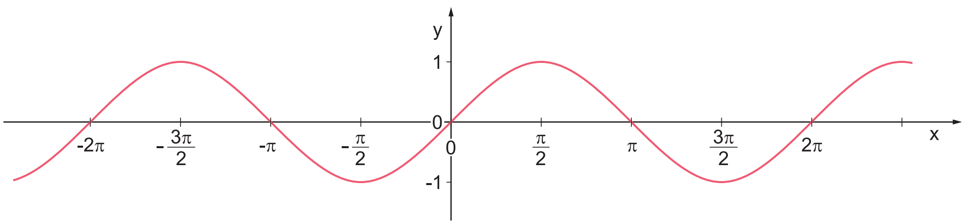
és

$$f(x) = x^2. \tag{4.3}$$

Vizsgáljuk meg, hogy melyik függvény hogyan viselkedik, ha x értéke növekszik! Tanulmányozhatjuk a grafikonjaikat is, de az is tanulságos lehet, ha értéktáblázatokat állítunk össze nagy x értékekkel (4.1-4.3. ábra illetve 4.1-4.3. táblázat).



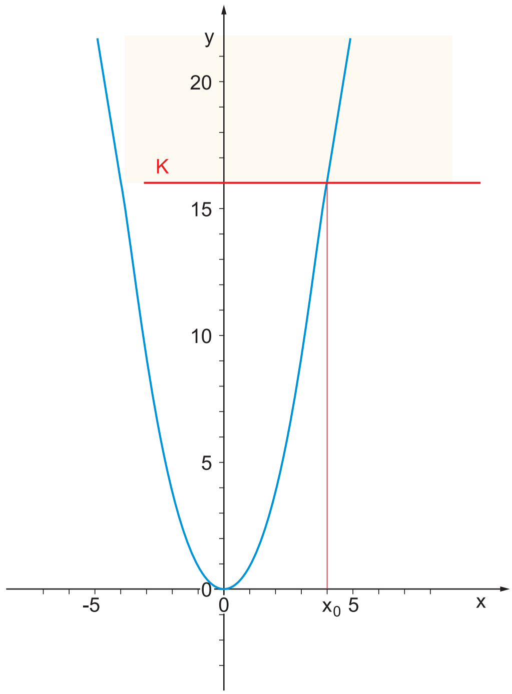
4.1. ábra Az $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$ függvény grafikonja



4.2. ábra Az $f(x) = \sin x$ függvény grafikonja

A grafikonokat illetve a táblázatokat összevetve azt látjuk, hogy a függvények x növekedésével nagyon eltérően viselkednek.

A (4.1) függvény értékei egyre közelebb kerülnek 2-höz, a (4.2) értékei -1 és 1 között változnak, a (4.3) értékei pedig rohamosan nőnek.



4.3. ábra Az $f(x)=x^2$ függvény grafikonja

4.1. táblázat Az $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}$ függvény egy értéktáblázata

x	1	10	100	1000	10000	100000
$\dfrac{2x+1}{x}$	3	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001

4.2. táblázat Az $f(x)=\sin x$ függvény egy értéktáblázata

	$\dfrac{\pi}{4}$	$10\dfrac{\pi}{4}$	$100\dfrac{\pi}{4}$	$999\dfrac{\pi}{4}$	$10001\dfrac{\pi}{4}$	$100000\dfrac{\pi}{4}$
$\sin x$	0,7071	1	0	–0,7071	0,7071	0

Fordítsuk figyelmünket az $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}$ függvényre, és fogalmazzuk meg a megfigyelt jelenséget szabatosan! Ehhez végezzünk el a grafikonon egy első ránézésre kissé szokatlan vizsgálatot!

4.3. táblázat Az $f(x)=x^2$ függvény egy értéktáblázata						
x	1	10	100	1000	10000	100000
x^2	1	100	10000	1000000	10^8	10^{10}

Válasszunk egy kis pozitív számot, jelöljük ε-nal! Mérjük föl a függőleges tengelyre a *2* értékből kiindulva fölfelé és lefelé is, és húzzunk vízszintes egyeneseket a kapott pontokon keresztül! (Ezt az eljárást röviden úgy nevezhetjük, hogy húzunk az $y=2$ egyenletű egyenes köré egy ε sugarú sávot. ε pozitivitásához azért ragaszkodunk, mert egy sáv sugara csak pozitív szám lehet.) Megfigyelhetjük, hogy egy adott helytől jobbra a függvény görbéje a sáv belsejében halad. Ezt a helyet x_0-lal jelöltük a 4.1. ábrán. Ha például $\varepsilon=1$, akkor a két határoló egyenes egyenlete $y=3$ és $y=1$. Ilyenkor $x_0=1$. Nevezzük el x_0-t küszöbszámnak!

Csökkentsük ε értékét $\frac{1}{2}$-re! A helyzet annyiban tér el az előzőtől, hogy a küszöbszám értéke most nagyobb, *2* lesz. Ha ε-t $\frac{1}{10}$-nek választjuk, akkor a küszöbszám 10-nek, ha mondjuk $\frac{1}{100}$-nak, akkor a küszöbszám 100-nak adódik. Az a sejtésünk támadhat, hogy bármilyen kicsinek is választjuk ε-t, mindig találunk hozzá egy megfelelő küszöbszámot.

Sejtésünk bizonyításához kissé pontosítani kell eddigi szóhasználatunkon. Azt, hogy egy függvény görbéje a *2* köré rajzolt ε sugarú sávon belül halad, úgy fejezhetjük ki egzakt módon, hogy $f(x)$ értéke *2*-nek az ε sugarú környezetébe esik:

$$2-\varepsilon<f(x)<2+\varepsilon.$$

Átrendezve kissé:

$$-\varepsilon<f(x)-2<+\varepsilon.$$

A két egyenlőtlenséget egyetlen abszolútértékes egyenlőtlenségbe foglalhatjuk:

$$|f(x)-2|<\varepsilon. \tag{4.4}$$

Ez az egyenlőtlenség már felhasználható sejtésünk bizonyításához.

Azt kell tehát igazolnunk, hogy ε akármilyen kicsi pozitív szám, mindenképpen találunk olyan hozzá tartozó x_0 küszöbszámot, amelynél nagyobb x értékekre a (4.4) egyenlőtlenség igaz. Beírva $f(x)$ képletét az egyenlőtlenségbe a következőt kapjuk:

$$\left|\frac{2x+1}{x}-2\right|<\varepsilon. \tag{4.5}$$

Az abszolútértékes egyenlőtlenség megoldása, melyben ráadásul egy paraméter, ε is szerepel, szokatlan feladat, menjünk rajta végig lépésenként! Hozzunk közös nevezőre az abszolútérték jelen belül:

$$\left|\frac{2x+1}{x}-\frac{2x}{x}\right|<\varepsilon,$$

$$\left|\frac{2x+1-2x}{x}\right|<\varepsilon.$$

Az összevonást elvégezzük a számlálóban:

$$\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon.$$

Az abszolútérték jel elhagyása előtt fontoljuk meg a következőt: azt vizsgáljuk, hogy hogyan viselkedik függvényünk, ha x értéke nagy pozitív szám. Mivel a tört számlálója pozitív, és az előbbiek szerint nevezője is, az abszolútérték jelen belül pozitív szám szerepel, melynek abszolútértéke önmaga. Az abszolútérték jel tehát egyszerűen elhagyható:

$$\frac{1}{x}<\varepsilon.$$

Mivel x és ε egyaránt pozitív, szorozhatunk és oszthatunk velük, az egyenlőtlenség igaz marad:

$$1<\varepsilon x,$$

illetve

$$\frac{1}{\varepsilon}<x.$$

Az eredményt értelmezve tehát ha x értéke nagyobb $\frac{1}{\varepsilon}$-nál, akkor a kiindulási egyenlőtlenségünk igaz. Másképp szólva

$$x_0=\frac{1}{\varepsilon}.$$

Ezzel megmutattuk, hogy tetszőleges ε-hoz hogyan találhatjuk meg a megfelelő küszöbszámot.

Az eredményre alapozva azt mondjuk, hogy az

$$f(x)=\frac{2x+1}{x}$$

függvény *határértéke a végtelenben* 2. A szokásos jelölést használva:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}=2.$$

A fent ismertetett eljárást általánosítva juthatunk el a végtelenben vett határérték Cauchy-féle definíciójához:

4.1. definíció: Egy $f(x)$ függvény határértéke a végtelenben az A szám, ha bármilyen pozitív ε-hoz található olyan x_0 küszöbszám, hogy $f(x)$ értéke az A ε sugarú környezetébe esik, ha $x > x_0$.

(Ez utóbbit úgy is megfogalmazhatjuk, hogy $\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$, ha $x > x_0$.)

A határérték jelölése:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

Az $f(x) = \sin x$ illetve az $f(x) = x^2$ függvény görbéjét megvizsgálva láthatjuk, hogy egyiknél sincs olyan A érték, amihez a görbe hozzásimulna, ha x a végtelenbe tart, ezeknek a függvényeknek tehát *nincs* határértéke a végtelenben (4.2. és 4.3. ábra).

Példák:

1. Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény határértéke a végtelenben nulla:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

2. Az $f(x) = \frac{1-x^2}{2+x^2}$ függvény határértéke a végtelenben -1:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{2+x^2} = -1.$$

Mindkét érték helyességét igazolhatja az olvasó a fent bemutatott eljárást alkalmazva, ajánljuk is a levezetések elvégzését.

3. Az $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ függvény határértéke a végtelenben nulla:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Igazolás:

A definició alapján a következő egyenlőtlenséget írhatjuk fel:

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| < \varepsilon.$$

A nulla elhagyható:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon.$$

x nagy pozitív szám, abszolútértéke önmaga:

$$\frac{\left|\sin x\right|}{x} < \varepsilon. \tag{4.6}$$

Tudjuk, hogy

$$-1 \le \sin x \le 1,$$

vagyis

$$\left|\sin x\right| \le 1.$$

(4.6) tehát átírható:

$$\frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x} < \varepsilon,$$

azaz

$$\frac{1}{x} < \varepsilon.$$

Ebből az

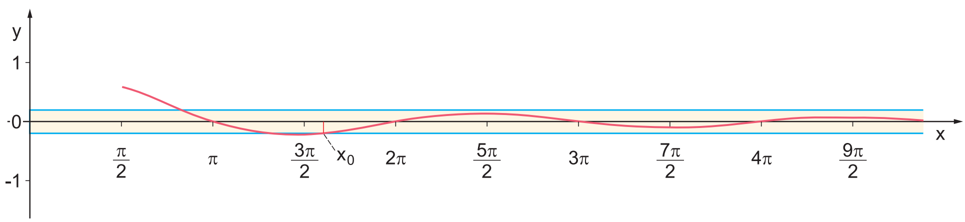
$$\frac{1}{\varepsilon} < x$$

megoldást kapjuk, tehát a nulla valóban határértéke a függvénynek a végtelenben (4.4. ábra). Az ábráról egyúttal az is leolvasható, hogy a függvény felveheti a határértékét, ami természetes is. A határérték definíciójában ugyanis nincs szó arról, hogy a határérték benne van-e a függvény értékkészletében, vagy nincs.

4. Az $f(x) = C$, azaz a konstans függvény határértéke a végtelenben C:

$$\lim_{x \to \infty} C = C. \tag{4.7}$$

Ez a tény akár a szemlélet alapján, akár a definíció alapján történő levezetéssel könnyen belátható.



4.4. ábra Az $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ függvény grafikonja

A mínusz végtelenben vett határérték definícióját könnyen megadhatjuk a 4.1. definíció átfogalmazásával:

4.2. definíció: Egy $f(x)$ függvény határértéke a mínusz végtelenben az A szám, ha bármilyen pozitív ε-hoz található olyan x_0 küszöbszám, hogy $f(x)$ értéke az A ε sugarú környezetébe esik, ha $x < x_0$.

Jelölése:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

Példa:

Az $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$ függvény határértéke a mínusz végtelenben *2*:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{x} = 2,$$

ami a függvény grafikonján látszik is (4.1. ábra).

Ez a tény is könnyen igazolható a definíció alapján, ehhez is a (4.5) egyenlőtlenséget kell felírnunk és megoldanunk:

$$\left|\frac{2x+1}{x}-2\right|<\varepsilon.$$

A levezetés során azonban ügyelnünk kell arra, hogy x értéke most negatív. A levezetést kevésbé részletesen mutatjuk be. Közös nevezőre hozás és összevonás után a következőt kapjuk:

$$\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon.$$

x most nagy abszolútértékű negatív számot jelöl, az abszolútérték a tört ellentettje lesz:

$$-\frac{1}{x}<\varepsilon.$$

x-szel szorozva az egyenlőtlenség megfordul:

$$-1>\varepsilon x,$$

illetve

$$-\frac{1}{\varepsilon}>x.$$

Vagyis: ha x értéke kisebb $-\frac{1}{\varepsilon}$-nál, akkor a kiindulási egyenlőtlenségünk igaz:

$$x_0=-\frac{1}{\varepsilon}.$$

4.3. A határérték fogalmának kiterjesztése

Az előzőekben láttuk, hogy nem egyformán viselkednek azok a függvények, melyeknek nincs határértéke a végtelenben. Célszerűnek látszik megkülönböztetni az olyan eseteket, amelyekre az $f(x)=\sin x$ függvény a példa, illetve az olyanokat, amelyeket az $f(x)=x^2$ függvény képvisel. Előbbi esetben a függvény „nem tart sehová”, az utóbbi függvény viszont „a végtelenbe tart”, ha x minden határon túl növekszik. Ez utóbbi tényt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a függvény *tágabb értelemben vett határértéke* a végtelenben végtelen. Grafikonon történő ábrázolás segítségével pontosíthatjuk a tágabb értelemben vett határérték fogalmát (4.3. ábra).

Válasszunk ki a függőleges tengelyen egy tetszőleges számot a függvény értékkészletéből, mondjuk 16-ot! Ha x értékét kellően nagyra, jelen esetben 4-nél nagyobbra választjuk, akkor $f(x)=x^2$ értéke biztosan nagyobb lesz 16-nál. Látható, hogy bármilyen függvényértékkel elvégezhetjük ezt a műveletet. Az eljárás általánosításával jutunk el függvény tágabb értelemben vett határértékének Cauchy-féle definíciójához:

4.3. definíció: Egy $f(x)$ függvény tágabb értelemben vett határértéke a végtelenben végtelen, ha bármilyen K számhoz találunk olyan x_0 küszöbszámot, amelyre igaz, hogy $f(x)>K$, amennyiben $x>x_0$.

Jelölés:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

A definíciót értelemszerűen módosítva definiálhatjuk a tágabb értelemben vett határértéket a mínusz végtelenben, illetve azt, hogy a tágabb értelemben vett határérték értéke mínusz végtelen akár a végtelenben, akár a mínusz végtelenben. A definíciók kimondását az olvasóra bízzuk, bátorítjuk is a definíciók megalkotására, segít a határérték fogalmával jobban megbarátkozni.

A végtelenben vett határértékekkel kapcsolatban két fogalmat kell még definiálnunk:

4.4. definíció: Ha egy $f(x)$ függvénynek a határértéke a végtelenben egy A valós szám, akkor azt mondjuk, hogy a függvény *konvergens*. Amennyiben a függvénynek nincs határértéke a végtelenben, vagy a határértéke végtelen, akkor azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény *divergens*.

A végtelenben vett határérték egyértelműségére vonatkozik a következő:

4.1. tétel: Ha egy $f(x)$ függvénynek létezik a szorosabb értelemben vett határértéke a végtelenben, akkor ez a határérték *egyértelműen meghatározott*.

Másképpen: egy függvénynek csak egyetlen határértéke lehet a végtelenben.

A bizonyítás indirekt úton történhet.

Tegyük fel, hogy a tétel állításával ellentétben egy $f(x)$ függvénynek az A és a B valós szám egyaránt határértéke a végtelenben, és $A \neq B$.

Mivel a két szám nem egyenlő, biztosan létezik olyan pozitív ε, hogy A és B ε sugarú környezeteinek nincsenek közös pontjaik, a két környezet diszjunkt (lehet például $\varepsilon = \frac{|A-B|}{100}$).

A 4.1. definíció szerint található egy olyan x_0 küszöbszám, hogy $f(x)$ minden olyan esetben benne van A ε sugarú környezetében, amikor $x > x_0$. Ezekben az esetekben azonban $f(x)$ nem lehet benne B-nek az ε sugarú környezetében, hiszen a két környezet diszjunkt, vagyis B nem lehet $f(x)$ határértéke. Ellentmondásra jutottunk, a tétel tehát igaz.

4.4. A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek

Megismertük a határérték fogalmát, sokféle függvény esetében be tudjuk már bizonyítani, hogy egy adott szám a függvény határértéke. Nem ismerünk azonban még olyan módszereket, amelyekkel függvények határértékeit ki tudnánk számítani. A módszerek alapjait a következő tételek jelentik:

4.2. tétel: Függvények összegének határértéke a végtelenben megegyezik a határértékek összegével, vagyis az összeadás és a határérték-képzés sorrendje felcserélhető:

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x).$$

4.3. tétel: Függvények szorzatának határértéke a végtelenben megegyezik a tényezők szorzatának határértékével, a műveletek sorrendje itt is felcserélhető:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)\,g(x)\right)=\lim_{x\to\infty}f(x)\cdot\lim_{x\to\infty}g(x).$$

4.4. tétel: Két függvény hányadosának határértéke a végtelenben megegyezik a két határérték hányadosával:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty}g(x)}.$$

Mindhárom tétel érvényességének feltétele, hogy $f(x)$ és $g(x)$ határértéke létezzen, a 4.4 tétel érvényességének az is feltétele, hogy $g(x)$ határértéke ne nulla legyen.

A bizonyítások gondolatmenetének szemléltetése céljából bemutatjuk a 4.2. tétel bizonyítását, a másik két tételt elfogadjuk bizonyítás nélkül:

Legyen

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$$

és

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=B!$$

Válasszunk a két határérték környezetének sugaraul $\frac{\varepsilon}{2}$ értéket! A 4.1. definíció szerint léteznek olyan x_A és x_B küszöbszámok, hogy

$$\left|f(x)-A\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ \text{ha}\ x>x_A$$

és

$$\left|g(x)-B\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ \text{ha}\ x>x_B,$$

hiszen bármilyen pozitív ε-hoz található megfelelő küszöbszám.

x_A és x_B közül a nagyobbikat közös küszöbszámnak választhatjuk (jelöljük $x_{\max}$-szal), ezzel érvényes marad mindkét egyenlőtlenség.

Adjuk össze a két egyenlőtlenséget:

$$\left|f(x)-A\right|+\left|g(x)-B\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\ \text{ha}\ x>x_{\max}.$$

Két szám abszolútértékének összege biztosan nem kisebb, mint az összeg abszolútértéke:

$$\left|f(x)-A+g(x)-B\right|\le\left|f(x)-A\right|+\left|g(x)-B\right|,$$

írhatjuk tehát, hogy

$$\left|f(x)-A+g(x)-B\right|<\varepsilon, \text{ ha } x>x_{\max}.$$

Átrendezve:

$$\left|\left(f(x)+g(x)\right)-\left(A+B\right)\right|<\varepsilon, \text{ ha } x>x_{\max}.$$

Ha ezt az összefüggést a 4.1. definícióval összevetjük, azt látjuk, hogy a két függvény összegének határértéke éppen a két határérték összege, amint azt a 4.2. tétel állítja.

A (4.7) egyenlet szerint konstansfüggvény határértéke önmaga. Ezt beírva a 4.3. tétel összefüggésébe kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\left(Cf(x)\right)=C\lim_{x\to\infty}f(x).$$

C értékét –1-nek választva láthatjuk, hogy függvény ellentettjének határértéke a határérték ellentettje.

Ezt alkalmazva a 4.2. tételben azt kapjuk, hogy függvények különbségének határértéke a határértékek különbsége:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to\infty}f(x)-\lim_{x\to\infty}g(x).$$

Ezeket az összefüggéseket alkalmazva nagyon sok függvény határértéke könnyen meghatározható.

Egy adott függvény határértéke alapvetően háromféle típusú lehet, amennyiben létezik: nulla, valamilyen véges szám illetve végtelen. A függvényekből különböző műveletekkel kapott újabb függvények határértéke az előbbiek szerint sokféle típusú lehet. Nézzük meg, hogy a különböző típusú eredmények hogyan értékelhetők!

Tudjuk, hogy a végtelen nem konkrét szám, műveleteket nem végezhetünk vele. A továbbiakban gondoljunk úgy rá, mint egy „tetszőlegesen nagy", „minden határon túl nagy" számra. Ha így értelmezzük a ∞ jelet, akkor értelmezhetjük a különböző eredményeket. Könnyebb a nullát tartalmazó eredmények értelmezése, ha a nullát sem konkrét számnak, hanem mondjuk a ∞ reciprokának, tehát egy „tetszőlegesen kicsi", „minden határon túl kicsi" abszolútértékű számnak tekintjük.

A különböző műveletekkel kapható különböző típusokat és az értelmezéseket a 4.4. táblázatban foglaljuk össze (a véges számot C-vel jelöljük).

4.4. táblázat Különböző határértéktípusok és eredményeik

Típus	Eredmény	Típus	Eredmény
$C+\infty$	∞	$C+0$	C
$C-\infty$	$-\infty$	$C-0$	C
$\infty-C$	∞	$0-C$	$-C$
$C\cdot\infty$	∞	$C\cdot 0$	0
$\frac{C}{\infty}$	0	$\frac{C}{0}$	∞
$\frac{\infty}{C}$	∞	$\frac{0}{C}$	0
$\infty+\infty$	∞	$0+0$	0
$\infty-\infty$	Határozatlan	$0-0$	0
$0\cdot\infty$	Határozatlan	$0\cdot 0$	0
$\frac{0}{\infty}$	0	$\frac{0}{0}$	Határozatlan
$\frac{\infty}{\infty}$	Határozatlan	$\frac{\infty}{0}$	∞

A táblázat néhány adata triviális, néhány talán kissé szokatlan első ránézésre. A legfontosabb azt megjegyezni, hogy ha nem értelmezhető típusú, határozatlan határértékkel találkozunk, akkor a függvény képletét át kell alakítanunk úgy, hogy a kapott kifejezés határértéke határozott legyen. A későbbiekben látni fogjuk, határozatlan határérték értéke gyakorlatilag bármi lehet, beleértve a nullát, a végtelent és a mínusz végtelent is.

Lássunk néhány példát a fenti szabályok és a táblázat alkalmazására a jobb megértés érdekében!

Példák:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-6)$

   A zárójelen belüli kifejezés $\infty - C$ típusú, értéke ∞, tehát

   $$\lim_{x\to\infty}(x-6)=\infty.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2$

   A függvény $\infty\cdot\infty$ típusú, hiszen $x^2 = x\cdot x$, értéke ∞, tehát

   $$\lim_{x\to\infty} x^2=\infty.$$

Ebből arra a következtetésre juthatunk, hogy x bármilyen pozitív egész kitevőjű hatványának a határértéke a végtelenben végtelen, ami könnyen érthető, hiszen ha x a végtelenbe tart, akkor hatványai még gyorsabban tartanak a végtelenbe.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$

A függvény képlete $\frac{C}{\infty}$ típusú, értéke nulla, tehát

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Összevetve az eredményt az előbbi példával láthatjuk, hogy x bármely pozitív egész kitevőjű hatványának reciproka (vagyis negatív egész kitevőjű hatványa) a nullához tart, ha x a végtelenbe tart.

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^3 - 8x^2\right)$

A zárójelen belüli kifejezés $\infty - \infty$ típusú, határozatlan, át kell tehát alakítanunk, hogy határozott kifejezést kapjunk. Jelen esetben a kiemelés eredményre vezet. A kiemelt tényező kissé szokatlan, ugyanis x legnagyobb kitevőjű hatványának kiemelése vezet célra:

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^3 - 8x^2\right) = \lim_{x\to\infty} x^3 \left(1 - \frac{8}{x}\right).$$

A zárójelen belüli kifejezés $C - 0$ típusú, határértéke C, a teljes kifejezés $\infty \cdot C$ típusú, értéke ∞, tehát

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^3 - 8x^2\right) = \infty.$$

Az eredmény első ránézésre nem tűnik magától értetődőnek, hiszen a függvény képlete két hatvány különbsége. A kiemeléssel kapott alak azonban megmutatja, hogy a kiemelt szorzótényező valamilyen pozitív egész kitevőjű hatvány, a zárójelen belül egy konstans mellett x hatványai mindig nevezőben szerepelnek, ezért ezen tényező határértéke mindig konstans.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 6x^2 + 5x - 1}{4x^3 + 10x + 7}$

Az előbbi példa eredménye alapján láthatjuk, hogy ez a határérték $\frac{\infty}{\infty}$ típusú, határozatlan, a képletet át kell tehát alakítanunk. A megoldást itt is a kiemelés jelenti, méghozzá x-nek a *képletben előforduló* legmagasabb kitevőjű hatványát, x^3-t érdemes kiemelnünk:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 6x^2 + 5x - 1}{4x^3 + 10x + 7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(2 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(4 + \frac{10}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(2 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{\left(4 + \frac{10}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)}$$

x csak törtek nevezőiben szerepel, minden ilyen tört határértéke nulla. A számláló és a nevező egyaránt C-0 alakú, a számláló határértéke 2, a nevezőé 4, az egész törté tehát $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-6x^2+5x-1}{4x^3+10x+7}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Megfigyelhetjük, hogy a határérték a számláló és a nevező legmagasabb fokú tagjai együtthatóinak hányadosa. Belátható, hogy ez a racionális törtfüggvényeknél mindig így van, ha a számláló és a nevező fokszáma megegyezik. Nézzünk olyan példát, amikor a fokszámok eltérnek:

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+4x^2-3x-8}{2x^3+10x^2-6x}$

Itt is a legmagasabb fokú hatványt, x^4-t emeljük ki:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+4x^2-3x-8}{2x^3+10x^2-6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(1+\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x^3}-\frac{8}{x^4}\right)}{x^4\left(\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x^3}-\frac{8}{x^4}\right)}{\left(\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}-\frac{6}{x^3}\right)}$$

A számláló itt is C-0 típusú, mivel a számlálóban volt a legmagasabb kitevőjű hatvány, határértéke 1. A nevező 0+0+0 alakú, mivel nem maradt benne konstans az alacsonyabb fokszámok miatt, határértéke 0.

Az egész tört így $\frac{C}{0}$ típusú, határértéke végtelen.

Belátható, hogy mindig végtelen a határérték, ha a számláló a magasabb fokú, de az előjelektől függően a határérték lehet mínusz végtelen is.

A fentiek alapján beláthatjuk azt is, hogy ha a nevező a magasabb fokú, akkor a határérték $\frac{0}{C}$ típusú lesz, a határérték ilyen esetben mindig nulla.

Az előző példák tapasztalatait összegezve megállapíthatjuk, hogy polinomok hányadosának határértéke a végtelenben mindig határozatlan, $\frac{\infty}{\infty}$ típusú.

Ha a számláló fokszáma nagyobb, akkor a határérték végtelen, ha a nevezőé, akkor nulla. Ha a két fokszám megegyezik, akkor a határérték a legmagasabb fokú tagok együtthatóinak hányadosa. Az állításokat nem bizonyítjuk.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-10}-\sqrt{x+2}\right)$

A kifejezés $\infty-\infty$ típusú, határozatlan, át kell alakítanunk. Ellenőrizhetjük, hogy az eddig alkalmazott kiemelés nem visz előbbre bennünket, mást kell tennünk. Törtté alakítjuk a kifejezést, nevezőjének 1-et beírva:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x-10}-\sqrt{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-10}-\sqrt{x+2}}{1},$$

majd gyöktelenítjük a számlálót úgy, hogy a törtet bővítjük a számláló konjugáltjával:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-10}-\sqrt{x+2}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x-10}-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x-10}+\sqrt{x+2}\right)}{\left(\sqrt{x-10}+\sqrt{x+2}\right)}.$$

A számlálóban elvégezzük a beszorzást és a lehetséges összevonásokat:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-10-(x+2)}{\left(\sqrt{x-10}+\sqrt{x+2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-12}{\sqrt{x-10}+\sqrt{x+2}}.$$

A számláló konstans, a nevező $\infty+\infty$ típusú, határértéke végtelen, így a tört maga $\frac{C}{\infty}$ típusú, a határérték nulla:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-10}-\sqrt{x+2}\right)=0.$$

Az ehhez hasonló, gyöktelenítési lépésen alapuló átalakítások sokszor jól alkalmazhatók gyökös kifejezések végtelenben vett határértékének kiszámítására.

4.5. Egy nevezetes határérték

Az előbbi példákban a függvényeknek egy nagyon körülhatárolt típusával foglalkoztunk. Nagyon sok egyéb függvény határértékének ismerete fontos a matematikában illetve egyéb területeken. A következőkben egy, a természettudományokban alapvető szerepet játszó határértékkel ismerkedünk meg.

Tekintsük az

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

függvényt, keressük a határértékét a végtelenben. Meghatározandó tehát a

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

kifejezés értéke. Ha meggondolatlanul alkalmaznánk az eddig tanultakat, akkor azt hihetnénk, hogy a válasz nagyon egyszerű. A zárójelen belül a tört határértéke nulla, így a zárójeles kifejezés $C+0$ típusú, határértéke jelen esetben 1. 1-nek bármilyen hatványa 1, így a határérték 1 lesz.

Ha azonban vesszük a fáradságot, és behelyettesítünk x helyére 100-at, 1000-et vagy 10 000-et, azt látjuk, hogy a függvényérték nem esik közel 1-hez, hanem rendre 2,7048, 2,7169 illetve 2,7181 (mindegyik érték kerekített).

Találunk is magyarázatot megfigyeléseinkre, ha meggondoljuk, hogy a zárójelen belül soha nem 1 áll, hanem 1-nél valamennyivel nagyobb szám (ha x pozitív), és ezt az egytől alig eltérő számot nagyon nagy kitevőre kell emelni, hiszen a kitevő is a végtelenhez tart. Nem lehet tehát az alap és a kitevő változását elkülönítve vizsgálni.

A fenti számsort tekintve a függvényt szigorúan monoton növekvőnek sejtjük. Ez már meg is fordíthatja a problémát, kérdezhetjük azt is, hogy van-e egyáltalán véges határértéke.

Bebizonyítható, hogy a függvénynek létezik a szűkebb értelemben vett határértéke. A bizonyítás komoly ismeretek meglétét feltételezi és önmagában is elég összetett, ezért ismertetésétől eltekintünk. Ha az olvasót érdekli, számos könyvben megtalálja[1,5,6,7].

A határérték maga egy irracionális szám, értéke 10 jegy pontossággal 2,718281828. Nagy jelentőségére való tekintettel külön jelet kapott (a π-hez hasonlóan), e-vel jelöljük. A jelölésben *Leonhard Euler* svájci matematikus (1707 Bázel – 1783 Szentpétervár) vezetéknevének kezdőbetűje rejlik. Euler a matematika történetének egyik legtermékenyebb és legsokoldalúbb alakja, matematikus társai az iránta érzett tisztelet kifejezéseként jelölték el e-vel ezt a számot. Tehát

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2{,}718.$$

4.6. Függvény határértéke véges helyen

Tekintsük az

$$f(x)=\frac{2x^2-8}{x-2} \tag{4.8}$$

függvényt! Rögtön látjuk, hogy mivel a nevező értéke a 2 helyen nulla, a 2 nem tartozik a függvény értelmezési tartományába.

Először ne ábrázoljuk a függvényt, ábrázolás nélkül próbáljuk megsejteni, hogy hogyan viselkedik a 2 környezetében! Készítsünk ehhez értéktáblázatot a 2-höz felülről (jobbról) közelítő értékekkel (4.5. táblázat)!

4.5. táblázat Az $f(x)=\dfrac{2x^2-8}{x-2}$ függvény értéktáblázata

x	5	3	2,1	2,01	2,001	2,0001
$\dfrac{2x^2-8}{x-2}$	14	10	8,2	8,02	8,002	8,0002

Azt látjuk, hogy a függvényértékek egyre közelebb kerülnek a 8-hoz. Ha alulról (balról) közelítünk a kettőhöz, akkor is ezt tapasztaljuk, az olvasó kis számolással ellenőrizheti. Készítsük el ezek után a függvény grafikonját!

Bár a képlet bonyolultnak tűnik, néhány lépéssel sokkal egyszerűbbé tehetjük.

Emeljünk ki a számlálóból 2-t:

$$f(x) = \frac{2\left(x^2 - 4\right)}{x - 2},$$

majd alakítsuk szorzattá a zárójelen belüli kifejezést a középiskolából ismert nevezetes azonosság alapján:

$$f(x) = \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)}!$$

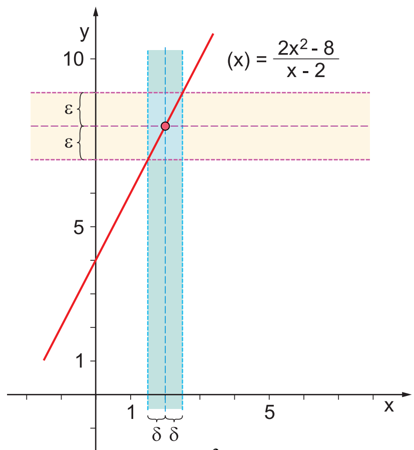
Egyszerűsíthetünk $(x-2)$ -vel:

$$f(x) = 2(x+2)$$

és, hogy esetleg könnyebben felismerjük a függvény típusát, beszorozhatunk 2-vel:

$$f(x) = 2x + 4.$$

Ez az új függvény mindenütt megegyezik a (4.8) függvénnyel, kivéve a 2 helyen. Ott ugyanis értelmezve van, míg az eredeti függvény nincs. A függvény grafikonja tehát egy egyenes, amiből a $(2;8)$ pont hiányzik (4.5. ábra). Így már értjük is a táblázat adatait, hiszen a teljes egyenes áthalad az említett ponton.



4.5. ábra Az $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x - 2}$ függvény grafikonja

Nézzük meg, hogyan írhatjuk le a (4.8) függvény viselkedését egzakt módon!

Húzzunk itt is tetszőleges ε sugárral sávot az $f(x) = 8$ egyenes köré! Azt tapasztaljuk, hogy akármilyen kicsi is ε, mindig rajzolhatunk egy olyan téglalapot a $(2;8)$ pont mint középpont köré, amelyből a függvény grafikonja csak a téglalap két csúcsán lép ki.

A vízszintes oldal hossza természetesen ε nagyságától függ, jelöljük 2δ-val. Tehát a vízszintes tengelyen az $x = 2$ egyenletű egyenes köré rajzolt δ sugarú sávon belül vannak a függvény pontjai, amennyiben a függvényértékek a fenti, ε sugarú sávon belül vannak.

Tapasztalatainknak ez még mindig nem teljesen korrekt leírása. A matematikailag teljesen egzakt leíráshoz a függvények véges helyett vett határértékére vonatkozó Cauchy-féle definíciót hívhatjuk segítségül:

4.5. definíció: Egy $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen az A szám, ha bármekkora pozitív ε-hoz találunk olyan pozitív δ értéket, hogy ha x benne van x_0-nak a δ sugarú környezetében, akkor $f(x)$ létezik és benne van A-nak az ε sugarú környezetében.

Egyenlőtlenségekkel megfogalmazva:

$$\left|f(x) - A\right| < \varepsilon, \text{ ha } \left|x - x_0\right| < \delta.$$

Jelölése:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Igazoljuk a (4.8) függvény határértékére vonatkozó előbbi sejtésünket a definíció alapján! Az igazolás annyit tesz, hogy kell találnunk egy szabályt, amivel adott ε-hoz kiszámítható a megfelelő δ.

Felírjuk a definiáló egyenlőtlenséget a konkrét függvénnyel:

$$\left|\frac{2x^2 - 8}{x - 2} - 8\right| < \varepsilon, \text{ ha } \left|x - 2\right| < \delta. \tag{4.9}$$

Az abszolútérték jelen belül közös nevezőre hozunk:

$$\left|\frac{2x^2 - 8}{x - 2} - \frac{8x - 16}{x - 2}\right| < \varepsilon,$$

és összevonunk:

$$\left|\frac{2x^2 - 8x + 8}{x - 2}\right| < \varepsilon.$$

Az abszolútérték jelből kiemelünk 2-t (megtehetjük, a 2 pozitív szám):

$$2\left|\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}\right| < \varepsilon,$$

és osztunk vele:

$$\left|\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A baloldal számlálója teljes négyzet:

$$\left|\frac{(x - 2)^2}{x - 2}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel x értéke nem lehet 2, egyszerűsíthetjük a törtet:

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A következtetés: (4.9) egyenlőtlenség igaz, ha a fenti egyenlőtlenség igaz, vagyis

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Megtaláltuk tehát az ε-tól függő δ kiszámításának módját, a függvénynek valóban 8 a határértéke:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = 8.$$

4.6.1. Függvény határértékének és értékének viszonya

A (4.8) függvény képlete

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x - 2},$$

grafikonja a 4.5. ábrán látható.

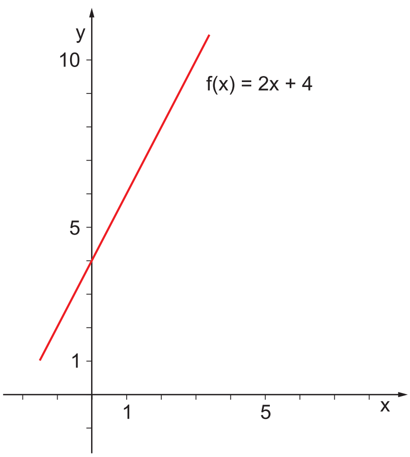
Hasonlítsuk össze ezt a függvényt az

$$f(x) = 2x + 4 \tag{4.10}$$

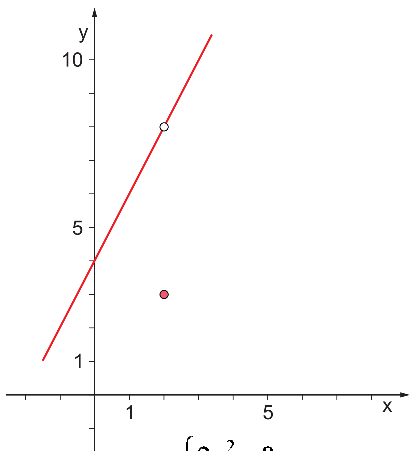
és a

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 8}{x - 2}, & ha\ \ x \neq 2, \\ 3, & ha\ \ x = 2. \end{cases} \tag{4.11}$$

függvénnyel! A függvények grafikonjai a 4.6. és a 4.7. ábrán láthatóak, rögtön megállapíthatjuk, hogy nagyon hasonlóak.



4.6. ábra Az $f(x) = 2x + 4$ függvény grafikonja



4.7. ábra A $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 8}{x - 2}, & ha\ x \neq 2, \\ 3, & ha\ x = 2. \end{cases}$

képletű függvény grafikonja

Mindegyik ábrán egy-egy egyenes látható. A 4.5. ábrán hiányzik belőle a $(2;8)$ pont, a 4.6. ábrán teljes az egyenes, a 4.7. ábrán is hiányzik a pont az egyenesből, de a függvénynek van értéke a 2 helyen, mégpedig 3.

A három függvény megegyezik abban, hogy határértékük $x=2$-nél 8, hiszen mindegyik 8-hoz tart, ha x 2-höz tart.

Helyettesítési értékeik a 2 helyen viszont eltérőek. A (4.8) függvénynek nincs, a (4.10)-nek 8, tehát megegyezik a határértékkel, a (4.11)-nek 3, ami viszont nem egyezik meg a határértékkel. Ezzel párhuzamosan a (4.10) függvény grafikonja egyetlen folytonos vonal, a másik két grafikonon viszont a 2 helyen szakadás van.

A folytonosság és a szakadás fogalmát a matematika a grafikonoktól függetlenül definiálja:

4.6. definíció: Egy $f(x)$ függvény folytonos az x_0 helyen, ha a következő három feltétel teljesül:

- A függvény értelmezve van az x_0 helyen;
- határértéke is van ugyanott;
- határértéke egyenlő a helyettesítési értékével.

Tömören:

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon, \text{ ha } \left|x-x_0\right|<\delta, \tag{4.12}$$

tehát $f(x)$ határértéke az x_0 helyen éppen $f(x_0)$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Ha az $f(x)$ függvény egy $]a;b[$ intervallum minden pontjában folytonos, akkor azt mondjuk, hogy azon az intervallumon folytonos.

Ha az $f(x)$ függvény a teljes értelmezési tartományán folytonos, akkor egyszerűen csak annyit mondunk, hogy a függvény folytonos.

4.7. definíció: Ha az $f(x)$ függvény az x_0 helyen nem folytonos, de x_0-nak létezik olyan δ sugarú környezete, amelyen folytonos, akkor azt mondjuk, hogy x_0 az $f(x)$ függvény szakadási helye. Ezen belül a szakadás

- megszüntethető, ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ létezik (ilyenkor a függvény definícióját kiegészíthetjük a következő módon: legyen $f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, ha $x=x_0$;
- nem megszüntethető a szakadás, más néven a függvénynek lényeges szingularitása van, ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ nem létezik.

Példák:

1. A (4.8) függvény a 2 helyen nem folytonos, mert ott nincs értelmezve. 2 tetszőleges környezetében viszont folytonos, tehát 2 a szakadási helye. Ez a szakadás megszüntethető a következő, kiegészített definícióval:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-8}{x-2}, & ha\ x\neq 2,\\ 8, & ha\ x=2.\end{cases}$$

2. A (3.2) képlettel megadott előjelfüggvénynek (3.1. ábra) a nulla szakadási helye, mert ott nincs határértéke (ha x a pozitív irányból tart nullához, akkor $f(x)=1$, ha negatív irányból, akkor $f(x)=-1$), a nulla tetszőleges környezetében azonban folytonos. Szakadása tehát határérték hiányában nem megszüntethető.

A fentiek a határértékek kiszámításánál nagyon jól alkalmazhatók. Ha tudjuk ugyanis, hogy egy függvény egy adott helyen folytonos, akkor határértéke megkapható a helyettesítési érték kiszámításával, ami az esetek jelentős részében egyszerűbb.

Ha egy függvény egy x_0 helyen nem folytonos, de szakadása megszüntethető, akkor a határérték kiszámítása során sokszor a következő módszerrel élhetünk: átalakítjuk a függvény képletét úgy, hogy értelmezési tartományát célszerű módon kiterjesztjük x_0-ra, majd az új, immár x_0 helyen is folytonos függvény helyettesítési értékét kiszámítjuk az x_0 helyen. Az így kapott érték a keresett határérték.

A határértékek kiszámítását megkönnyíti, hogy a 4.2. – 4.4. tételek véges helyen vett határértékekre is igazak, a tételeket nem bizonyítjuk. A 4.4. táblázat véges helyen vett határértékek kiszámítására is alkalmazható.

A táblázat alkalmazásához azonban még megadjuk a tágabb értelemben vett határérték definícióját a 4.3. definíció analógiájára:

4.8. definíció: Egy $f(x)$ függvény tágabb értelemben vett határértéke az x_0 helyen végtelen, ha bármilyen K számhoz találunk olyan pozitív δ értéket, amelyre igaz, hogy $f(x)>K$, amennyiben $|x-x_0|<\delta$.

Jelölés:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

A 4.2. – 4.4. tételekből az is következik, hogy folytonos függvények összege, különbsége és szorzata folytonos, folytonos továbbá hányadosuk is mindenütt, ahol a nevező értéke nem nulla.

Bizonyítható (a szemlélet alapján látható is), hogy az $f(x)=x$, az $f(x)=\sin x$, az $f(x)=\cos x$, az $f(x)=a^x$ és az $f(x)=\log_a x$ függvények teljes értelmezési tartományukon folytonosak.

Egyszerűsége miatt bemutatjuk a bizonyítást az $f(x)=x$ függvényre.

Beírva $f(x)$ és $f(x_0)$ értékét a (4.12) egyenlőtlenségekbe a következőt kapjuk:

$$|x-x_0|<\varepsilon, \text{ ha } |x-x_0|<\delta.$$

Látjuk, hogy minden további nélkül adódik a

$$\delta=\varepsilon$$

megoldás, vagyis $f(x)=x$ valóban mindenütt folytonos.

A többi függvény esetében is a definiáló egyenlőtlenségek felhasználásával történhet a bizonyítás, de a levezetések kissé összetettebbek. Az érdeklődő olvasó megtalálhatja a bizonyításokat több helyen is[1,5].

Bemutatjuk, hogy a fenti ismeretekkel felvértezve hogyan számíthatunk ki határértékeket véges helyeken.

Példák:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-2}{x+2}$

   A függvény számlálója és nevezője is folytonos, a nevező értéke a 2 helyen nem nulla, tehát a függvény határértéke megegyezik a helyettesítési értékével:

   $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-2}{x+2}=2.$$

2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}$

   A nevező értéke a –2 helyen nulla, de a számláló értéke is nulla, a határérték $\dfrac{0}{0}$ típusú, határozatlan.

   Észrevehetjük azonban, hogy a számláló teljes négyzet:

   $$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^2}{(x+2)}.$$

   A tört egyszerűsíthető:

   $$\lim_{x\to -2}(x+2)=0,$$

   mivel az egyszerűsítéssel kapott függvény már folytonos.

   Az eredmény:

   $$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=0.$$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{(x-3)^2}$

   A határérték $\dfrac{1}{0}$ típusú, értéke ∞.

   $$\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}=\infty.$$

Megjegyezzük, hogy az ilyen típusú határértékeket körültekintően kell meghatároznunk, az okokra a 4.6.2. fejezet első példájánál térünk ki.

4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-3x-4}$

Behelyettesítés után azt kapjuk, hogy a határérték $\dfrac{0}{0}$ típusú.

A függvény számlálóját könnyen szorzattá tudjuk alakítani, ha felismerjük, hogy a középiskolában tanult

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

azonosság jobboldalának felel meg. A nevező átalakítása kicsit nehezebb. Megoldjuk hozzá a

$$x^2-3x-4=0$$

másodfokú egyenletet. Az egyenlet, mint a középiskolából ismert, felírható az

$$a(x-x_1)(x-x_2)=0 \tag{4.13}$$

gyöktényezős alakban, ahol x_1 és x_2 az egyenlet két gyöke. Jelen esetben $a=1$, $x_1=4$, $x_2=-1$.

Mindezeket beírva (4.13)-ba a következőt kapjuk:

$$x^2-3x-4=(x-4)(x+1).$$

Ezzel

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-3x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+1)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+4)}{(x+1)}=\frac{8}{5}$$

Az $(x-x_1)$ tényező magasabb fokú polinomokból is mindig kiemelhető. A másik tényező a 3.23 definíció alapján a definíciót követően ismertetett polinomosztással számítható ki. Az osztás egyébként akár a fenti, másodfokú kifejezések esetében is jól alkalmazható.

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$

A határérték itt is $\dfrac{0}{0}$ típusú. Kiemelni nem tudunk, a megoldást a gyöktelenítés jelentheti. A nevező gyöktelenítése a konjugáltjával, azaz $\left(\sqrt{x}+1\right)$-gyel történő szorzást jelent, vagyis a törtet ezzel a tényezővel bővítjük:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}$$

A határérték még mindig $\frac{0}{0}$ típusú, bővítsük a törtet az eredeti számláló konjugáltjával is:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3-4)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

4.6.2. Jobb- és baloldali határérték

Ha egy függvénynek meg nem szüntethető szakadása van, akkor általában tudnunk kell, hogy hogyan viselkedik a szakadási hely egyik illetve másik oldalán. A vizsgálatban illetve a leírásban segít nekünk a jobb- illetve a baloldali határérték fogalma.

4.9. definíció: Egy $f(x)$ függvény jobboldali határértéke az x_0 helyen a *J* szám, ha bármekkora pozitív ε-hoz találunk olyan pozitív δ értéket, hogy ha *x* benne van x_0-nak a δ sugarú jobboldali környezetében, akkor $f(x)$ létezik és benne van *J*-nek az ε sugarú környezetében.

Egyenlőtlenségekkel megfogalmazva:

$$\left|f(x)-J\right|<\varepsilon, \text{ ha } x_0<x<x_0+\delta.$$

Jelölése:

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=J.$$

A baloldali határérték definíciója hasonló:

4.10. definíció: Egy $f(x)$ függvény baloldali határértéke az x_0 helyen a *B* szám, ha bármekkora pozitív ε-hoz találunk olyan pozitív δ értéket, hogy ha *x* benne van x_0-nak a δ sugarú baloldali környezetében, akkor $f(x)$ létezik és benne van *B*-nek az ε sugarú környezetében.

Egyenlőtlenségekkel megfogalmazva:

$$\left|f(x)-B\right|<\varepsilon, \text{ ha } x_0-\delta<x<x_0.$$

Jelölése:

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=B.$$

Példák:

1 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$

A függvény a nulla helyen nincs értelmezve, a nulla környezetében viszont mindenütt folytonos, tehát a nulla szakadási helye. A határértéke, ha létezne, formailag $\frac{1}{0}$ típusú lenne, értéke végtelen lenne. Nem mindegy azonban, hogy

x előjele milyen. Ha pozitív, akkor az érték plusz végtelen, ha negatív, akkor mínusz végtelen.

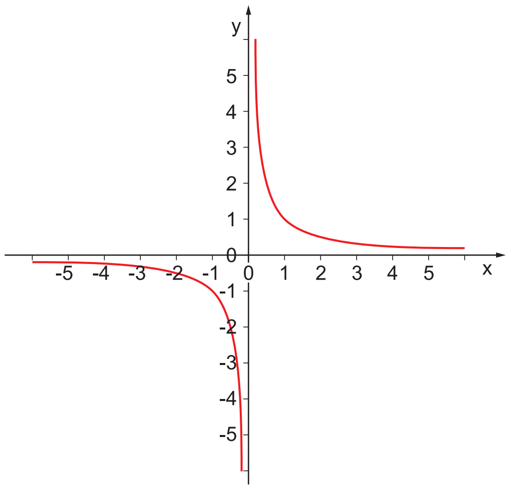
A két különböző oldali határértékeket tekintve:

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = \infty$$

a jobboldali és

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$$

a baloldali határérték, amit a 4.8. ábra szemléltet. Erre az előjelvizsgálati feladatra utaltunk a 4.6.1. fejezet (3) példájánál.



4.8. ábra Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény grafikonja

2. $\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$

Ha az abszolútérték jel nem szerepelne a képletben, akkor a tört értéke mindenütt 1 lenne, kivéve az 1 helyet, ahol nincs értelme, tehát a határérték is 1 lenne. Az abszolútérték jel miatt azonban nincs határértéke a függvénynek az 1 helyen. Megadhatjuk azonban a jobb- illetve a baloldali határértéket:

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{|x-1|}{x-1} = 1,$$

mivel a számláló és a nevező is pozitív,

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{|x-1|}{x-1} = -1,$$

mivel a számláló pozitív, a nevező viszont negatív.

Feladatok:

1. Számítsa ki a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+5\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-x-x^2\right)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-x+6\right)$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-x^3\right)$

2. Számítsa ki a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+6}{2x^2+x+3}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-x+2}{4x^2-x+10}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+6}{x-x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2-2x+3}{x^2-x+10}$

3. Számítsa ki a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x-1}{x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+6}{2x^2+x+3}$ d) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+x^2-x+2}{4x^2-x+10}$

4. Számítsa ki a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-6x+9}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-2x-8}{x+2}$ d) $\lim\limits_{x\to-6}\frac{x^2+8x+12}{x+6}$

e) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}$ f) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{2x^2+5x-3}$

5. Számítsa ki a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{2}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to1+0}\frac{2}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to2-0}\frac{x^2}{x^2-4}$ d) $\lim\limits_{x\to2+0}\frac{x^2}{x^2-4}$

e) $\lim\limits_{x\to4-0}\frac{1}{(x-4)^2}$ f) $\lim\limits_{x\to4+0}\frac{1}{(x-4)^2}$

5. Egyváltozós függvények differenciálása

5.1. Bevezetés, definíciók

A téma tárgyalását fizikai példákkal kezdjük.

Amikor egy kisdiák ismerkedik az egyenes vonalú egyenletes mozgással, akkor a következőképpen számolhat: ha egy test álló helyzetből indulva, egyenletesen mozogva 15 s alatt 75 m-re távolodik, akkor 1 s alatt 5 m-t tesz meg, így a sebessége $5\frac{m}{s}$. Általánosságban a sebességre azt a definíciót adhatja, hogy a sebesség az út és az idő hányadosa:

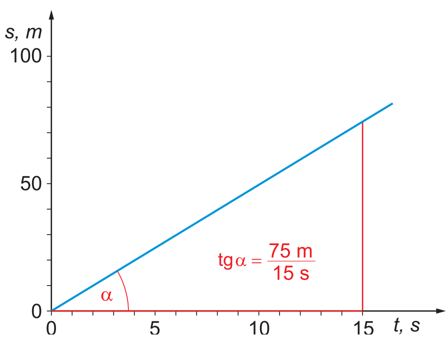
$$v = \frac{s}{t}. \tag{5.1}$$

Az 5.1. ábra mutatja be a mozgás út-idő grafikonját. Látható, hogy a grafikon egy origóból induló félegyenes, a mennyiségek között egyenes arányosság van (3.4.7. fejezet).

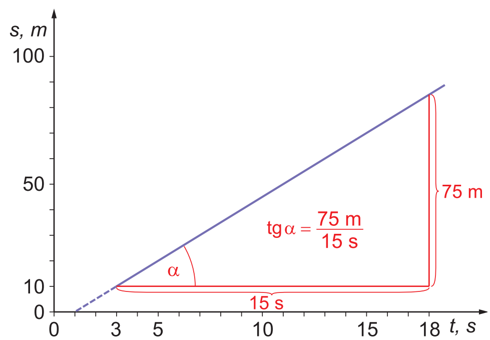
Az ábráról a sebesség is leolvasható. Ha merőlegest bocsátunk az időtengelyre a $(15;75)$ pontból, akkor egy derékszögű háromszöget kapunk, melynek függőleges befogója a megtett út, a vízszintes az eltelt idő. (5.1) szerint a sebesség nagysága a derékszögű háromszög függőleges és vízszintes befogójának aránya, vagyis az α-val jelölt szög tangense, ami éppen az egyenes meredeksége. Egyben azt is megállapíthatjuk, hogy a grafikon meredeksége állandó, tehát a test sebessége minden pillanatban $5\frac{m}{s}$.

Az adatokban és a gondolatmenetben azonban burkoltan benne van, hogy amíg nem indul el a test, addig a távolsága az észlelőtől nulla. Ez nem feltétlenül van így.

Általánosabb a feladat a mérési adatok következőképpen történő megadásával: a mérés kezdete után 3 s elteltével a test távolsága a megfigyelőtől 10 m, 18 s elteltével pedig 85 m (5.2. ábra), számítsuk ki a sebességet az utolsó 15 másodpercre vonatkozóan.



5.1. ábra Origóból induló egyenes vonalú egyenletes mozgás út – idő grafikonja



5.2. ábra Nem az origóból induló egyenes vonalú egyenletes mozgás út – idő grafikonja

A mennyiségek között itt már nincs egyenes arányosság, a tengelymetszet ugyanis nem nulla. A sebesség kiszámítására a (5.1) összefüggés nem alkalmazható. Azt kell mondanunk, hogy $18-3=15\ s$ alatt a test $85-10=75$ métert tesz meg, és ebből számítjuk ki a sebességet, a két mennyiség hányadosaként. Itt is $5\frac{m}{s}$ az eredmény. A számolás során tehát a távolságok különbségét osztottuk az időpontok különbségével. Képlettel:

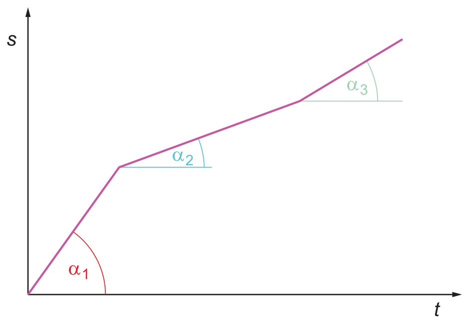
$$v=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}. \tag{5.2}$$

Általánosan elfogadott a különbségek Δ -val történő jelölése:

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{5.3}$$

Az 5.2. ábrán látjuk, hogy a sebesség itt is éppen az egyenes meredeksége, azt is, hogy a sebesség itt is állandó.

Kimondhatjuk, hogy a test sebességét egy adott pillanatban a grafikon meredeksége mutatja. Ezen gondolat hasznossága jól látható például lépcsősen változó sebességű mozgások út-idő grafikonján (5.3. ábra). Megjegyezzük, hogy a gyakorlatban a sebesség pillanatszerűen nem változhat, a grafikonnak éles sarkok helyett rövid ívei lehetnek csupán.



5.3. ábra Lépcsőzetesen változó sebességű mozgás út – idő grafikonja

Vizsgáljuk meg, hogy mit mondhatunk az egyenes vonalú, de folyamatosan változó sebességű mozgás sebességének kiszámításáról. Próbáljuk meg itt is kamatoztatni előző ötletünket, hogy a pillanatnyi sebesség az út-idő grafikon meredeksége az adott pillanatban!

Tudjuk, hogy a zuhanó test által megtett út hosszát közelítőleg az

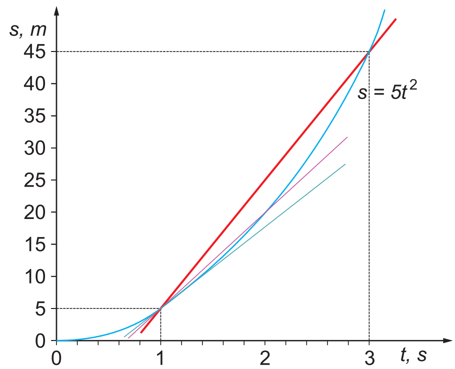
$$s(t)=\frac{g}{2}t^2=5t^2$$

összefüggés írja le, ha a test a nulla időpontban nulla távolságra van a megfigyelőtől és kezdősebessége is nulla. g a nehézségi gyorsulás, tekintsük értékét $10\frac{m}{s^2}$ -nek (a mértékegységeket a továbbiakban nem tüntetjük fel a képletekben). Meg kívánjuk határozni a sebességet az első másodperc végén. Próbáljuk meg az (5.3) összefüggést használni valamilyen módon!

Először egy viszonylag nagy időintervallumot tekintünk. A test az első 1 s alatt a képlet szerint 5 m utat tesz meg. A harmadik másodperc végéig, vagyis 3 s alatt 45 m utat tesz meg. A képlet szerint az $[1;3]$ időintervallumban a sebessége

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{45-5}{3-1}=\frac{40}{2}=20\frac{m}{s}.$$

Az 5.4. ábrán ezt úgy tüntettük fel, hogy az $(1;5)$ pontot összekötöttük egy egyenessel a $(3;45)$ ponttal, ezzel az út-idő görbének egy *szelő*jét kaptuk meg.



5.4. ábra Zuhanó test út-idő grafikonja

A korábban leírtak szerint a kapott sebesség ennek a szelőnek a meredeksége. Ez annyit jelent, hogy ha a test változatlan $20\frac{m}{s}$ sebességgel mozgott volna a vizsgált időintervallumban, akkor tett volna meg éppen 40 m-t. Emiatt a kapott $20\frac{m}{s}$ sebességre azt mondjuk, hogy az az $[1;3]$ időintervallumra vonatkozó *átlagsebesség*. Szemmel látható, hogy a szelő meredeksége jelentősen eltér a görbe meredekségétől az $(1;3)$ pontban, még ha egyelőre nem is tudjuk pontosan, hogy mit jelent egy görbe vonal meredeksége egy adott pontban. Ez az átlagsebesség tehát messze van az első másodperc végi *pillanatnyi* sebességtől. Közelítsünk a probléma megoldásához úgy, hogy egyre kisebb intervallumokat veszünk és értékeljük a tapasztalatokat!

A számításokat többször egymás után elvégeztük úgy, hogy az első másodperc végétől egyre kisebb időintervallumokat tekintettünk.

A számolást az (5.2) képlettel végeztük. $t_1=1\ s$, $s_1=5\ m$, a többi adat és a hozzájuk tartozó eredmények az 5.1. táblázatban találhatóak.

5.1. táblázat Zuhanó test mozgásának adatai

t_2	2	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,00001
s_2	20	6,05	5,1005	5,010005	5,00100005	5,0001000005
$s_2 - s_1$	15	1,05	0,1005	0,010005	0,00100005	0,0001000005
$t_2 - t_1$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$\dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$	15	10,5	10,05	10,005	10,0005	10,00005

Megfigyelhetjük, hogy minél kisebb az időintervallum $(t_2 - t_1)$, annál kisebb az útkülönbség $(s_2 - s_1)$ is, ami természetes. Az átlagsebesség $\left(\dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}\right)$ szintén csökken, de míg az előző kettő nullához közelít, a hányados egy jól meghatározott értékhez, 10-hez tart.

A szóhasználat ismerős a 4. fejezetből. Úgy tűnik, hogy az átlagsebesség egy *határértékhez* tart, ha az időintervallumot minden határon túl csökkentjük. Vizsgáljuk meg, valóban így van-e!

A későbbi, egységesebb és érthetőbb tárgyalás céljából az időintervallum nagyságára vezessük be a következő jelölést:

$$h = \Delta t = t_2 - t_1 \,!$$

Ezzel

$$t_2 = t_1 + h,$$

$$s_1 = s(t_1),$$

$$s_2 = s(t_1 + h).$$

Az átlagsebességre így a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1 + h) - s(t_1)}{h} = \frac{5(t_1 + h)^2 - 5t_1}{h} = \frac{5(1+h)^2 - 5}{h}.$$

Vizsgálandó tehát a

$$\lim_{h \to 0} \frac{5(1+h)^2 - 5}{h}$$

határérték.

A $h = 0$ értéket behelyettesítve látható, hogy a határérték $\dfrac{0}{0}$ típusú, ami nem meglepő, hiszen kicsi időintervallum van a nevezőben, a hozzá tartozó, szintén kicsi útkülönbség pedig a számlálóban. A törtet tehát át kell alakítani. Kézenfekvő a négyzetre emelés elvégzése:

$$\lim_{h\to 0}\frac{5\left(1+2h+h^2\right)-5}{h},$$

a zárójel felbontása:

$$\lim_{h\to 0}\frac{5+10h+5h^2-5}{h}$$

és összevonás:

$$\lim_{h\to 0}\frac{10h+5h^2}{h}.$$

A számlálóban h kiemelhető, majd a tört h-val egyszerűsíthető:

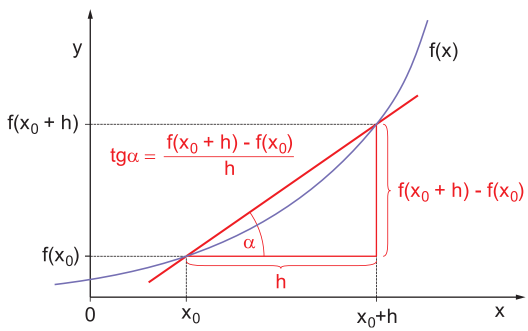
$$\lim_{h\to 0}\frac{10h+5h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(10+5h)}{h}=\lim_{h\to 0}(10+5h).$$

Behelyettesítve $h=0$ -t látjuk, hogy a határérték létezik, értéke valóban 10.

Ha az 5.4. görbén látottakkal összevetjük a kapott eredményt, akkor két dolgot állapíthatunk meg. Az egyik az, hogy h csökkenésével a görbe és a szelő két metszéspontja egyre közelebb kerül egymáshoz. Ha h minden határon túl csökken, akkor a szelő *érintő*vé válik. A másik az, hogy a mozgó test pillanatnyi sebessége a görbe 1 s-hoz tartozó érintőjének meredekségével azonosítható.

A következőkben fizikai tartalmat már mellőzve, általánosan fogalmazunk meg definíciókat.

Legyen adott egy $f(x)$ függvény, értelmezési tartományából válasszunk ki egy x_0 helyet! Az x_0 helyen a függvényérték $f(x_0)$. Válasszunk egy másik helyet is, x_0+h -t, ott a függvényérték $f(x_0+h)$ (5.5. ábra).



5.5. ábra A differenciahányados definíciója

5.1. definíció: Az

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

hányadost az $f(x)$ függvénynek az x_0 és az x_0+h helyekhez tartozó *differencia-hányados*ának nevezzük, jelölése gyakran $\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x=x_0}$, tehát

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x=x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \tag{5.4}$$

Itt hívjuk fel a figyelmet, hogy a későbbiekben is gyakran használt Δx illetve h jelölés a változó növekményére vonatkozóan teljesen egyenértékű, csupán didaktikai okok miatt alkalmazzuk hol ezt, hol azt a jelölést.

A számlálóban függvényértékek különbsége (differenciája), a nevezőben a hozzájuk tartozó két hely különbsége szerepel, innen ered a hányados neve.

Példák:

1. Ha $f(x)=3x$, $x_0=2$ és $h=2$, akkor

$$f(x_0)=f(2)=3\cdot 2=6,$$

$$x_0+h=2+2=4,$$

$$f(x_0+h)=f(4)=3\cdot 4=12,$$

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x=x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{12-6}{2}=\frac{6}{2}=3.$$

2. Ha $f(x)=x^2-1$, $x_0=3$ és $h=1$, akkor

$$f(x_0)=f(3)=3^2-1=8,$$

$$x_0+h=3+1=4,$$

$$f(x_0+h)=f(4)=4^2-1=15,$$

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x=x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{15-8}{1}=7.$$

5.2. definíció: Amennyiben a

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

határérték létezik, akkor azt az $f(x)$ függvény x_0 helyhez tartozó *differenciálhányados*ának nevezzük, jelölése $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$ vagy $f'(x_0)$, tehát

$$f'(x_0)=\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \tag{5.5}$$

Fontos megjegyezni, hogy míg a $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ kifejezésben ténylegesen mérhető mennyiségek szerepelnek, a tört értéke kiszámítható, addig a $\frac{df}{dx}$ nem valódi törtet jelöl, csupán egy határérték szimbóluma; sem számlálója, sem nevezője nem mérhető.

Példák:

Tekintsük az előbbi két példában szereplő függvényeket, számítsuk ki a differenciálhányadosokat a megfelelő helyeken!

1. Ha $f(x)=3x$ és $x_0=2$, akkor

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=2}=\lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)-3\cdot 2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3\cdot 2+3h-3\cdot 2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}=3.$$

2. Ha $f(x)=x^2-1$, $x_0=3$ és $h=1$, akkor

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=3}=\lim_{h\to 0}\frac{\left((3+h)^2-1\right)-\left(3^2-1\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2-1-9+1}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(6+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(6+h)=6.$$

Mindkét határérték kiszámításánál alkalmaztuk a 4.4. fejezetben megismerteket.

5.3. definíció: Amennyiben az (5.5) határérték létezik, akkor azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény az x_0 pontban *differenciálható*. Amennyiben a függvény értelmezési tartománya valamilyen H részhalmazának minden pontjában differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy a H részhalmazon differenciálható.

Ezen definíció értelmében tehát a H halmaz minden pontjához egy valós számot tudunk rendelni, mégpedig az ahhoz a ponthoz tartozó differenciálhányados értékét. Ezzel egy új függvényt hozhatunk létre:

5.4. definíció: Azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának minden olyan x_0 pontja, ahol $f(x)$ differenciálható, értéke pedig minden ilyen pontban a ponthoz tartozó differenciálhányados értéke, az $f(x)$ függvény *differenciálhányados függvény*ének vagy rövidebben *derivált*jának nevezzük.

Jelölése általában $f'(x)$ vagy $\frac{df}{dx}$, összhangban a differenciálhányados jelölésével.

A differenciálhányados függvény keresésének műveletét *differenciálás*nak vagy *deriválás*nak nevezzük.

5.1. tétel: Ha az $f(x)$ függvény egy x_0 pontban differenciálható, akkor abban a pontban folytonos is.

Bizonyítás:

Az 5.3. definíció szerint létezik a függvény differenciálhányadosa az x_0 pontban, jelöljük értékét D-vel:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=D.$$

Bevezetjük az

$$x_0+h=x,$$

illetve ebből a

$$h=x-x_0$$

jelölést:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=D.$$

A határérték képzése felbontható (4.4. fejezet):

$$\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)}{\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)}=D.$$

Átrendezve:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0} f(x_0)=D\lim_{x\to x_0}(x-x_0).$$

A jobboldal értéke nulla, mivel a határérték nulla, előtte pedig konstans áll:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0} f(x_0)=0.$$

Átrendezve:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} f(x_0).$$

A jobboldalon egy konstans határértéke áll, a határérték maga a konstans:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

amely egyenlőség éppen a folytonosság definiáló formulája (4.6. definíció).

A tétel nem megfordítható, tehát létezik olyan függvény, amely bár folytonos egy x_0 pontban, ott mégsem differenciálható. Például az $f(x)=|x|$ függvény az $x_0=0$ helyen folytonos, mégsem differenciálható.

Ugyanis ha $h>0$, akkor

$$\lim_{h\to 0+0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0+0}\frac{h}{h}=1,$$

ha viszont $h<0$, akkor

$$\lim_{h\to 0-0}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0-0}\frac{-h}{h}=-1,$$

tehát a jobb- és a baloldali határértékek nem egyeznek meg, vagyis a

$$\lim_{h\to 0}\frac{|0+h|-|0|}{h}$$

differenciálhányados nem létezik.

Mivel a derivált is függvény, beszélhetünk az ő deriváltjáról is:

5.5. definíció: Amennyiben $f'(x)$ deriváltja létezik, akkor azt $f(x)$ *második deriváltjának* nevezzük. Jelölése:

$$f''(x) \text{ vagy } \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Tovább deriválva kapjuk a harmadik deriváltat:

$$f'''(x),\ f^{(3)}(x) \text{ vagy } \frac{d^3 f}{dx^3}.$$

A további deriváltaknál a vesszős jelölést már nem használjuk:

$$f^{(4)}(x),\ f^{(5)}(x), \text{ stb,}$$

illetve

$$\frac{d^4 f}{dx^4},\ \frac{d^5 f}{dx^5}, \text{ stb.}$$

5.2. Differenciálási szabályok

5.2. tétel: Az $f(x)=C$ képlettel megadott konstansfüggvény deriváltja mindenütt nulla:

$$f'(x)=(C)'=0. \tag{5.6}$$

Bizonyítás:

A függvény értéke minden x és $x+h$ helyen egyaránt C.

Felírjuk az (5.5) definíciót egy általános x helyre, majd átalakítjuk:

$$(C)'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$

Felhívjuk a figyelmet, hogy a határérték nem $\frac{0}{0}$ típusú, tehát nem nullához tartó számok hányadosa, hanem a számlálóban ténylegesen nulla szerepel, emiatt nulla ez a határérték.

A tétel helyessége könnyen belátható egyszerű meggondolással is: a differenciálhányados a függvény változását jellemzi, és mivel a konstansfüggvény változása nulla, a derivált is nulla.

5.3. tétel: Ha $f(x)$ differenciálható, akkor konstansszorosa is differenciálható. A derivált $f(x)$ deriváltjának és a konstansnak a szorzata:

$$\left(cf(x)\right)'=cf'(x). \tag{5.7}$$

Bizonyítás:

Az (5.5) definíció szerint

$$\left(cf(x)\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = cf'(x).$$

A bizonyítás során kihasználtuk, hogy a határértékképzésnél a konstans kiemelhető, és határértéke önmaga.

Felhívjuk az olvasó figyelmét arra, hogy az 5.2. tételben és az 5.3. tételben eltérő a konstansok szerepe. Az első esetben a konstans önmagában jelent függvényt, a második esetben szorzótényező, a két szabályt nem szabad összetéveszteni.

5.4. tétel: Ha $f(x)$ és $g(x)$ differenciálható, akkor összegük és különbségük is differenciálható. A derivált az eredeti függvények deriváltjainak összege, illetve különbsége:

$$\left(f(x)\pm g(x)\right)' = f'(x)\pm g'(x). \tag{5.8}$$

Bizonyítás:

Az (5.5) definíció szerint

$$\left(f(x)\pm g(x)\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\left(f(x+h)\pm g(x+h)\right)-\left(f(x)\pm g(x)\right)}{h}.$$

A jobboldalon szereplő tört számlálójában a zárójeleket felbontjuk és a tagokat átcsoportosítjuk:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\pm g(x+h)-f(x)\mp g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(f(x+h)-f(x)\right)\pm\left(g(x+h)-g(x)\right)}{h}$$

A jobboldalt tagonként osztjuk h-val, majd kihasználjuk, hogy a határértékképzés tagonként is elvégezhető (4.2. tétel):

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\left(f(x+h)-f(x)\right)}{h}\pm\frac{\left(g(x+h)-g(x)\right)}{h}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(f(x+h)-f(x)\right)}{h}\pm\lim_{h\to 0}\frac{\left(g(x+h)-g(x)\right)}{h} =$$

$$= f'(x)\pm g'(x).$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A tétel természetesen többtagú összegekre is alkalmazható.

Eddigi szabályaink egyszerűek, de ez ne tévesszen meg bennünket! Szorzat- és hányadosfüggvények differenciálására már bonyolultabb szabályokat kell alkalmaznunk.

5.5. tétel: Ha $f(x)$ és $g(x)$ differenciálható, akkor szorzatuk is differenciálható. A deriválási szabály:

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x). \tag{5.9}$$

Bizonyítás:

Az (5.5) definíció szerint

$$\left(f(x)g(x)\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\left(f(x+h)g(x+h)\right)-\left(f(x)g(x)\right)}{h}.$$

A tört itt nem bontható fel egyszerűen úgy, hogy utána differenciálhányadosokat választhassunk szét. Egy kis trükköt alkalmazunk: a számlálóba beírjuk az

$f(x+h)g(x)$ kifejezést pozitív és negatív előjellel is, így a tört értéke nem változik:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}.$$

A számláló első két tagjából $f(x+h)$ -t, a második kettőből $g(x)$ -et emelünk ki:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\left(g(x+h)-g(x)\right)+g(x)\left(f(x+h)-f(x)\right)}{h}.$$

Célszerűen osztunk h-val:

$$\lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right),$$

a határértékeket tagonként és tényezőnként képezzük:

$$\lim_{h\to 0}f(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0}g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

$f(x)$ differenciálható, ezért folytonos (5.1. tétel), ezért az első határérték $f(x)$. A második $g(x)$ deriváltja, a harmadik magától értetődően $g(x)$, a negyedik $f(x)$ deriváltja:

$$f(x)g'(x)+f'(x)g(x),$$

illetve az (5.9) összefüggésnek megfelelő sorrendben:

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A tétel tetszőleges n számú tényezőt tartalmazó szorzatfüggvényre alkalmazható úgy, hogy egy tényezőt kiválasztunk, a többi $(n-1)$ -et egy tényezőként kezelve végezzük el a deriválást. A deriváltban megjelenik az $(n-1)$ tényezős szorzat deriváltja, a következő lépésben ezek közül választunk ki egyet és a maradék $(n-2)$ -t kezeljük egy tényezőként. Az eljárást addig folytatjuk, amíg szorzat deriváltja már nem szerepel az eredményben.

5.6. tétel: Ha $f(x)$ és $g(x)$ differenciálható, továbbá $g(x)\neq 0$, akkor hányadosuk is differenciálható. A deriválási szabály:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \qquad (5.10)$$

Bizonyítás:

Legyen

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}!$$

Rendezzük át:

$$f(x) = h(x)\,g(x)$$

és alkalmazzuk az (5.9) azonosságot:

$$f'(x) = h(x)\,g'(x) + h'(x)\,g(x).$$

Beírjuk $h(x)$ értékét:

$$f'(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\,g'(x) + h'(x)\,g(x),$$

és szorzunk $g(x)$-szel:

$$f'(x)\,g(x) = f(x)\,g'(x) + h'(x)\,g^2(x).$$

$h'(x)$-et kifejezve a bizonyítandó összefüggést kapjuk:

$$h'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}.$$

5.3. Összetett függvények

Nagyon sokszor találkozunk olyan feladattal, amelyben a független változó értékéből nem közvetlenül, egyetlen számolási művelettel határozzuk meg a függvény értékét, hanem előbb egy másik függvény értékét számítjuk ki, és a kapott eredménnyel számolunk tovább. Az ilyen feladatokban szereplő függvényeket *összetett függvény*eknek nevezzük.

Egy egyszerű példa:

$$y(x) = \sin(x-3).$$

Ha $y(x)$ értékét ki akarjuk számolni egy x_0 helyen, akkor először ki kell számítanunk

$$x_0 - 3$$

értékét (ezt jelölhetjük g_0-lal), majd a kapott értékkel számítjuk ki az

$$f(g_0) = \sin g_0$$

értéket.

Mivel a g_0 érték az x_0 hely függvénye, írhatjuk, hogy

$$y(x_0) = f(g(x_0)),$$

illetve általában

$$y(x) = f(g(x)).$$

Az összefüggésben $g(x)$-et *belső függvény*nek, $f(g)$-t *külső függvény*nek nevezzük.

Annak eldöntésében, hogy egy összetett függvény képletében melyik a belső és melyik a külső függvény, rutint kell szerezni. A döntésben segítséget jelent, hogy a belső függvény értékét kell a számolási logika illetve szabályok szerint először kiszámítani. Figyelembe kell venni a műveletek precedenciaszabályait és a zárójelezést is.

Példák:

1. Az

$$y_1(x) = \cos x^2$$

függvény esetében a belső függvény

$$g(x) = x^2,$$

míg a külső függvény

$$f(g) = \cos g\ .$$

2. Az

$$y_2(x) = \cos^2 x \text{ (más alakban } y_2(x) = (\cos x)^2\text{)}$$

esetében a belső függvény

$$g(x) = \cos x,$$

míg a külső

$$f(g) = g^2.$$

3. Az

$$y_3(x) = \cos 2x$$

esetében a belső függvény

$$g(x) = 2x,$$

míg a külső

$$f(g) = 2g.$$

Az összetett függvények értelmezési tartományának meghatározása nem mindig egyszerű. Az előző függvények esetében az értelmezési tartomány minden esetben a valós számok halmaza volt, hiszen mindegyik függvény értelmezett az összes valós számon.

Ha azonban például az

$$y(x) = \sqrt{2-x}$$

függvényt tekintjük, más a helyzet.

A $g(x)=2-x$ belső függvény minden valós számon értelmezett, értékkészlete is minden valós szám. Az $f(g)=\sqrt{g}$ függvény a negatív számokon nem értelmezett, így az összetett függvény értelmezési tartománya

$$D_y=\{x : x\in\mathbb{R} \mid x\le 2\}.$$

Megjegyezzük, hogy összetett függvény belső függvényeként összetett függvény is szerepelhet, vagyis háromszorosan, négyszeresen, illetve akárhányszorosan összetett függvények is alkothatók. Például a

$$z(x)=\ln(x-5)^2$$

függvény háromszorosan összetett, ugyanis a

$$h(x)=x-5\text{, a } g(h)=h^2 \text{ és az } f(g)=\ln g$$

függvényekből tehető össze, vagyis $z(x)=f\left(g\left(h(x)\right)\right)$ alakú.

5.6. definíció: Az $f(g)$ külső függvényből és a $g(x)$ belső függvényből összetett $y(x)=f\left(g(x)\right)$ függvény definíciója a következő:

ha x_0 beletartozik $g(x)$ értelmezési tartományába, $g(x_0)$ pedig beletartozik $f(g)$ értelmezési tartományába, akkor $y(x)$-nek az x_0 pontban felvett függvényértéke az $f(g)$ függvénynek a $g(x_0)$ helyen felvett függvényértéke, $f\left(g(x_0)\right)$.

Ha a definíciót összevetjük a függvény definíciójával (1.4. fejezet), azt állapíthatjuk meg, hogy az összetett függvény kétszeres hozzárendelést jelent: a változóhoz hozzárendeljük a belső függvény értékkészletének megfelelő elemét, majd ez az elem lesz a külső függvény változója, és ehhez rendeljük a külső függvény értékkészletének megfelelő elemét. Ez utóbbi elem lesz végülis a függvényérték.

A gyakorlatban nagyon egyszerű problémák megoldása során is találkozunk összetett függvények deriválásával (5.8.7. fejezet (3) és (5) példa), ezért ismernünk kell az erre vonatkozó szabályt:

5.6. tétel: Ha az $f(g)$ és a $g(x)$ függvények differenciálhatóak, akkor a belőlük összetett $y(x)=f\left(g(x)\right)$ is differenciálható, és

$$y'(x)=f'(g)\,g'(x). \tag{5.11}$$

Bizonyítás:

Csak vázlatos bizonyítást mutatunk be, a részletes, korrekt bizonyítás sok helyen, például Szász Gábor[1] vagy Stefan Banach[5] könyvében megtalálható.

Felírhatjuk $y(x)$, $f(g)$ és $g(x)$ függvények differenciahányadosait egy általános x helyen az (5.4) definíciónak megfelelően:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y(x+h)-y(x)}{h}, \tag{5.12}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta g}=\frac{f(g+k)-f(g)}{k},$$

$$\frac{\Delta g}{\Delta x}=\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Szorozzuk össze az utóbbi kettőt:

$$\frac{\Delta f}{\Delta g}\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x}=\frac{f(g+k)-f(g)}{k}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}. \tag{5.13}$$

Vegyük észre, hogy az összetett függvény definíciója miatt a következő egyenlőségek érvényesek:

$$k=g(x+h)-g(x),$$

$$f(g+k)=f\left(g(x+h)\right)=y(x+h)$$

és

$$f\left(g(x)\right)=y(x).$$

Behelyettesítve ezeket az (5.13) egyenlőségbe a következőt kapjuk:

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{y(x+h)-y(x)}{h}=\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

vagyis az (5.12) formulával összevetve:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta g}\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x}.$$

Határátmeneteket képezve, a határértékeket tényezőnként kiszámítva a következő eredményt kapjuk:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta g\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta g}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x},$$

$$y'(x)=f'(g)\,g'(x),$$

vagy másképp

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'(g)\,g'(x).$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Érdemes talán a tételt szóban is megfogalmazni: összetett függvényt úgy deriválunk, hogy a külső függvényt deriváljuk a belső függvény, mint változó szerint, a belső függvényt is deriváljuk x szerint, és a két deriváltat összeszorozzuk.

A szabályt a differenciálszámítás *láncszabály*ának nevezzük, többszörösen összetett függvényekre is könnyen alkalmazható.

Konkrét példát összetett függvény deriválására az olvasó az 5.5. fejezetben talál.

5.4. Függvény inverzének differenciálása

A 3.4.4. fejezetben foglalkoztunk a függvények invertálhatóságával és invertálásával. Függvény inverzének deriválására vonatkozik a következő tétel:

5.7. tétel: Legyen az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának egy H részhalmazán invertálható, jelöljük inverzét $f_{-1}(x)$-gyel. Rendelje $f(x)$ x-hez az y értéket, ekkor $f_{-1}(x)$ az y értékhez x-et rendeli hozzá.

Ha $f(x)$ differenciálható az x pontban, és differenciálhányadosa nem nulla, akkor $f_{-1}(x)$ is differenciálható az y pontban, és differenciálhányadosa

$$f'_{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{5.14}$$

Bizonyítás:

Itt is csak vázlatos bizonyítást ismertetünk.

$f_{-1}(x)$ differenciahányadosa

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Képezzük a határátmeneteket:

$$f'_{-1}(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}. \tag{5.15}$$

$f(x)$ differenciálható, ezért folytonos is az x helyen. Ebből következik, hogy ha Δy a nullához tart, akkor Δx is, tehát

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Az eredményt beírva az (5.15) formulába megkapjuk a

$$f'_{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

összefüggést, amit bizonyítanunk kellett.

5.5. Alapfüggvények deriváltjai

5.8. tétel: Az $f(x) = x$ függvény deriváltja:

$$(x)' = 1. \tag{5.16}$$

Bizonyítás:

Írjuk fel az (5.5) definíciót egy általános x helyre és végezzük el a maguktól értetődő átalakításokat:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Az eredményből a szorzatfüggvény deriválására vonatkozó (5.9) tételt alkalmazva levezethető az $f(x)=x^2$ függvény deriváltjának képlete:

$$\left(x^2\right)'=(x\cdot x)'=1x+x\cdot 1=2x,$$

ezzel az $f(x)=x^3$ függvény deriváltja:

$$\left(x^3\right)'=\left(x^2\cdot x\right)'=2x\cdot x+x^2\cdot 1=3x^2,$$

ezzel pedig az $f(x)=x^4$ -é:

$$\left(x^4\right)'=\left(x^3\cdot x\right)'=3x^2\cdot x+x^3\cdot 1=4x^3,$$

és így tovább.

Az összefüggések az (5.5) definíciót felhasználva is igazolhatóak, ajánljuk is az olvasónak a bizonyítások elvégzését.

Szemügyre véve a fenti eredményeket egy általános szabályt sejthetünk meg:

5.9. tétel: Az $f(x)=x^n$ függvény értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható (kivéve esetleg értelmezési tartományának végpontját, amennyiben van ilyen), deriváltja:

$$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}. \tag{5.17}$$

A tétel pozitív egész kitevőkre például teljes indukcióval, más alakú kitevőkre célszerű átalakításokat követően igazolható[1,6]. Mi a tömörség kedvéért – a szükséges ismeretek elsajátítását követően – tetszőleges kitevőre fogjuk igazolni a tételt (5.13. tételt követő (2) példa).

Példák:

1. $(x)'=\left(x^1\right)'=1x^0=1\cdot 1=1,$

   mivel minden szám nulladik hatványa 1. A szabály tehát az $f(x)=x$ függvényre is érvényes, ahogy azt vártuk.
2. $\left(x^{12}\right)'=12x^{11}.$
3. $\left(\frac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=-1x^{-2}=-\frac{1}{x^2}.$

   A derivált az $x=0$ helyen nem létezik, de ott a függvény sincs értelmezve.
4. $\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$

   A függvényt magát az $x=0$ helyen értelmezzük, de deriváltját nem.
5. $\left(\sqrt[3]{x^4}\right)'=\left(x^{\frac{4}{3}}\right)'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x^1}.$

6. $\left(x^{\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}.$

Az (5.6), az (5.7), az (5.8) és az (5.17) összefüggések alkalmazásával bármilyen polinomot deriválhatunk.

Példák:

1. $f(x) = 5x^4.$

   $f'(x) = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3,$ mivel a konstans szorzó az (5.7) egyenlet szerint kiemelhető.

2. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x.$

   $f'(x) = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 10,$ mivel összeg és különbség az (5.8) egyenlet szerint tagonként differenciálható.

3. $f(x) = 9x + 5.$

   $f'(x) = 9 \cdot 1 + 0 = 9,$ mivel a konstans deriváltja az (5.6) egyenlet szerint nulla. Figyeljük meg, hogy ebben a példában lineáris függvény szerepel, amelynek a képe egyenes. Deriváltja állandó, éppen az egyenes meredekségével egyezik meg, azzal a szemlélettel összhangban, hogy a derivált az érintő meredekségét adja.

   Azzal az érdekes eredménnyel is szembesülünk az eredmény kapcsán, hogy egy egyenes érintője önmaga!

4. $f(x) = \frac{x^3}{5} + \frac{3x^2}{2} - 8.$

   A kifejezésben törtek szerepelnek, alkalmazhatjuk is rájuk az (5.10) összefüggést, de felesleges. A következő formába átírva már könnyebben észrevehető, hogy a függvény valójában polinom:

   $$f(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 8.$$

   A deriváltja tehát:

   $$f'(x) = \frac{1}{5} \cdot 3x^2 + \frac{3}{2} \cdot 2x = \frac{3}{5}x^2 + 3x.$$

5.10. tétel: Az $f(x) = \sin x$ függvény teljes értelmezési tartományán differenciálható, deriváltja:

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{5.18}$$

A tételt nem bizonyítjuk, bizonyítása a legtöbb differenciálszámítással foglalkozó könyvben megtalálható, például[1,6,7].

5.11. tétel: Az $f(x) = \cos x$ függvény teljes értelmezési tartományán differenciálható, deriváltja:

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{5.19}$$

A bizonyításhoz felhasználjuk, hogy

$$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}),$$

amint az például a 3.16. ábráról leolvasható, vagy a középiskolában tanult addíciós szabályokkal igazolható.

Vagyis

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)'.$$

A jobboldal összetett függvény, alkalmazhatjuk rá az (5.11) szabályt.

A külső függvény $\sin g$, deriváltja (5.18) szerint $\cos g$.

A belső függvény $\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, deriváltja (5.16) szerint 1, mivel $\frac{\pi}{2}$ konstans, deriváltja nulla.

Tehát

$$(\cos x)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

A középiskolából ismert addíciós tétel szerint

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Alkalmazzuk ezt a deriváltra az $\alpha = x$ és $\beta = \frac{\pi}{2}$ helyettesítéssel:

$$(\cos x)' = \cos x \cos\frac{\pi}{2} - \sin x \sin\frac{\pi}{2} = (\cos x) \cdot 0 - (\sin x) \cdot 1 = -\sin x,$$

mivel $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ és $\sin\frac{\pi}{2} = 1.$ Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Tehát:

$$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\cos x)' = (\sin x)'' = -\sin x.$$

A deriválást könnyen tudjuk folytatni:

$$(-\sin x)' = (\sin x)''' = -\cos x,$$

$$(-\cos x)' = (\sin x)^{(4)} = \sin x,$$

vagyis a $\sin x$ függvény negyedik deriváltja önmaga. A $\sin x$ tehát végtelen sokszor deriválható, a deriváltak periodikusan ismétlődnek.

Ismerve a $\sin x$ és a $\cos x$ deriváltját az $f(x) = \operatorname{tg} x$ deriváltja könnyen megkapható.

Írjuk fel a tangensfüggvény definícióját:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

és alkalmazzuk rá a törtfüggvény deriválására vonatkozó (5.10) szabályt:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

mivel ismert, hogy $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Tehát:

$$\left(\operatorname{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{5.20}$$

A derivált mindenütt értelmezve van, ahol maga a tangensfüggvény is.

A kotangensfüggvény deriváltja hasonló módon vezethető le, az eredmény:

$$\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

A következő tételt szintén bizonyítás nélkül közöljük:

5.12. tétel: Az $f(x) = \ln x$ függvény a teljes értelmezési tartományán, a $]0;\infty[$ intervallumon deriválható, deriváltja:

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}. \tag{5.21}$$

Tudjuk, hogy

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\ln x,$$

ha $a \neq 1$. Mindkét oldalt deriválva kapjuk a következő azonosságot:

$$\left(\log_a x\right)' = \left(\frac{1}{\ln a}\ln x\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a},$$

mivel $\dfrac{1}{\ln a}$ konstans.

Az 5.12. tétel felhasználásával igazolható a következő:

5.13. tétel: Az $f(x) = e^x$ függvény a teljes értelmezési tartományán differenciálható, deriváltja önmaga, azaz

$$\left(e^x\right)' = e^x. \tag{5.22}$$

Bizonyítás:

Az e^x függvény az $\ln x$ függvény inverze a teljes értelmezési tartományán, tehát ha $y = e^x$, akkor $x = \ln y$.

Alkalmazzuk a függvény inverzének deriváltjára vonatkozó (5.14) összefüggést:

$$\left(e^x\right)' = \frac{1}{\left(\ln y\right)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x.$$

Tetszőleges pozitív alapú exponenciális függvény deriváltjának levezetése hasonlóan történhet a függvényt az $f(x) = \log_a x$ inverzeként felfogva:

$$\left(a^x\right)' = \frac{1}{\left(\log_a y\right)'} = \frac{1}{\frac{1}{y\ln a}} = y\ln a = a^x \ln a.$$

Ha a hatvány alapja, $a = 1,$ akkor a levezetés ugyan nem használható, az eredmény azonban ilyenkor is helyes, ugyanis

$$\left(1^x\right)' = (1)' = 0 = 1^x \ln 1 = 1 \cdot 0.$$

A logaritmusfüggvény deriválásához kapcsolódik a logaritmikus deriválásnak nevezett eljárás.

Az eljárás olyan esetekben alkalmazható, amikor a egy olyan hatvány alakú függvényt kell deriválnunk, amelyben az alap és a derivált is x függvénye (*exponenciális hatványfüggvény*).

Az eljárás alapja a következő:

Az $\ln\left(f(x)\right)$ összetett függvény, belső függvénye $g = f(x)$, külső függvénye $\ln(g)$. Alkalmazzuk rá az (5.11) szabályt:

$$\left(\ln\left(f(x)\right)\right)' = \frac{1}{g} f'(x) = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Rendezzük át:

$$f'(x) = f(x)\left(\ln\left(f(x)\right)\right)'. \tag{5.23}$$

Tehát egy függvény deriváltját úgy is megkaphatjuk, hogy először vesszük az *e* alapú logaritmusát, azt deriváljuk, majd megszorozzuk az eredeti függvénnyel. A szabályt akkor érdemes alkalmazni, ha a függvény logaritmusának deriválása jóval egyszerűbb, mint az eredeti függvényé.

Példák:

1. Számítsuk ki az $f(x) = x^x$ függvény deriváltját!

   A függvény exponenciális hatványfüggvény. A deriválás szempontjából ez azt jelenti, hogy nem hatványfüggvény, mert kitevője változó, nem is exponenciális függvény, mert alapja is változó, de összetett függvényként sem tudjuk deriválni. Alkalmazzuk rá az (5.23) összefüggést! Vesszük a függvény *e* alapú logaritmusát:

   $$\ln\left(f(x)\right) = \ln x^x = x \ln x.$$

   Deriválunk a szorzatfüggvényre vonatkozó szabály szerint:

   $$\left(\ln\left(f(x)\right)\right)' = \left(x \ln x\right)' = 1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

   Az (5.23) képletbe beírjuk a függvény képletét és az előbbi eredményt, így kapjuk meg a deriváltat:

   $$f'(x) = x^x\left(\ln x + 1\right).$$

2. Bizonyítsuk be az 5.9. tételt, vezessük le az $f(x) = x^n$ függvény deriválási szabályát tetszőleges valós *n* kitevőre!

Az (5.23) egyenletet alkalmazzuk a függvényre:

$$f'(x)=x^n\left(\ln x^n\right)'=x^n\left(n\ln x\right)'=x^n n\frac{1}{x}=n\frac{x^n}{x}=nx^{n-1},$$

az 5.9. tétel állításának megfelelően.

Javasoljuk, hogy az olvasó vezesse le az e^x és az a^x függvények deriválási szabályát logaritmikus deriválással.

A következőkben a teljesség kedvéért a 3.4.6 fejezetben bevezetett arkuszfüggvények deriválását tekintjük át röviden. Ismerete szükséges lehet integrálszámítási feladatok megoldásánál.

A levezetés során hivatkozunk a jól ismert

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1. \tag{5.24}$$

összefüggésre.

5.14. tétel: Az $f(x)=\arcsin x$ függvény a $]-1;1[$ intervallumon differenciálható, deriváltja:

$$\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{5.25}$$

Bizonyítás:

A függvény inverzének deriválására vonatkozó (5.14) összefüggést alkalmazzuk.

Az $\arcsin x$ a $\sin x$ függvény inverze, tehát ha $y=\arcsin x$, akkor $x=\sin y$, ahol $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $x\in[-1;1]$.

Deriváltja:

$$\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{\left(\sin y\right)'}=\frac{1}{\cos y}.$$

$\cos y$ az (5.24) egyenletből kifejezhető:

$$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y},$$

mivel az adott intervallumon $\cos y$ pozitív.

Láttuk, hogy $\sin y=x$, ezt behelyettesítve $\cos y$ fenti képletébe, majd azt visszaírva a deriváltba kapjuk meg az (5.25) képletét.

Bizonyítás nélkül közöljük a következő két tételt, a bizonyítás az előbbiekhez hasonló módon történhet.

5.15. tétel: Az $f(x)=\arccos x$ függvény a $]-1;1[$ intervallumon differenciálható, deriváltja:

$$\left(\arccos x\right)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{5.26}$$

5.16. tétel: Az $f(x)=\operatorname{arc}tgx$ függvény a teljes értelmezési tartományán differenciálható, deriváltja:

$$\left(\operatorname{arc}tg\,x\right)'=\frac{1}{1+x^2}, \tag{5.27}$$

továbbá az $f(x)=\operatorname{arc}ctgx$ is a teljes értelmezési tartományán deriválható, deriváltja:

$$\left(\operatorname{arc}ctg\,x\right)'=\frac{-1}{1+x^2}.$$

A deriváltakat az 5.2. táblázatban összefoglaljuk.

5.2. táblázat Alapfüggvények deriváltjai

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$tg\,x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$ctg\,x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$
e^x	e^x
a^x	$a^x\ln a$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arc}tg\,x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arc}ctg\,x$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$

5.6. Implicit függvény differenciálása

Az előzőek alapján könnyen tudunk módszert mutatni implicit függvények (lásd 3.1. fejezet) deriválására.

Az implicit függvényre jellemző, hogy az x valós számhoz hozzárendelt függvényérték (jelöljük most y-nal, nem elfelejtve, hogy y az x függvénye) nincs kifejezve a függvény képletében.

Például:

$$y^2 = yx^2 + 10.$$

A deriválási eljárás lényege az, hogy mindkét oldalt deriváljuk x szerint, ügyelve arra, hogy az összetett függvényeket a rájuk vonatkozó szabályok szerint deriváljuk.

A fenti példában a baloldalon y^2 szerepel, ami összetett függvény, $\left(y(x)\right)^2$, ahol a belső függvény $y(x)$, a külső ennek a négyzete. Az összetett függvény deriválására vonatkozó (5.11) szabály szerint

$$\left(y^2\right)' = 2y \cdot y' = 2yy'.$$

A jobboldal deriváltja:

$$\left(yx^2 + 10\right)' = y'x^2 + y \cdot 2x = y'x^2 + 2yx,$$

mivel az első tag szorzat, az (5.9) szabályt alkalmaztuk rá, a második tag deriváltja pedig nulla.

A két oldal deriváltjai egyenlőek, tehát

$$2yy' = y'x^2 + 2yx$$

az eredmény.

Amennyiben tudjuk, célszerű kifejezni a deriváltat. Itt megtehetjük:

$$y' = \frac{2yx}{2y - x^2}.$$

5.7. Parciális differenciálás

Bár a fejezet az egyváltozós valós függvényekről szól, nem kerülhetjük meg, hogy szóljunk a többváltozós függvények deriválásáról is, mivel ilyen függvényekkel gyakran találkozunk.

A többváltozós függvények témaköre sokkal bővebb, mint amit ezen tananyag keretei ismertetni engednek, ezért csupán a legszükségesebbekről szólunk.

A többváltozós valós függvények alapvető jellemzője az, hogy a függvények alaphalmazát nem valós számok, hanem rendezett valós szám n-esek adják. Kétváltozós függvényeknél ezek számpárokat jelentenek, vagyis valós számpárokhoz rendelünk hozzá valós számokat, a függvénynek két független változója van:

$$f : (\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}; \qquad (x, y) \mapsto f(x, y).$$

Például:

$$f\left(x,y\right)=x^2+3y,$$

vagy

$$f\left(x,y\right)=\sin(x+y),$$

de kétváltozós függvény a henger térfogatának ismert képlete is:

$$V=V\left(r,m\right)=r^2\pi m.$$

A háromváltozós függvényeknél rendezett számhármasokhoz rendelünk függvényértéket, vagyis a függvénynek három független változója van, és így tovább.

Kérdés, hogy hogyan definiáljuk többváltozós függvények deriváltjait, illetve hogyan hajtjuk végre magát a deriválást.

A szabály a következő: ha egy többváltozós függvényt valamelyik változója szerint deriválunk, akkor a többi változót konstansnak tekintjük. A műveletet magát *parciális deriválás*nak nevezzük (a *pars* latin főnévből, melynek jelentése *rész*).

A jelölések kissé eltérnek az egyváltozós deriválásnál alkalmazott jelölésektől.

Ha például egy kétváltozós függvényt x szerint deriválunk, akkor a parciális derivált jelölése

$$f_x' \quad \text{vagy} \quad \frac{\partial f}{\partial x},$$

az y szerinti parciális deriválté pedig

$$f_y' \quad \text{vagy} \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

A ∂ jel egy stilizált d betű.

A deriváltak maguk is deriválhatóak lehetnek bármelyik változójuk szerint. Így kaphatjuk meg a második deriváltakat, jelölésük

$$f_{xx}'' \quad \text{vagy} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$f_{yy}'' \quad \text{vagy} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

illetve

$$f_{xy}'' \quad \text{vagy} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Az utolsó, úgynevezett vegyes második derivált képzésénél eljárhatunk úgy, hogy először x, majd y szerint deriválunk, illetve fordítva. Talán meglepő, de bizonyítható[1,5], hogy a deriválás sorrendje nem számít, mindkét esetben ugyanazt az eredményt kapjuk.

A deriválás végrehajtásánál arra kell nagyon figyelnünk, hogy mikor melyik változó szerepel konstansként.

Példák:

1. $f(x,y)=3x^3y^2-4x^2y+2x-y+6.$

   A parciális deriváltak:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=3\cdot y^2\cdot 3x^2-4\cdot 2x\cdot y+2=9x^2y^2-8xy+2,$$

   illetve

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3\cdot x^3\cdot 2y-4x^2-1=6x^3y-4x^2-1.$$

   Az első deriválásnál *x*-et, míg a másodiknál *y*-t tekintjük konstansnak.

   Az érdekesség kedvéért kiszámítjuk a vegyes második deriváltakat is.

   Az első deriváltat *y* szerint deriváljuk tovább, *x* konstans:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=9x^2\cdot 2y-8x=18x^2y-8x.$$

   A másodikat *x* szerint deriváljuk, *y* konstans:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=6\cdot 3x^2y-8x=18x^2y-8x.$$

   Láthatjuk, hogy a két vegyes második derivált valóban egyenlő.

2. Tekintsük az egyenes körhenger térfogatának kiszámítására alkalmas képletet:

$$V=r^2\pi m,$$

   ahol *V* a térfogat, *r* az alapkör sugara, *m* a henger magassága.

   Deriváljuk a térfogatot a magasság szerint (a sugár ilyenkor állandó):

$$\frac{\partial V}{\partial m}=r^2\pi,$$

   a parciális derivált éppen az alapkör területe.

   A sugár szerinti deriválásnál a magasság állandó:

$$\frac{\partial V}{\partial r}=2r\pi m,$$

   ami pedig a henger palástjának a területe.

Feladatok:

1. Adja meg a következő függvények deriváltját!

   a) $f(x)=12$

   b) $f(x)=5x$

   c) $f(x)=3x^2-8x+2$

   d) $f(x)=2-x+x^4-6x^6$

   e) $f(x)=5\sin x-3\cos x$

   f) $f(x)=e^x-3x-3$

2. Adja meg a következő függvények deriváltját!

a) $f(x) = x\sin x$
b) $f(x) = (x-2)\ln x$
c) $f(x) = (5-x)\sqrt{x}$
d) $f(x) = (4x-3)(3x^4-2x)$
e) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$
f) $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{4x^2-3x+3}$
g) $f(x) = \dfrac{\sin x}{3x-2}$
h) $f(x) = \dfrac{3e^x}{4e^x+3}$

3. Adja meg a következő függvények deriváltját!

a) $f(x) = \sin 2x$
b) $f(x) = \ln(5x-3)$
c) $f(x) = \sqrt{3x+2}$
d) $f(x) = e^{-x}$
e) $f(x) = \cos(x^2-4x+2)$
f) $f(x) = e^{4x-4}$
g) $f(x) = (3x-2)^{10}$
h) $f(x) = \ln\sqrt{x}$

4. Adja meg a következő függvények deriváltját!

a) $f(x) = \sin 2x\cos(3x-1)$
b) $f(x) = (3x-2)\ln(5x-3)$
c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+2}}{\sqrt{x-1}}$
d) $f(x) = 2x\sqrt{x-2}$
e) $f(x) = \ln\cos x^2$
f) $f(x) = e^{\sqrt{4x-4}}$

5. Deriválja a következő függvényeket x szerint! Vegye figyelembe, hogy y az x változó függvénye ($y = y(x)$)!

a) $y + yx = 0$
b) $y - \sin y = 0$
c) $x - y^2 = 0$
d) $\sqrt{y} + y - \ln y = 0$

6. Deriválja a következő függvényeket mindegyik változójuk szerint!

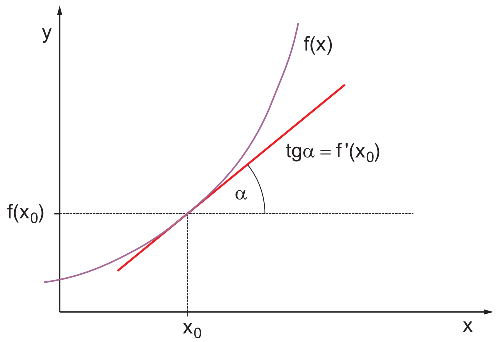
a) $f(x;y) = 3y^2 - 3x^2 + 2xy + 2x - 3y + 16$
b) $f(x;y) = \sin(x-y) + \cos(x+y)$
c) $f(x;y) = e^{2x-2y}$
d) $V(a;b;c) = abc$
e) $V(r;m) = \dfrac{r^2 m\pi}{3}$
f) $A(a;b;c) = 2(ab+ac+bc)$
g) $T(a;b;\gamma) = ab\sin\gamma$
h) $y(A;\omega;t) = A\sin(\omega t)$

5.8. A differenciálszámítás néhány alkalmazása

A differenciálszámítás alkalmazási területe nagyon szerteágazó, mi csak néhány alkalmazást említünk meg.

5.8.1. Görbe érintője

Az 5.1. fejezetben leírtak szerint egy $f(x)$ függvény differenciálhányadosa az x_0 helyen a függvény görbéjéhez az $(x_0; f(x_0))$ pontban húzható érintő iránytangensét adja meg (5.6. ábra).



5.6. ábra Görbe érintője

Középiskolai tanulmányainkból tudjuk, hogy egy adott ponton átmenő egyenes egyenlete a következő:

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

ahol m az iránytangenst jelöli, x_0 és y_0 pedig a megadott pont koordinátái.

Jelen esetben

$$m = f'(x_0),$$

$$y_0 = f(x_0).$$

Behelyettesíthetjük ezeket az egyenes egyenletébe:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

azaz

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (5.28)$$

Példa:

Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 1$ függvény érintőjének egyenletét az $x_0 = 2$ helyen!

A függvény deriváltja

$$f'(x) = 2x,$$

értéke a 2 helyen

$$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4 .$$

A függvényérték a 2 helyen:

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5 .$$

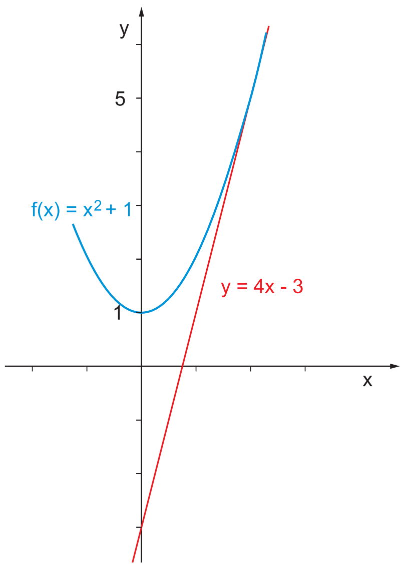
Mindezeket beírva az (5.28) egyenletbe megkapjuk az érintő egyenletét:

$$y = 5 + 4(x-2),$$

átrendezés után:

$$y = 4x - 3 .$$

Az érintő egyenletét nem feltétlenül önmagáért írjuk fel. Az 5.7. ábrán látható, hogy az érintő a 2 hely nem túl nagy sugarú környezetében nagyon közel halad a görbéhez, emiatt a függvény értékeit ebben a környezetben kis hibával helyettesíthetjük az érintő függvényértékeivel. Ezt a tényt az 5.8.4. fejezetben és a 7.3. fejezetben is ki fogjuk használni.



5.7. ábra Az $f(x) = x^2 + 1$ egyenletű parabola érintője

5.8.2. A sebesség

Az 5.1. fejezetben a differenciálhányadost egy fizikai példával vezettük be.

A differenciálhányados segítségével felírhatjuk a mozgó test pillanatnyi sebességének definícióját:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = v'(t),$$

illetve, ha eltekintünk az időtől való függés jelölésétől:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Az összefüggésben v a sebességet, s az utat, t az időt jelöli.

A definíció a fizikában rendkívül hasznos, mert bonyolult mozgást (körmozgást, forgó mozgást, harmonikus rezgést, csillapított rezgést, stb.) végző test pillanatnyi sebessége is egyszerűen meghatározható vele.

Példa:

Tudjuk, hogy a harmonikus rezgést végző test kitérését az egyensúlyi helyzettől az

$$y(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

összefüggés írja le, ahol y a kitérés, A a maximális kitérés (amplitúdó), ω a körfrekvencia, t az idő, φ a kezdőfázis.

A sebesség a kitérés idő szerinti deriváltja, tehát

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi).$$

Felhívjuk a figyelmet, hogy összetett függvényt deriváltunk.

A gyorsulást a sebesség idő szerinti deriváltjaként, vagy másképp az elmozdulás második deriváltjaként definiáljuk:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

Példaként a harmonikus rezgést végző test gyorsulásának a képletét írjuk fel:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi).$$

Ha emlékszünk középiskolai tanárunk nehézkes és körülményes levezetéseire, beláthatjuk, hogy a differenciálás milyen hatékony eszköz.

A sebességet a tudomány általában is az idő szerinti deriváltként definiálja, bármilyen természetű mennyiségre vonatkoztatjuk.

A koncentráció idő szerinti deriváltja a reakciósebesség, a radioaktív magok számának idő szerinti deriváltja a radioaktív bomlás sebessége, a lélekszám idő szerinti deriváltja a populáció növekedési sebessége, stb.

5.8.3. Hibaszámítás

Nézzünk először egy konkrét példát! Tegyük fel, hogy az a feladatunk, hogy egy 10 cm sugarú tömör gömböt készítsünk fémből. A kérdés az, hogy mennyivel lesz nagyobb a gömb térfogata, ha hibázunk, és a sugár 10,1 cm lesz.

A válasz egyszerű: számítsuk ki a térfogatot mindkét sugárral, majd vonjuk ki a nagyobból a kisebbet. Ha azonban megelégszünk azzal, hogy a hibát csak közelítőleg, de jó közelítéssel adjuk meg, kevesebb számolással is célhoz érhetünk.

A differenciálhányados a differenciahányados határértéke (5.1. fejezet), vagyis a kettő értéke közelítőleg megegyezik, ha Δx értéke nem túlságosan nagy:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx \frac{df}{dx}.$$

Átrendezve:

$$\Delta f \approx \frac{df}{dx}\Delta x,$$

vagyis a függvényérték eltérését (hibáját) közelítőleg úgy is meghatározhatjuk, hogy a derivált értékét megszorozzuk a változó eltérésével (hibájával).

Az összefüggésből látható, hogy a függvényérték változása megközelítőleg arányos a deriválttal. Az összefüggést csak akkor érdemes alkalmazni, ha a derivált helyettesítési értéke egyszerűbben kiszámítható, mint magáé a függvényé.

A képletet a gömb példájára alkalmazzuk. A gömb térfogatának képlete:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

A derivált:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi 3r^2 = 4\pi r^2.$$

Vagyis

$$\Delta V \approx \frac{dV}{dr}\Delta r = 4r^2\pi\Delta r = 4\cdot 10^2 \cdot 3{,}14\cdot 0{,}1 = 125{,}7cm^3.$$

A térfogatok különbségeként kiszámítható hiba:

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi\left(r+\Delta r\right)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = 4315{,}7 - 4188{,}8 = 126{,}9\ cm^3.$$

A két érték eltérése elfogadható.

A függvényértékek eltérését, Δf -et *abszolút hibá*nak nevezzük. Nagyságát önmagában nehéz elbírálni, érdemes a függvényértékhez viszonyítani. Ha a hibát elosztjuk a függvényértékkel, akkor a *relatív hibát* kapjuk. Mivel a leggyakrabban százalékban adjuk meg, a képlete a következő:

$$h = \frac{\Delta f}{f}100\ \%.$$

A relatív hiba már szemléletesebb, jobban értékelhető. A kémiai analitikában például mérési módszerek jellemzésére elterjedten használják.

Alkalmazzuk a képletet az előző példa eredményeire!

A relatív hiba:

$$h = \frac{\Delta V}{V}100\ \% = \frac{4r^2\pi\Delta r}{\frac{4r^3\pi}{3}}100\ \% = \frac{3\Delta r}{r}100\ \% = 3\ \%.$$

A relatív hiba természetesen kiszámítható úgy is, hogy kiszámítjuk a nagyobb és a kisebb gömb térfogatát, képezzük a különbségüket és elosztjuk a pontos térfogatértékkel. Az így kapott eredmény:

$$h = \frac{126,9}{4186,6} 100\ \% = 3,03\ \%.$$

A két eredmény eltérése nem számottevő, viszont a számolási igények közötti eltérés még nagyobb. Hangsúlyozzuk, hogy ez nincs mindig így, a deriválás és a derivált egyszerűsége vagy bonyolultsága a meghatározó.

5.8.4. Függvény közelítő értékének kiszámítása

Írjuk fel a derivált (5.5) definícióját:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

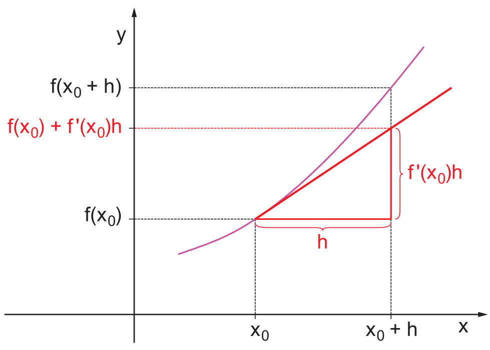
Ha h értéke nem túl nagy, akkor a határérték a differenciahányadossal közelíthető:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Átrendezve a következőt kapjuk:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h. \tag{5.29}$$

Az 5.8. ábrán szemléltetjük a képletben szereplő mennyiségeket.



5.8. ábra Függvény közelítő értékének meghatározása

Mint látható, a görbe vonallal ábrázolható függvényt egy kis szakaszon egy egyenessel, az $(x_0; f(x_0))$ pontban a görbéhez húzható érintővel helyettesítjük (5.8.1. fejezet). Ha a görbe alakja nem nagyon tér el az egyenestől, és ha h nem nagyon nagy, akkor a közelítés hibája elfogadható.

Tehát ha egy függvény értékét könnyen ki tudjuk számítani egy x_0 helyen, akkor egy tőle h távolságra lévő helyen a függvényértékre az (5.29) képlettel egy közelítő adatot kaphatunk.

Példa:

Keressük $\sqrt{10}$ értékét.

Függvényünk:

$$f(x) = \sqrt{x},$$

deriváltja:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

A 9 négyzetszám, négyzetgyöke 3, célszerű tehát az $x_0 = 9$ választást tenni.

Ekkor $h = 1$, $f(x_0) = 3$, $f'(x_0) = \frac{1}{2 \cdot 3} = 0{,}1667$.

Mindezeket behelyettesítve az (5.29) egyenletbe:

$$\sqrt{10} \approx 3 + 0{,}1667 \cdot 1 = 3{,}1667.$$

A helyes érték öt értékes jegy pontossággal 3,1623, az egyezés nem túl jó, de az igényektől függően elfogadható lehet. A hiba a következő fejezetben bemutatandó módszerrel csökkenthető, elvileg tetszőlegesen kicsivé tehetö.

5.8.5. A Taylor-polinom

Töprengjünk el egy kicsit azon a tényen, hogy egy közönséges zsebszámológép egy tetszőleges nagyságú szög szinuszát vagy koszinuszát, egy szám négyzetgyökét, logaritmusát nyolc-tíz értékes jegy pontossággal egy-két gombnyomásra megadja.

Hogyan képes erre?

A memóriájából biztosan nem keresheti elő, hiszen gyakorlatilag végtelen sokféle számot adhatunk meg mint változóértéket, a hozzájuk tartozó nagyon sok függvényérték tárolására biztosan nincs megfelelő kapacitása.

A másik lehetséges megoldás a számolás, vagyis a számológép kiszámítja a kért függvényértékeket. Ezek szerint lennie kell valamilyen számítási eljárásnak.

Az előző fejezetben a függvényértékek közelítő kiszámítására adtunk módszert, aminek alkalmazhatósága azonban nagyon is korlátozott. A módszer javítására a következő, általunk nem bizonyított tétel ad lehetőséget:

5.17. tétel: Legyen $f(x)$ és $g(x)$ az x_0 helyen egyaránt többször deriválható függvény. A két függvény görbéje annál közelebb esik egymáshoz az x_0 környezetében, minél magasabb rendű deriváltjaik egyeznek meg az x_0 helyen.

Tehát egy $f(x)$ függvény értékeit egy adott x_0 hely környezetében úgy is kiszámíthatjuk, hogy helyettesítjük egy alkalmasan megválasztott $g(x)$ függvénnyel, és annak értékeit számítjuk ki.

Mivel a polinomok tetszőlegesen sokszor deriválhatóak, értékeiket pedig elemi műveletekkel ki tudjuk számítani, célszerűen polinomot választunk helyettesítő függvényként.

Polinomunk legyen a következő:

$$T_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n,$$

legyen továbbá $f(x)$ legalább n-szer deriválható függvény, és vizsgálódjunk az $x_0 = 0$ helyen! Feladatunk a polinom együtthatóinak meghatározása.

Közbevetőleg emlékeztetünk rá, hogy a pozitív egész számok szorzatát 1 és n között $n!$-sal (*n faktoriális*sal) jelöljük:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n,$$

és arra is, hogy

$$0! = 1.$$

Deriváljuk tehát polinomunkat néhányszor, a jobb érthetőség kedvéért az 1 szorzótényezőket és az 1 hatványkitevőket is kiírva!

$$T_n'(x) = 1a_1 + 2a_2x^1 + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots + na_nx^{n-1},$$

$$T_n''(x) = 2\cdot 1a_2 + 3\cdot 2a_3x^1 + 4\cdot 3a_4x^2 + 5\cdot 4a_5x^3 + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2},$$

$$T_n^{(3)}(x) = 3\cdot 2\cdot 1a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4x^1 + 5\cdot 4\cdot 3a_5x^2 + \ldots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3},$$

$$T_n^{(4)}(x) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1a_4 + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2a_5x^1 + \ldots + n(n-1)(n-2)(n-3)a_nx^{n-4},$$

és így tovább.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy polinomok értéke a nulla helyen mindig a konstans taggal egyezik meg, hiszen a többi tagban mindenütt szerepel x, azok értéke emiatt nulla.

$f(x)$ és $T_n(x)$ deriváltjai az $x_0 = 0$ helyen megegyeznek (természetesen a függvényértékek is megegyeznek), tehát

$$f(0) = T_n(0) = a_0,$$

$$f'(0) = T_n'(0) = 1a_1,$$

$$f''(0) = T_n''(0) = 2\cdot 1a_2,$$

$$f^{(3)}(0) = T_n^{(3)}(0) = 3\cdot 2\cdot 1a_3,$$

$$f^{(4)}(0) = T_n^{(4)}(0) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1a_4,$$

végül

$$f^{(n)}(0) = T_n^{(n)}(0) = n!\cdot a_n.$$

Az egyenletekből az együtthatók kifejezhetők:

$$a_0 = f(0),$$

$$a_1 = \frac{f'(0)}{1},$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!},$$

$$a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!},$$

végül

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

A polinom tehát:

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{5.30}$$

Tömörebb jelöléssel:

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i,$$

mivel tudjuk, hogy $0! = 1$, és mivel a függvényt saját maga nulladik deriváltjaként foghatjuk fel.

A $T_n(x)$ függvényt $f(x)$ *n-edfokú Taylor-polinom*jának nevezzük.

Ha célszerűbb egy nullától eltérő x_0 hely környezetében vizsgálódni, például azért, mert az $x_0 = 0$ helyen a függvénynek nincs értelme, akkor a polinomot a következő alakban vesszük fel:

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots + a_n(x - x_0)^n.$$

A fent ismertetett levezetéssel analóg módon, amit most nem részletezünk, a következő eredményt kapjuk:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \tag{5.31}$$

illetve

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i.$$

Az (5.30) összefüggés az (5.31) speciális esetének tekinthető, amikoris $x_0 = 0$. A pontosság kedvéért megjegyezzük, hogy az (5.31) összefüggés a Taylor-polinom képlete, az (5.30) képletet nevezik McLaurin polinomnak is.

Felmerül a kérdés, hogy egy adott x helyen mennyire közelíti meg a polinom értéke a függvényértéket, tehát mekkora az

$$f(x) - T_n(x) = R_n(x)$$

maradéktag értéke.

Kimutatható, hogy a maradéktag értéke az

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)} \tag{5.32}$$

képlettel számítható ki, ahol ξ x és x_0 közé esik. A képlettel a maradéktag értéke jól becsülhető.

n! értéke *n* növekedésével rohamosan nő, emiatt várható, hogy a maradéktag *n* növekedésével csökken. Ez az általunk tárgyalt függvények esetében így is van, az állítást nem bizonyítjuk.

Az elmondottak illusztrálására nézzünk egy példát!

Példa:

Számítsuk ki *sin 0,85899* értékét! A szöget radiánban adtuk meg, nagysága fokban kifejezve 49° 13′.

A számoláshoz először állítsuk elő a szinuszfüggvény Taylor-polinomját az $x_0 = 0$ hely környezetében!

A függvényt deriváljuk és kiszámítjuk a deriváltak értékeit a nulla helyen:

$$\begin{gathered}\sin 0 = 0,\\ (\sin x)'_{x=0} = (\cos x)_{x=0} = 1,\\ (\sin x)''_{x=0} = (-\sin x)_{x=0} = 0,\\ (\sin x)^{(3)}_{x=0} = (-\cos x)_{x=0} = -1,\\ (\sin x)^{(4)}_{x=0} = (\sin x)_{x=0} = 0,\end{gathered}$$

és így tovább.

Az (5.30) egyenletbe beírjuk a kapott értékeket:

$$T_9(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 + \frac{-1}{7!}x^7 + \frac{0}{8!}x^8 + \frac{1}{9!}x^9.$$

Az együtthatókat kiszámítjuk:

$$T_9(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9.$$

Mielőtt a keresett *sin 0,85899* értéket kiszámítanánk, felhívjuk a figyelmet két dologra.

Egyrészt láthatjuk, hogy a fokszám növekedésével az együtthatók abszolútértéke rohamosan csökken, így a tagok abszolútértéke is.

Másrészt tudjuk a 3.4.3. fejezetből, hogy a szinuszfüggvény páratlan, és mint látjuk, Taylor-polinomjában csak páratlan kitevőjű x-hatványok szerepelnek. Ez általános dolog, tehát a páratlan függvényekre mindig igaz, és igaz az is, hogy páros függvények Taylor-polinomjaiban csak páros kitevőjű tagok szerepelnek.

A polinomba behelyettesítve az $x = 0,85899$ értéket a következő eredményt kapjuk:

$$sin\ 0,85899 = 0,75718.$$

Négy jegyre kerekítve az érték 0,7572, ami megegyezik a középiskolai négyjegyű függvénytáblázatban található értékkel.

A maradéktagra becslést adhatunk az (5.32) képlet alapján:

$$\sin^{(10)} x = -\sin x,$$

így

$$R_9(x) = \frac{-\sin(\xi)}{10!} 0,8592^{10} = \frac{0,21925}{3628800} \cdot (-\sin(\xi)) = 6,042 \cdot 10^{-8} \cdot (-\sin(\xi)),$$

ahol ξ értéke 0 és 0,8592 közé esik. Mivel *sin x* abszolútértéke maximum egy, megtehetjük, hogy $\sin \xi$ helyére 1-et írunk, a hibát így kissé felülbecsüljük.

Az eredmény tehát azt mutatja, hogy a kilencedfokú polinommal már $6,04 \cdot 10^{-8}$ -nál kisebb hibával kaptuk meg a keresett értéket. Ez a pontosság általában elegendő, sőt jónak tekinthető, ha belegondolunk, hogy a középiskolai négyjegyű függvénytáblázat hibája 10^{-5} nagyságrendű.

5.8.6. A L'Hospital szabály

A 4.4. táblázatból láthatjuk, hogy vannak olyan határértékek, melyek határozatlanok, kiszámításukhoz a függvény képletének valamilyen átalakítása szükséges. Az átalakítások sokszor sematikusak, sokszor azonban eredeti ötleteket igényelnek. Az ilyen feladatok megoldásához nyújt nagyon hathatós segítséget a következő tétel, melyet bizonyítás nélkül ismertetünk:

5.18. tétel: Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvények az a hely valamely környezetében értelmezve vannak és differenciálhatóak,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

$$g'(x) \neq 0,$$

továbbá a

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték létezik, akkor

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

A tétel *Guillaume de L'Hôpital* francia matematikusról kapta nevét, aki először közölte. Feltételezik, hogy Johann Bernoulli svájci matematikus fedezte fel, ezért nevezik Bernoulli-L'Hospital szabálynak is.

A tétel szerint tehát egy $\frac{0}{0}$ típusú határérték úgy is kiszámítható, ha a tört számlálóját és nevezőjét külön-külön deriváljuk és a deriváltak hányadosának számítjuk ki a határértékét.

A tétel igaz akkor is, ha a határérték $\frac{\infty}{\infty}$ típusú, akkor is, ha $a = \pm\infty$, illetve jobb- és baloldali határértékekre is.

Nagyon fontos azonban, hogy csak $\frac{0}{0}$ illetve $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határértékre alkalmazhatjuk a tételt.

A 4.4. táblázatban még két problémás esetet látunk. Az egyik a $\infty - \infty$ típus:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

a kiszámítandó határérték pedig

$$\lim_{x\to a} \big(f(x) - g(x)\big).$$

Ha egyszerűbb megoldást nem találunk, akkor az

$$f(x) - g(x) = \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}$$

átalakítással a feladatot $\frac{0}{0}$ típusú határérték kiszámítására vezethetjük vissza.

A másik, eddig nem tárgyalt eset a $0 \cdot \infty$ típus:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

a kiszámítandó határérték pedig

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big).$$

A határérték kiszámítását az

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$$

átalakítással $\frac{0}{0}$ típusú határérték kiszámítására vezethetjük vissza.

Minden esetben feltételeztük. hogy a kiszámítandó határértékek és deriváltak léteznek.

Példák:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.

A határérték $\dfrac{0}{0}$ típusú, alkalmazhatjuk a L'Hospital szabályt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$.

A határérték $\dfrac{0}{0}$ típusú. Szorzattá is alakíthatnánk a számlálót és a nevezőt, de a L'Hospital szabály alkalmazása egyszerűbb:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{3}{5}.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}$.

A határérték szintén $\dfrac{0}{0}$ típusú, és a deriválás után is az marad. A megoldás: deriválunk még egyszer:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}.$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-4x+5}{3x^2-7x+8}$.

A határérték $\dfrac{\infty}{\infty}$ típusú, itt is kétszer kell deriválnunk:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x+5}{3x^2-7x+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-4}{6x-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},$$

a 4.4. fejezetben állítottakkal összhangban.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$.

Itt is $\dfrac{\infty}{\infty}$ a határérték típusa. A deriválás eredménye:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=n\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-1}}{e^x},$$

a számláló fokszáma eggyel csökkent, a nevező változatlan. Könnyen belátható, hogy az n-edik deriválás után a számláló értéke 1, a nevező továbbra is változatlan, a határérték tehát nulla.

A szabály alkalmazása nem mindig célravezető. Erre is mutatunk egy példát:

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$.

Az egyszerűség kedvéért írjuk át a gyököket hatványalakba és úgy deriváljunk:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{(x+2)^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{4}(x+2)^{-\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}}{-\frac{3}{8}(x+2)^{-\frac{5}{2}}}$$

és így tovább, látható, hogy nem jutunk előbbre. Megoldható azonban a feladat a 4.2. fejezetben alkalmazott kiemeléssel.

Emeljünk ki tehát a számlálóban és a nevezőben is $\sqrt{x}$ -et (vagy hatványalakban $x^{\frac{1}{2}}$ -t):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot 1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}}=1.$$

5.8.7. Függvények menetének vizsgálata

A differenciálszámítás egyik fontos területe függvények szélsőértékhelyeinek keresése (3.12. és 3.13. definíció).

Az analitikában különböző görbék (*spektrumok, kromatogramok*, stb) maximumai alapvető fontossággal bírnak, a matematikai statisztikában a különböző *sűrűségfüggvény*ek maximumai az eloszlások jellemző adatai. A fizikában kereshetjük a maximális emelkedési magasságot, a maximális sebességet, a maximális hatásfokot, a minimális időtartamot, szöget, ellenállást, a kémiában a maximális reakciósebességet, hőmérsékletet, vagy a gazdasági életben a maximális hasznot, minimális ráfordítást, stb. Ez csak néhány példa, de talán érzékelteti a témakör jelentőségét.

A szélsőértékek szoros kapcsolatban vannak a függvények monotonitásával. Ismerjünk meg először néhány tételt, melyek kapcsolatot teremtenek a függvény menete és a deriváltja között!

5.19. tétel: Ha egy adott I intervallumon az $f(x)$ függvény szigorúan monoton növekvő, akkor ott differenciálhányadosa nem lehet negatív.

Bizonyítás:

Írjuk fel a differenciahányados (5.4) definícióját egy tetszőleges x helyen:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

ahol $x\in I$, továbbá h akkora, hogy $[x;x+h]\subset I$.

Legyen h értéke először pozitív, vagyis $x+h>x$. Ebben az esetben, ha a függvény szigorúan monoton növekvő, akkor a 3.8. definíció szerint $f(x+h)>f(x)$. Vagyis a differenciahányados számlálója és nevezője egyaránt pozitív, így határértéke, a differenciálhányados sem lehet negatív. (Nulla lehet, hiszen tört határértéke lehet nulla.) Amennyiben h értékét negatívnak választjuk, akkor a differenciahányados számlálója és nevezője egyaránt negatív, maga a hányados újfent pozitív, határértéke tehát nemnegatív.

A tétel párja az

5.20. tétel: Ha egy adott I intervallumon az $f(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő, akkor ott differenciálhányadosa nem lehet pozitív.

A tétel bizonyítása az előzővel analóg módon történhet, ajánljuk az olvasónak, hogy fogalmazza meg.

A két tétel következményeként adódik az

5.21. tétel: Legyen az $f(x)$ függvény egy x_0 pontban differenciálható, és legyen értelmezve x_0-nak egy K környezetében. Csak akkor *lehet* szélsőértéke a függvénynek az adott pontban, ha

$$f'(x_0)=0$$

teljesül.

(Azt a tényt, hogy az adott pontban a derivált értéke nulla, szemléletesen úgy is meg szokták fogalmazni, hogy a derivált *eltűnik*.)

Bizonyítás:

Azt az esetet vizsgáljuk, amikor $f(x)$-nek x_0 pontban maximuma van, a minimum esete analóg módon tárgyalható.

A maximum léte azt jelenti, hogy

$$f(x)\le f(x_0),$$

amennyiben $x\in K$.

Emiatt azonban

$$f(x_0+h)-f(x_0)\le 0,$$

amennyiben $x_0+h\in K$.

Vizsgáljuk meg a differenciahányadosok, illetve a differencálhányados előjelét!

Legyen először $h<0$, azaz vizsgálódjunk x_0-tól balra!

Ebben az esetben

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\ge 0,$$

mivel a számláló és a nevező is negatív, tehát

$$\lim_{h\to 0-0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\ge 0.$$

Ha $h>0$, azaz x_0-tól jobbra vagyunk, akkor

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\le 0,$$

mivel a számláló negatív, a nevező viszont pozitív, tehát

$$\lim_{h \to 0+0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le 0.$$

Mivel a függvény az x_0 pontban differenciálható, a bal- és a jobboldali határérték megegyezik, értékük pedig a differenciálhányados értéke. Ez csak akkor lehetséges, ha mindkettő értéke nulla, tehát a differenciálhányados értéke nulla:

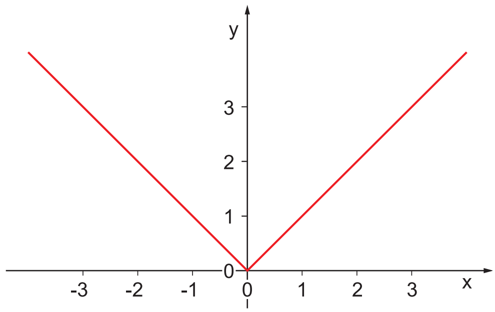
$$f'(x_0) \ge 0 \qquad \text{és} \qquad f'(x_0) \le 0,$$

vagyis

$$f'(x_0) = 0.$$

Felhívjuk a figyelmet két fontos tényre:

Az első: szélsőértéke természetesen nem csak deriválható függvénynek van. Az abszolútérték függvény például a nulla helyen nem deriválható, viszont minimuma van ott, melynek értéke nulla (5.9. ábra).



5.9. ábra Az abszolútérték függvény grafikonja

A második, nagyon fontos dolog: a derivált eltűnése szükséges, de nem elégséges feltétele a szélsőérték létezésének. Egyszerű ellenpélda az $f(x) = x^3$ függvény, amelynek a nulla helyen a deriváltja nulla ($\left(x^3\right)' = 3x^2$), szélsőértéke viszont sehol sincs, a nulla helyen sem, mivel szigorúan monoton növekvő függvény.

A fentiek alapján tehát deriválható függvények esetében a szélsőértékek keresésének a menete a következő: megkeressük, hogy hol tűnik el a derivált (hiszen csak ott lehet szélsőérték), majd megvizsgáljuk, hogy a kapott helyen vagy helyeken valóban van-e szélsőérték, és ha van, akkor az maximum vagy minimum.

A szélsőérték létezésének elégséges feltételét a következő, általunk nem bizonyított tétel tartalmazza:

5.22. tétel: Legyen az $f(x)$ függvény az x_0 helyen és K környezetében elegendően sokszor deriválható. A függvénynek az x_0 helyen szélsőértéke van, ha a legelső el nem tűnő deriváltjának rendje páros, viszont nincs szélsőértéke, ha az első el nem tűnő derivált rendje páratlan. Ez utóbbi esetben a függvénynek az x_0 helyen inflexiós pontja van (lásd a 3.11. definíciót).

Ennek értelmében ha az x_0 helyen az első derivált eltűnik, a második viszont nem, akkor a függvénynek ott szélsőértéke van. Ez a szésőérték maximum, ha a második derivált negatív, minimum, ha a második derivált pozitív.

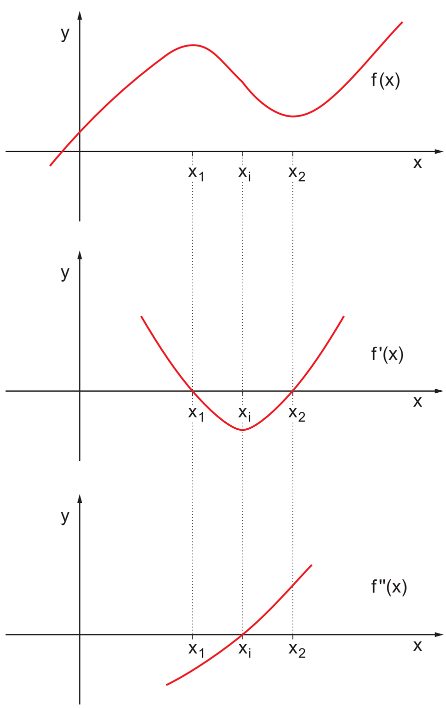
A magasabbrendű deriváltak vizsgálata helyett azonban sokszor egyszerűbb a derivált előjelét vizsgálni az x_0 hely környezetében.

Az 5.19. és az 5.20. tételek a monotonitás és a derivált kapcsolatáról szólnak. Ezeket felhasználva adódik a következő tétel, ami a szélsőérték létezésének *elégséges* feltétele:

5.23. tétel: Az $f\left(x\right)$ függvénynek az x_0 helyen akkor van maximuma, ha az x_0 helytől balra növekvő, vagyis deriváltja pozitív, jobbra viszont csökkenő, vagyis ott deriváltja már negatív. (Erre azt mondjuk, hogy a derivált az x_0 helyen *előjelet vált*.) Minimuma akkor van a függvénynek, ha a derivált előjelváltása fordított irányú, vagyis negatívból vált pozitívba.

Ha egy függvény második deriváltja egy adott $]a;b[$ intervallum minden pontjában negatív, akkor ott a függvény alulról konkáv, ha pozitív, akkor a függvény alulról konvex. Az inflexiós pont létezésének szükséges feltétele a második derivált eltűnése, elégséges feltétele a második derivált előjelváltása. Az állításokat nem bizonyítjuk.

Az eddig elmondottakat az 5.10. ábrán szemléltetjük.



5.10. ábra Függvény menete és deriváltjai

Az ábrán az $f(x)$ függvénynek az x_1 helyen maximuma, az x_2 helyen minimuma van. Ez összhangban van az $f'(x)$ függvény képével, ugyanis a derivált előjele az x_1 helytől balra pozitív, jobbra negatív, x_1 helyen nulla. Az x_2 környezetében az előjelviszonyok éppen ellentétesek, ott minimuma van a függvénynek.

Látjuk azt is, hogy a függvény x_1 környezetében konkáv, x_2 környezetében konvex, az x_i helyen inflexiós pontja van. $f''(x)$ viselkedése ennek megfelelő: előjele x_i-től balra negatív, jobbra pozitív, x_i helyen értéke nulla.

A fentieket átismételve és összefoglalva tehát egy legalább kétszer deriválható $f(x)$ függvény szélsőértékeit (és inflexiós pontjait) a következő lépésekkel kereshetjük meg:

– Deriváljuk a függvényt.
– Felírjuk az $f'(x)=0$ egyenletet és megoldjuk. Szélsőértéke csak az egyenlet gyökeinek helyein lehet a függvénynek (szükséges feltétel).
– Megvizsgáljuk $f'(x)$ előjelét a fent kapott gyökök környezetében. Ahol a derivált pozitív, ott a függvény növekvő, ahol negatív, ott csökkenő. Szélsőérték ott van, ahol derivált előjelet vált (elégséges feltétel).
– Kiszámítjuk a szélsőértékeket.
– Amennyiben az inflexiós pontokra is kíváncsiak vagyunk, még egyszer deriváljuk a függvényt.
– Megoldjuk az $f''(x)=0$ egyenletet. Inflexiós pontja az egyenlet gyökeinek helyein lehet a függvénynek (szükséges feltétel).
– Megvizsgáljuk $f''(x)$ előjelváltását a gyökök környezetében. Ahol előjelváltást tapasztalunk, ott van inflexiós pont (elégséges feltétel).
– Kiszámítjuk a függvény értékét az inflexiós pontban.
– Az adatok ismeretében felvázolhatjuk a függvény grafikonját. Ehhez szükségünk lehet a függvény határértékeire a mínusz végtelenben és a végtelenben, valamint a szakadási helyek környezetében.

Megjegyezzük, hogy amennyiben pusztán a szélsőértékeket keressük, az ismertetett utolsó öt lépés elvégzése felesleges.

Az elmondottakat egy viszonylag egyszerű példán mutatjuk be, majd egy összetettebb függvényvizsgálatot is elvégzünk.

Példák:

1. Keressük meg az $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2$ függvény szélsőértékeit és inflexiós pontjait, vázoljuk is fel a függvény grafikonját! (A feladat tömörebben megfogalmazva: végezzük el az adott függvény teljes vizsgálatát.)

   – Előzetesen megvizsgáljuk az értelmezési tartományt. Látjuk, hogy függvényünk minden valós számon értelmezve van, sőt azt is tudjuk, hogy mindenütt folytonos (4.6.1. fejezet), tehát $D_f=\{x\in\mathbb{R}\}$.
   – Ezután deriváljuk a függvényt:

$$f'(x)=3x^2+3x-6.$$

– A deriváltat egyenlővé tesszük nullával:

$$3x^2 + 3x - 6 = 0,$$

és megoldjuk a kapott egyenletet.

Az egyenlet másodfokú, megoldóképlettel könnyen megkapjuk a gyököket:

$$x_1 = -2 \qquad \text{és} \qquad x_2 = 1.$$

– Eddig tehát annyit tudunk, hogy a szélsőértékek helye –2 illetve 1 lehet, más nem. Vizsgáljuk meg, hogy valóban szélsőértéhelyek-e a kapott gyökök.

Azt fogjuk vizsgálni, hogy a derivált az adott helyeken előjelet vált-e. Ehhez értékeket választunk a gyököktől balra illetve jobbra, kiszámítjuk a derivált értékeit a kiválasztott helyeken, de csak az előjelekre vagyunk kíváncsiak.

A kisebbik gyök értéke –2, tőle balra van például –10. $f'(-10) = 264,$ az érték pozitív, a függvény növekvő.

A kisebbik gyöktől jobbra, de a nagyobbiktól még balra van például a nulla, $f'(0) = -6,$ az érték negatív, a függvény csökkenő. Látjuk, hogy a derivált előjelet vált a –2 helyen.

A nagyobbik gyöktől például 10 jobbra van, $f'(10) = 336,$ a derivált pozitív, a függvény növekvő. A derivált az 1 helyen is előjelet vált.

Eredményeink áttekintését nagyon megkönnyíti és a hibalehetőségeket is erősen csökkenti, ha számításainkat táblázatban foglaljuk össze. A táblázat soraiban x, $f'(x)$ és $f(x)$ szerepel. Az oszlopokban feltüntetjük a vizsgált helyeket, továbbá az értelmezési tartomány megfelelő intervallumait. Nagyon vigyázzunk, hogy az intervallumok és az értékek a számegyenesen elfoglalt helyük szerint következzenek egymás után, mert különben nehezen értelmezhetőek lesznek az eredményeink!

Jelen feladat részeredményei az 5.3. táblázatban láthatók.

5.3. táblázat Táblázat az (1) feladathoz

x	$]-\infty;-2[$	-2	$]-2;1[$	1	$]1;\infty[$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	max 8	↘	–5,5 min	↗

A táblázat összeállításával kapcsolatban a következőkre hívjuk fel a figyelmet:

Az első sorban az intervallumok mindig nyíltak, a végpontokban külön-külön vizsgálódunk.

A második sorban csak a derivált előjeleit tüntettük fel. Felmerül a kérdés, hogy az egyes intervallumokon belül a végpontoktól mekkora távolságra választhatunk értékeket vizsgálódásainkhoz. Mivel a derivált előjelváltásához szükséges, hogy felvegye a nulla értéket is, az intervallumok belsejében viszont soha nem veszi fel, így egy-egy intervallumban előjele állandó. Emiatt az intervallumokon belül tetszőleges helyeken vizsgálódhatunk. Célszerű olyan helyet választanunk, amelyen a számolás könnyen elvégezhető.

A harmadik sorban a megfelelő oszlopokban a függvény növekedését illetve csökkenését, ami a derivált előjeléből azonnal adódott, nyilakkal szemléltettük. Ez azért lehet hasznos, mert szemléletesen mutatja a maximum illetve a minimum létezését. Megszokott dolog a megfelelő helyre a maximum illetve a minimum értékét beírni. Jelen esetben ez $f(-2)$ és $f(1)$ kiszámítását és beírását jelenti.

– Az inflexiós pontok megtalálásához még egyszer deriváljuk a függvényt:

$$f''(x) = 6x + 3\,.$$

– Egyenlővé tesszük nullával és megoldjuk:

$$6x + 3 = 0$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

– Inflexiós pont tehát legfeljebb egy lehet, mégpedig a $-\frac{1}{2}$ helyen.

– Itt is vizsgáljuk az előjelváltást, az adatokat újfent táblázatba foglalva (5.4. táblázat):

5.4. táblázat Inflexiós pontok keresése az (1) feladatban

x	$\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$	$-\frac{1}{2}$	$\left]-\frac{1}{2};\infty\right[$
$f''(x)$	–	0	+
$f(x)$	konkáv	infl. $\frac{5}{4}$	konvex

A –1 helyen a második derivált értéke –3, negatív, a függvény konkáv.

Az 1 helyen a második derivált értéke 9, pozitív, a függvény konvex. A második derivált a $-\frac{1}{2}$ helyen tehát előjelet vált, a függvénynek ott inflexiós pontja van, az inflexiós pontban a függvényérték $\frac{5}{4}$.

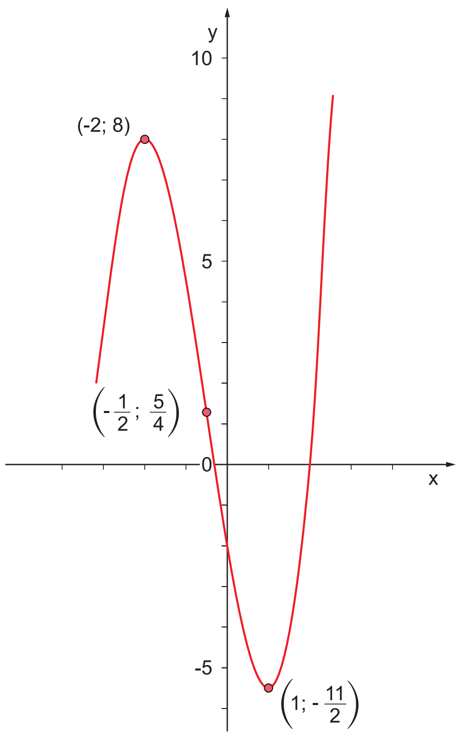
A grafikon vázlatának elkészítéséhez szükségünk van még a határértékekre:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2\right)=-\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2\right)=\infty .$$

Most már elkészíthetjük a vázlatot, az eredmény az 5.11. ábrán látható.

A függvény mindenütt folytonos. Az ábrát is segítségül hívva a határértékek alapján értékkészlete:

$$R_f=\left\{f\left(x\right);f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right\}.$$



5.11. ábra Az $f\left(x\right)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2$ függvény grafikonjának vázlata

2. Végezzük el az $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-6}$ függvény teljes vizsgálatát!

A képlet nem tűnik túlságosan bonyolultnak, de látni fogjuk, hogy sokkal több munkánk lesz a feladattal, mint az előzővel.

A feladat megoldásához itt is az értelmezési tartományra, a szélsőértékekre, az inflexiós pontokra és a határértékekre van szükségünk.

– Értelmezési tartomány: a nevező értéke nem lehet nulla. A nevező zérushelyei –2 és 3, ezeken a helyeken a függvénynek nincs értelme, szakadási helyek:

$$D_f=\{x;x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;3\}\}.$$

– Szélsőértékek: a derivált

$$f'(x)=\frac{-(2x-1)}{\left(x^2-x-6\right)^2}=\frac{-2x+1}{\left(x^2-x-6\right)^2},$$

zérushelye $\frac{1}{2}$. (Tört ott nulla, ahol számlálójának értéke nulla. A függvényt a törtfüggvényekre vonatkozó szabály szerint deriváltuk.)

A táblázat a következő:

5.5. táblázat Szélsőértékek keresése a (2) feladatban

x	$]-\infty;-2[$	-2	$\left]-2;\frac{1}{2}\right[$	$\frac{1}{2}$	$\left]\frac{1}{2};3\right[$	3	$]3;\infty[$
$f'(x)$	+	×	+	0	–	×	–
$f(x)$	↗	×	↗	max $-\frac{4}{25}$	↘	×	↘

Az $\frac{1}{2}$ helyen tehát a függvénynek maximuma van, értéke $-\frac{4}{25}$.
Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a táblázatban a szakadási helyeket is feltüntettük. Ez mindenképpen indokolt, hiszen a szakadási helyek különböző oldalain a függvények nagyon eltérően viselkedhetnek, így deriváltjaik előjelei is eltérőek lehetnek.

Inflexiós pontok: deriválnunk kell a deriváltat, ami olyan törtfüggvény deriválását jelenti, melynek nevezője összetett függvény:

$$f''(x)=\frac{-2\left(x^2-x-6\right)^2-(-2x+1)2\left(x^2-x-6\right)(2x-1)}{\left(x^2-x-6\right)^4},$$

$$f''(x)=\frac{\left(x^2-x-6\right)\left(6x^2-6x+14\right)}{\left(x^2-x-6\right)^4},$$

és megoldanunk az

$$\frac{\left(x^2-x-6\right)\left(6x^2-6x+14\right)}{\left(x^2-x-6\right)^4}=0$$

egyenletet.

A tört egyszerűsíthető $\left(x^2-x-6\right)$-tal:

$$\frac{6x^2-6x+14}{\left(x^2-x-6\right)^3}=0.$$

A törtnek csak ott van zérushelye, ahol a számlálónak, tehát a

$$6x^2-6x+14=0$$

egyenletet kell megoldanunk. A másodfokú egyenlet megoldóképletét felírva látjuk, hogy az egyenletnek nincs megoldása. Nincs tehát zérushelye a második deriváltnak, a függvénynek nincs inflexiós pontja.

A második derivált előjeleit ellenőrizva azt látjuk, hogy a $]-\infty;-2[$ intervallumon pozitív, ott a függvény konvex, a $]-2;3[$ intervallumon negatív, ott a függvény konkáv, a $]3;\infty[$ intervallumon újra pozitív, a függvény konvex.

– A határértékek kiszámításához a függvény nevezőjét szorzattá alakítjuk a zérushelyeket felhasználva:

$$f(x)=\frac{1}{(x+2)(x-3)}.$$

Vizsgálnunk kell a határértékeket a szakadási helyeken is, nem csak a végtelenben és a mínusz végtelenben, ráadásul a szakadási helyek mindkét oldalán:

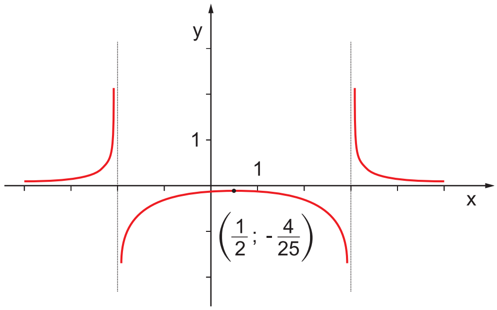
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(x+2)(x-3)}=0 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x+2)(x-3)}=0;$$

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{1}{(x+2)(x-3)}=\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to-2+0}\frac{1}{(x+2)(x-3)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{1}{(x+2)(x-3)}=-\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 3+0}\frac{1}{(x+2)(x-3)}=\infty.$$

Ajánljuk, hogy az olvasó is számítsa ki a határértékeket.

Eredményeink alapján megrajzolhatjuk a vázlatot (5.12. ábra).



5.12. ábra Az $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-6}$ függvény grafikonjának vázlata

Látjuk, hogy a függvénynek a –2 és a 3 helyen meg nem szüntethető szakadása van, értékkészletéből pedig kimarad a $\left[0;-\dfrac{4}{25}\right[$ intervallum:

$$R_f=\left\{f(x)\in\mathbb{R}\,\middle|\,\left(f(x)\le-\frac{4}{25}\cup 0<f(x)\right)\right\}.$$

Ezek után nézzünk néhány, kissé gyakorlatiasabb példát szélsőértékek keresésére!

3. Bontsuk fel a 30-at két összeadandóra úgy, hogy a két szám köbének az összege minimális legyen!

   Az ilyen természetű feladatok megoldásához először egy egyváltozós függvényt írunk fel, majd ennek keressük meg a szélsőértékhelyeit. Maguk a szélsőértékek nem mindig tartoznak hozzá a megoldáshoz.

   Jelöljük tehát az egyik összeadandót x-szel, akkor a másik $30-x$ lesz. A függvény a köbeik összege:

$$f(x)=x^3+(30-x)^3,$$

   ennek kell a szélsőértékhelyeit megkeresni.

   A derivált:

$$f'(x)=3x^2+3(30-x)^2\cdot(-1).$$

Egyenlővé tesszük nullával és megoldjuk:

$$3x^2 - 3(30 - x)^2 = 0,$$

$$-2700 + 180x = 0,$$

$$x = 15.$$

Az összegnek tehát csak egy helyen lehet szélsőértéke. Kis számolással ellenőrizhetjük, hogy a 15 előtt a derivált negatív, utána pozitív, a 15 tehát valóban minimumhely. A másik összeadandó így szintén 15, a kettő tehát megegyezik. Az összeadandók köbeinek összege 6750, de ez már nem a feladat része.

4. Egy egyszerű fizikai feladat: v_0 kezdősebességgel függőlegesen felfelé hajítunk egy testet. Milyen magasra fog emelkedni?

A függvény felírásához elemezzük a test mozgását. Kétféle mozgást végez egyidőben: ha nem lenne tömegvonzás, akkor a v_0 kezdősebességéből nem veszítene semmit, állandó sebességgel emelkedne:

$$h(t) = v_0 t,$$

ahol t a hajítás pillanatától eltelt idő.

Ha nem lenne kezdősebessége, akkor a csupán zuhanna a Föld középpontja felé, egyenletesen gyorsulva:

$$h(t) = -\frac{g}{2}t^2,$$

g a nehézségi gyorsulás.

A megvalósuló mozgás a kettő eredője:

$$h(t) = v_0 t - \frac{g}{2}t^2,$$

ennek a függvénynek keressük a maximumát.

A derivált:

$$h'(t) = v_0 - 2\frac{g}{2}t = v_0 - gt.$$

$$v_0 - gt = 0,$$

$$t = \frac{v_0}{g}.$$

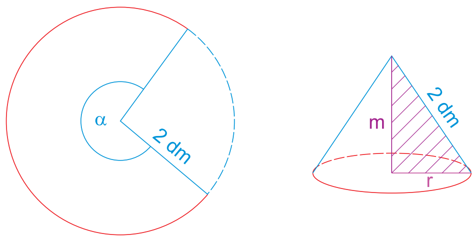
Ellenőrizhetjük, a $\frac{v_0}{g}$ helyen valóban maximuma van a függvénynek. Most azonban nem a maximumhelyet, hanem a maximum értékét kérdeztük:

$$h\left(\frac{v_0}{g}\right) = v_0\frac{v_0}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Tehát a test $\frac{v_0^2}{2g}$ magasságig emelkedik.

5. Végül egy összetettebb geometriai, vagy ha úgy tetszik, ipari feladat: van egy 20 cm sugarú, kör alakú fémlemezünk. Kivágunk belőle egy körcikket, a maradékból pedig egy egyenes körkúpot, vagyis egy tölcsért hajlítunk. Mekkora legyen a kivágott körcikk középponti szöge ahhoz, hogy a kúp térfogata maximális legyen?

   A feladat megoldásához rajzot készítettünk (5.13. ábra).



5.13. ábra Rajz az (5) feladathoz

A számolás egyszerűsítése érdekében nem a kivágott körcikk középponti szögét, hanem a megmaradó rész középponti szögét jelöljük α-val, továbbá a hosszúságokat nem centiméterben, hanem deciméterben mérjük, hogy az egyenletekben kisebb számok szerepeljenek.

A kúp térfogatának képlete

$$V = \frac{r^2 \pi m}{3}, \tag{5.33}$$

ahol r a kúp alapkörének sugara, m a kúp magassága.

Az ábrán bevonalazott háromszög derékszögű, felírható rá a Pitagorasz-tétel:

$$m^2 + r^2 = 4,$$

ebből

$$m = \sqrt{4 - r^2}. \tag{5.34}$$

A körlemez kerülete eredetileg:

$$K = 4\pi,$$

ami 2π nagyságú középponti szöghöz tartozik (a szögek nagyságát radiánban mérjük). Ebből a kivágás után megmaradó lemez α nagyságú középponti szögéhez

$$k = 4\pi \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha$$

hosszúságú ív tartozik, ami éppen a kúp alapkörének kerülete lesz, ha a lemezt összehajtjuk:

$$k = 2r\pi = 2\alpha,$$

ebből

$$r = \frac{\alpha}{\pi}$$

adódik az alapkör sugarára.

Ezt beírhatjuk a kúp magasságára kapott (5.34) egyenletbe, majd a magasságot és a sugarat a térfogat (5.33) képletébe:

$$V(\alpha) = \frac{\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \pi \sqrt{4 - \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2}}{3}.$$

$V(\alpha)$ azt jelzi, hogy a térfogatot a középponti szög függvényeként sikerült megadnunk.

Célszerű rendezések és átalakítások után az egyenlet a következő:

$$V(\alpha) = \frac{\alpha^2 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{3\pi^2} = \frac{1}{3\pi^2} \alpha^2 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}.$$

A deriválásnál figyeljünk, hogy egyrészt $\frac{1}{3\pi^2}$, bármilyen összetett kifejezés is, csupán egy konstans, tehát kiemelhető, másrészt viszont egy olyan szorzat-függvényt kell deriválnunk, melynek második tényezője összetett függvény!

A derivált tehát:

$$V'(\alpha) = \frac{1}{3\pi^2} \left(2\alpha\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} + \alpha^2 \frac{1}{2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} (-2\alpha) \right).$$

Meg kell oldanunk az

$$\frac{1}{3\pi^2} \left(2\alpha\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} + \alpha^2 \frac{1}{2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} (-2\alpha) \right) = 0$$

egyenletet.

Szorozhatunk $3\pi^2$-tel, kiemelhetünk 2α-t, és mivel α nem lehet nulla, oszthatunk vele:

$$\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} - \alpha^2 \frac{1}{2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}} = 0.$$

α biztosan kisebb, mint 2π, ezért $2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$ nem lehet nulla, szorozhatunk vele:

$$2\left(4\pi^2 - \alpha^2\right) - \alpha^2 = 0.$$

Ebből

$$\alpha^2 = \frac{8\pi^2}{3}$$

adódik. Mivel α pozitív szám, az egyenletnek csak a pozitív gyökét vesszük figyelembe:

$$\alpha = \pi\sqrt{\frac{8}{3}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

A derivált előjelet vált (ellenőrzés!), tehát valóban maximuma van itt a térfogatnak. (Ha a maximum létezését a második derivált előjelével kívánjuk ellenőrizni, rögtön látjuk, hogy milyen nagy fába vágjuk a fejszénket.)

A szög nagysága átszámítva körülbelül 293,9°, a kúp térfogata $\frac{16\pi\sqrt{3}}{27}$ dm^3 lesz.

Feladatok:

1. Írja fel az $f(x) = \sqrt{x} + 2$ függvény görbéje érintőjének egyenletét az $x = 4$ helyen!
2. Írja fel az $f(x) = \cos x$ függvény görbéje érintőjének egyenletét az $x = \frac{\pi}{2}$ helyen!
3. Hengert esztergálunk egy 50 cm hosszú rúdból. A sugárra az előírás 3 cm. Várhatóan mennyivel lesz nagyobb a henger térfogata, ha a sugár 3,01 cm lesz? Mekkora lesz a relatív hiba?
4. A megfelelő függvény differenciálhányadosának segítségével adjon becslést a következő értékekre:

   a) $\sqrt{25,2}$ *b)* $\sin 31°$ *c)* 101^2 *d)* $\lg 1030$
5. Adja meg az $f(x) = e^x$ függvény hetedfokú Taylor-polinomját a nulla hely környezetében!
6. Adja meg az $f(x) = \cos x$ függvény tizedfokú Taylor-polinomját a nulla hely környezetében!
7. Számítsa ki a következő határértékeket!

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}$

   c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ *d)* $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2}{e^x}$

   e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x}$ *f)* $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x}$
8. Adja meg a következő függvények szélsőértékeinek helyét, értékét és jellegét (maximum vagy minimum)! Ahol van, ott adja meg az inflexiós pontok helyét és értékét is!

   a) $f(x) = x^2 - 4x + 7$ *b)* $f(x) = 6 - 2x - 2x^2$

   c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$ *d)* $f(x) = x^4 - 4x^2$

   e) $f(x) = \frac{2}{x} + 4x + 3$ *f)* $f(x) = x^2 e^{-x}$
9. Adja meg a 10 cm sugarú körbe írható maximális területű téglalap oldalainak hosszát!

10. Bontsa fel az 50-et két szám összegére úgy, hogy a tagok négyzetének összege minimális legyen!

11. Egy liter térfogatú hengeres edényt kívánunk készíteni fémlemezből. Mekkora legyen az alapkör sugara illetve az edény magassága, hogy az anyagfelhasználás minimális legyen?

12. Nitrogén-monoxidból és oxigénből álló gázelegyben a következő reakció zajlik:

$$2NO + O_2 = 2NO_2 .$$

A reakció sebességét (v) megadó egyenlet:

$$v = kx^2 y ,$$

ahol k állandó (csak a hőmérséklettől függ), x a nitrogén-monoxid, y az oxigén koncentrációja térfogatszázalékban. Milyen oxigénkoncentráció mellett lesz a sebesség maximális?

6. Egyváltozós függvények integrálása

6.1. A határozott integrál

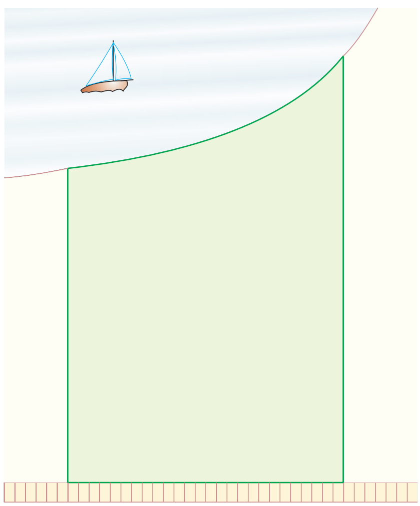
Tananyagunkban az utolsó új, közvetlenül a határértékekhez kapcsolódó fogalom a határozott integrál. Ezt is egy gyakorlatias példával vezetjük be.

Korábbi tanulmányaink során nagyon sokféle síkidom területének kiszámítására tanultunk képleteket, a négyzettől kezdve a háromszögön át egészen a körig. Nem tanultuk viszont különböző görbe vagy egyenes vonalakkal határolt síkidomok területének kiszámítását. Kérdés, hogy egyáltalán tudunk-e valamit kezdeni ilyen síkidomok területével.

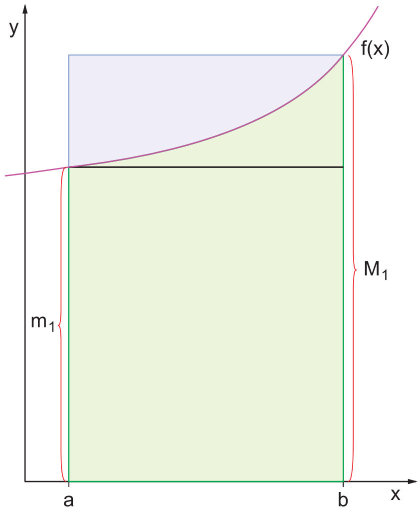
Legyen a probléma a következő:

Van egy nyaralótelkünk a Balaton partján, amit el akarunk adni. A telket nyugatról és keletről egyenes, párhuzamos kerítések határolják, délről pedig a vasútvonal, ami szintén egyenes, és merőleges a kerítésekre. Északról a tó határol, a partvonal görbe (6.1. ábra). A telket el akarjuk adni, ára természetesen arányos a területével. Meghatározandó a terület nagysága.

Rögtön látható, hogy a korábban tanult területképletek nem alkalmazhatóak. Megoldás lehet az, hogy valamilyen közelítő módszert dolgozunk ki, olyat, amelyik ismert területképletű síkidomokkal közelít, ráadásul a közelítés megfelelően pontossá tehető.



6.1. ábra Egy balatoni telek, aminek a területét szeretnénk kiszámítani



6.2. ábra A telek koordinátarendszerben elhelyezve, valamint az első közelítő téglalapok

Helyezzük el a telket egy koordinátarendszerben (6.2. ábra)! Tegyük fel, hogy északi határa valamilyen $y = f(x)$ egyenletű görbével leírható! A két déli sarok koordinátái legyenek $(a;0)$ és $(b;0)$! A feladat tehát az x tengely, az $x = a$, az $x = b$ egyenesek és az $y = f(x)$ görbe által határolt terület kiszámítása, illetve a megszokott, tömörebb megfogalmazás szerint az $y = f(x)$ görbe alatti terület kiszámítása az $[a;b]$ intervallumon.

Téglalapokkal fogunk közelíteni. Tekintsük először azt a téglalapot, amelynek vízszintes oldala az $[a;b]$ intervallum, függőleges oldala pedig a maximális függvényérték ezen az intervallumon (M_1)! Ennek területe:

$$T_1 = M_1(b-a),$$

biztosan nem kisebb a vizsgált területnél, hiszen tartalmazza azt, vagyis a területnek egy felső közelítése. Egyenlő akkor lehetne vele, ha a telek éppen téglalap alakú lenne.

Tekintsük most azt a téglalapot, amelynek vízszintes oldala szintén az $[a;b]$ intervallum, függőleges oldala viszont a minimális függvényérték ezen az intervallumon (m_1)! Ennek területe:

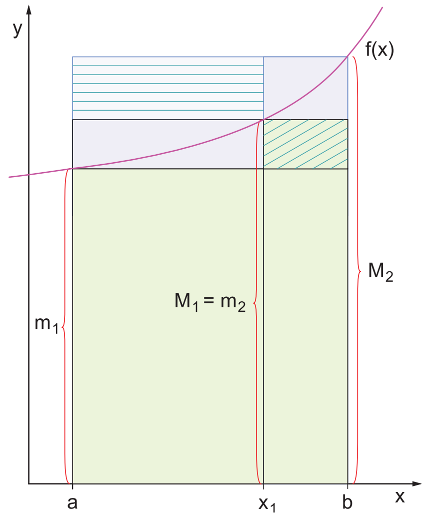
$$t_1 = m_1(b-a),$$

biztosan nem nagyobb a vizsgált területnél, hiszen benne van, alsó közelítés.

Felírhatjuk tehát, hogy

$$t_1 \le A \le T_1,$$

ahol A a meghatározandó terület.



6.3. ábra A második közelítés

Nyilvánvaló, hogy ez nagyon durva közelítés. Az eladónak esetleg megfelelne T_1, a vevőnek pedig t_1, mint a vételár kiszámításának alapja, de belátható, hogy az adatok nem reálisak.

A közelítést úgy javíthatjuk, hogy elhelyezünk egy osztópontot valahol az $[a;b]$ intervallum belsejében (legyen a jele x_1), és a keletkező részintervallumokon újra kiszámítjuk a felső és az alsó közelítést (6.3. ábra).

A felső közelítésnél a téglalapok vízszintes oldalai $(x_1 - a)$ és $(b - x_1)$, függőleges oldalaik a maximális függvényértékek a megfelelő intervallumokon:

$$T_2 = M_1(x_1 - a) + M_2(b - x_1).$$

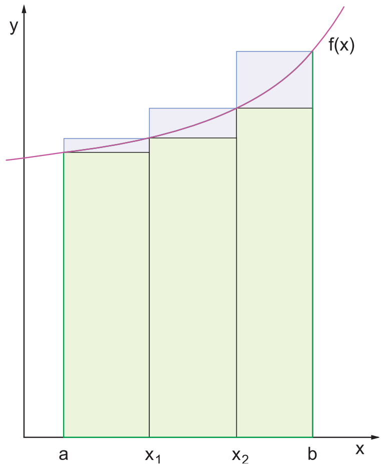
Az alsó közelítésnél a téglalapok függőleges oldalai a minimális függvényértékek a megfelelő intervallumokon:

$$t_2 = m_1(x_1 - a) + m_2(b - x_1).$$

A 6.3. ábráról több dolog is leolvasható. Az egyik az, hogy az osztópont használatával a felső közelítés (felső közelítő összeg) nagysága kisebb lett, mint az előző (vízszintesen vonalkázott terület), az alsó közelítő összeg viszont nőtt a ferdén vonalkázott területtel. A másik az, hogy a felső közelítő összeg biztosan nem kisebb a területnél, az alsó pedig biztosan nem nagyobb.

Bebizonyítható, hogy az osztópont felvétele mindig javít, de legalábbis nem ront a közelítéseken:

$$t_1 \le t_2 \le A \le T_2 \le T_1.$$



6.4. ábra A harmadik közelítés

A harmadik közelítéshez újabb osztópontot veszünk fel, x_2-t. x_2-nek nem feltétlenül kell nagyobbnak lennie x_1-nél, de ha kisebb, akkor az indexelést megváltoztatjuk úgy, hogy az indexek növekedjenek (6.4. ábra).

A vízszintes oldalak most $(x_1 - a)$, $(x_2 - x_1)$ és $(b - x_2)$.

A felső közelítő összeg

$$T_3 = M_1(x_1 - a) + M_2(x_2 - x_1) + M_3(b - x_2),$$

az alsó pedig

$$t_3 = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(b - x_2).$$

Továbbra is írhatjuk, hogy

$$t_1 \le t_2 \le t_3 \le A \le T_3 \le T_2 \le T_1.$$

Látjuk tehát, hogy a területet újabb és újabb osztópontok felvételével egyre jobban közelítjük alulról és felülről is. Vegyünk fel $(n-1)$ osztópontot, vagyis osszuk fel az $[a;b]$ intervallumot n részre, és vezessük be az $x_0 = a$ és $x_n = b$ jelöléseket! Így az n-edik felső közelítő összeg:

$$T_n = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

ahol $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, az i-edik intervallum hossza.

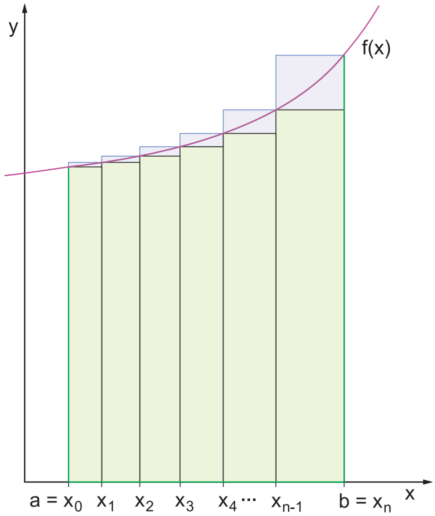
Az n-edik alsó közelítő összeg hasonlóan

$$t_n = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

és továbbra is írhatjuk, hogy

$$t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n \le A \le T_n \le \ldots \le T_2 \le T_1,$$

vagyis a közelítés fokozatosan javul (6.5. ábra).



6.5. ábra Az n-edik közelítés

Ha az osztópontok számát minden határon túl növeljük, akkor a közelítés nagyon pontossá tehető. Ehhez az szükséges, hogy a leghosszabb intervallum hossza is nullához tartson. Feltételnek ez utóbbit írjuk elő, mivel ez egyben maga után vonja az osztópontok számának végtelenhez való tartását is.

Tehát ha a

$$\lim_{\max.\Delta x_i \to 0} T_n = \lim_{\max.\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

határérték létezik, és megegyezik a

$$\lim_{\max.\Delta x_i \to 0} t_n = \lim_{\max.\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

határértékkel, akkor ezt a közös határértéket a terület mérőszámának, A-nak tekintjük.

A legnagyobb intervallum hossza is nullához közelít, ezért Δx_i helyett bevezetjük a dx jelölést. Az intervallumok kicsivé válásának az is következménye, hogy M_i és m_i értéke egyre jobban közelít egymáshoz, és mindegyik helyettesíthető valamilyen, az i-edik intervallumon felvett függvényértékkel, ezt eljelöljük $f(x)$-szel.

Végül a Σ jel, a görög S helyett bevezetünk egy speciális, nyújtott S betűt, az integráljelet, így a határértéket a következő alakba írjuk át:

$$A = \lim_{\max.\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \lim_{\max.\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad (6.1)$$

ahol a és b az intervallum végpontjai.

6.1. definíció: Az

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

mennyiséget, amelynek részletes definíciója a (6.1) képletben található, az $f(x)$ függvény $[a;b]$ intervallumon vett *határozott integrál*jának nevezzük. Az a mennyiség az integrálás *alsó*, b a *felső határ*a. (A definiáló egyenlet jobboldalának felolvasása: „Integrál a-tól b-ig $f(x)dx$.")

6.2. definíció: Ha a 6.1. képletben leírt két határérték létezik és meg is egyeznek, akkor azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény az $[a;b]$ intervallumon *integrálható*.

Bebizonyítható, hogy ha az $f(x)$ függvény az $[a;b]$ intervallumon mindenütt folytonos, illetve esetleg véges sok helyen nem értelmezett, akkor integrálható[1].

A 6.1. definícióból rögtön adódnak a határozott integrál következő tulajdonságai:

Ha az alsó és a felső határ egybeesik, akkor az integrál értéke nulla:

$$A=\int_a^a f(x)dx=0.$$

Ha a határokat felcseréljük, akkor az integrál előjelet vált:

$$A=\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$$

Egy integrál úgy is kiszámítható, hogy részekre bontjuk, majd a részeket összegezzük:

$$A=\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx\,.$$

(Könnyen, csak kicsit hosszadalmasan bizonyítható, hogy nem feltétlenül szükséges az $a\le b\le c$ teljesülése, a három szám bármilyen sorrendben elhelyezkedhet a számegyenesen.)

Függvény konstansszorosának integrálja az integrál konstansszorosa:

$$\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx,$$

vagyis konstans szorzó kiemelhető az integráljel elé.

Ha az $[a;b]$ intervallumon mindenütt $f(x)\ge 0$, akkor

$$\int_a^b f(x)dx\ge 0\,,$$

ha $f(x)\le 0$, akkor

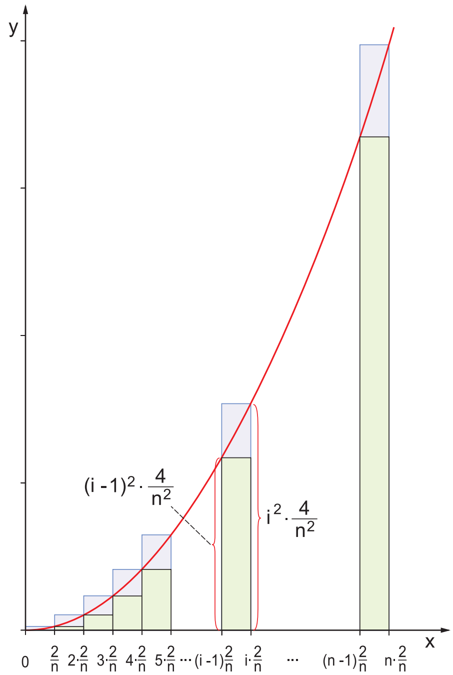
$$\int_a^b f(x)dx\le 0. \tag{6.2}$$

Példa:

Az elmondottak illusztrálására számítsuk ki az $f(x)=x^2$ függvény görbéje alatti területet a $[0;2]$ intervallumon (6.6. ábra)!

A számítás menete a következő:

– Felosztjuk a $[0;2]$ intervallumot $(n-1)$ számú osztóponttal n egyenlő részre. A 6.1. definícióban nem szerepel előírás az osztópontok elhelyezésének mód-



6.6. ábra Az $f(x)=x^2$ függvény görbéje alatti terület kiszámítása a [0;2] intervallumon

jára vonatkozóan, számításainkat viszont nagyon megkönnyíti, ha a részintervallumok egyenlő hosszúak.

– Kiszámítjuk a részintervallumok végpontjainak koordinátáit.

– Kiszámítjuk a minimális és a maximális függvényértéket minden egyes intervallumon.

– Kiszámítjuk az egyes részintervallumok feletti téglalapok területeit a minimális és a maximális függvényértékekkel egyaránt.

– A megfelelő téglalapok területeinek összegzésével felírjuk az alsó és a felső közelítő összeget.

– Mindkét összeg esetében képezzük az $n \to \infty$ határértéket.

Sorban végrehajtjuk a lépéseket, az adatokat a 6.1. táblázatban összegezzük.

– A $[0;2]$ intervallum hossza 2, így egy-egy részintervallum hossza,

$$\Delta x = \frac{2}{n}.$$

6.1. táblázat A területszámítás részadatai

i	x_i	m_i	$m_i\Delta x_i$	M_i	$M_i\Delta x_i$
1	$1\cdot\frac{2}{n}$	$0^2\frac{4}{n^2}$	$0^2\frac{8}{n^3}$	$1^2\frac{4}{n^2}$	$1^2\frac{8}{n^3}$
2	$2\cdot\frac{2}{n}$	$1^2\frac{4}{n^2}$	$1^2\frac{8}{n^3}$	$2^2\frac{4}{n^2}$	$2^2\frac{8}{n^3}$
3	$3\cdot\frac{2}{n}$	$2^2\frac{4}{n^2}$	$2^2\frac{8}{n^3}$	$3^2\frac{4}{n^2}$	$3^2\frac{8}{n^3}$
…	…	…	…	…	…
i	$i\cdot\frac{2}{n}$	$(i-1)^2\frac{4}{n^2}$	$(i-1)^2\frac{8}{n^3}$	$i^2\frac{4}{n^2}$	$i^2\frac{8}{n^3}$
…	…	…	…	…	…
$(n-1)$	$(n-1)\cdot\frac{2}{n}$	$(n-2)^2\frac{4}{n^2}$	$(n-2)^2\frac{8}{n^3}$	$(n-1)^2\frac{4}{n^2}$	$(n-1)^2\frac{8}{n^3}$
n	$n\cdot\frac{2}{n}$	$(n-1)^2\frac{4}{n^2}$	$(n-1)^2\frac{8}{n^3}$	$n^2\frac{4}{n^2}$	$n^2\frac{8}{n^3}$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0,$$

ha $n\to\infty$, akkor a $\max.\Delta x_i\to 0$ feltétel automatikusan teljesül.

– Az osztópontok koordinátái sorban $\frac{2}{n}$, $2\cdot\frac{2}{n}$, $3\cdot\frac{2}{n}$, … , $i\cdot\frac{2}{n}$, … , $(n-1)\cdot\frac{2}{n}$.

– Az első részintervallum a $\left[0;\frac{2}{n}\right]$, a második a $\left[\frac{2}{n};2\cdot\frac{2}{n}\right]$, a harmadik a $\left[2\cdot\frac{2}{n};3\cdot\frac{2}{n}\right]$, általában az i-edik az $\left[(i-1)\frac{2}{n};i\frac{2}{n}\right]$, az n-edik pedig $\left[(n-1)\frac{2}{n};n\frac{2}{n}\right]$. Mint látjuk, az utolsó, n-edik intervallum végpontja éppen 2.

– Az x^2 függvény szigorúan monoton növekvő, ha $x\geq 0$, emiatt a részintervallumokon a minimális függvényérték, m mindenütt az alsó határhoz tartozó érték lesz. Általában az i-edik intervallumon

$$m_i=\left((i-1)\frac{2}{n}\right)^2=(i-1)^2\frac{4}{n^2}.$$

A maximális függvényérték, M mindenütt a felső határ lesz:

$$M_i = \left(i\frac{2}{n}\right)^2 = i^2\frac{4}{n^2}.$$

– Az alsó közelítő összeghez tartozó i-edik téglalap területe m_i-nek és a részintervallum hosszának a szorzata, vagyis

$$m_i\Delta x_i = m_i\frac{2}{n} = (i-1)^2\frac{4}{n^2}\cdot\frac{2}{n} = (i-1)^2\frac{8}{n^3}.$$

– A felső közelítő összeghez tartozó i-edik téglalap területe M_i-nek és a részintervallum hosszának a szorzata, vagyis

$$M_i\Delta x_i = M_i\frac{2}{n} = i^2\frac{4}{n^2}\cdot\frac{2}{n} = i^2\frac{8}{n^3}.$$

– Az alsó közelítő összeg:

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(i-1)^2\frac{8}{n^3} = 0^2\frac{8}{n^3} + 1^2\frac{8}{n^3} + 2^2\frac{8}{n^3} + \ldots + (n-1)^2\frac{8}{n^3} =$$

$$= \left(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right)\frac{8}{n^3}. \tag{6.3}$$

A középiskolában bebizonyítottuk, hogy az első n pozitív egész szám négyzetének összegére igaz a következő összefüggés:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{6.4}$$

Az alsó közelítő összeg (6.3) kifejezésében a zárójelben az első $(n-1)$ szám négyzete szerepel:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)\big((n-1)+1\big)\big(2(n-1)+1\big)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Ezzel

$$t_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\cdot\frac{8}{n^3}.$$

Kettővel egyszerűsítve és a szorzásokat elvégezve a

$$t_n = \frac{8n^3 - 12n^2 + 4n}{3n^3}$$

eredményt kapjuk.

Határátmenetet képezve:

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}\frac{8n^3 - 12n^2 + 4n}{3n^3} = \frac{8}{3}.$$

– A felső közelítő összeg:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} i^2 \frac{8}{n^3} = 1^2 \frac{8}{n^3} + 2^2 \frac{8}{n^3} + 3^2 \frac{8}{n^3} + \ldots + n^2 \frac{8}{n^3} =$$

$$= \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) \frac{8}{n^3}.$$

Most átalakítás nélkül alkalmazhatjuk a (6.4) összefüggést:

$$T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{8}{n^3}.$$

Egyszerűsítés és szorzások után a

$$T_n = \frac{8n^3 + 12n^2 + 4n}{3n^3}$$

eredményt kapjuk, ennek határértéke a végtelenben:

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \frac{8n^3 + 12n^2 + 4n}{3n^3} = \frac{8}{3}.$$

Tehát mindkét határérték létezik, meg is egyeznek. Mondhatjuk tehát, hogy a keresett terület:

$$A = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} T_n = \frac{8}{3},$$

illetve

$$A = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}.$$

A feladat megoldásának rögtön adódik néhány tanulsága.

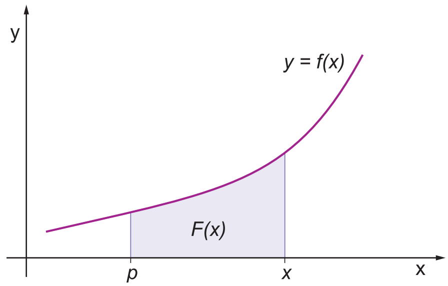
A legszembeötlőbb talán az, hogy a számolás nehézkes és hosszadalmas. Nagyon nagy eredmény, hogy egy parabolaív alatti területet ki tudunk számítani, de jó lenne, ha valamilyen gyorsabb, egyszerűbb módszer is a rendelkezésünkre állna. A feladat természetéből adódóan, ha a fenti módszert követnénk, mindig n tagú összegeket illetve határértéküket kellene kiszámítanunk. Ez egyszerűbb esetekben működhet, de az esetek többségében a feladat megoldása szinte reménytelen (gondoljunk például a szinuszfüggvény görbéje alatti területre).

A következő fejezetben olyan módszert fogunk megismerni, amelynek alkalmazásával számításaink nagyon leegyszerűsödhetnek, de további fontos összefüggések is feltárulnak előttünk.

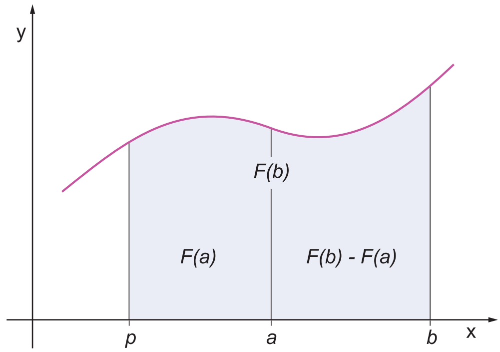
6.2. A Newton-Leibniz tétel

Tekintsük az $y = f(x)$ folytonos függvény görbéjét!

Kijelölünk az értelmezési tartományán egy tetszőleges p pontot, ebből merőlegest állítunk az x tengelyre. Egy futó x pontból is merőlegest állítunk a tengelyre.



6.7. ábra A területfüggvény definíciója



6.8. ábra A terület az [a;b] intervallumon

Jelölje $F(x)$ a két merőleges, az x tengely és a függvénygörbe által határolt terület nagyságát! Mivel minden x-hez egyértelműen egy adott terület, emiatt egy adott $F(x)$ érték tartozik, az $x \mapsto F(x)$ hozzárendelés egy egyváltozós függvényt definiál, amit ideiglenesen területfüggvénynek nevezhetünk (6.7. ábra).

Ha a 6.8. ábrának megfelelően az x tengelyen kijelölünk egy a pontot, akkor a hozzá tartozó terület nagysága $F(a)$, egy nála nagyobb b ponthoz tartozó terület pedig $F(b)$. Az $[a;b]$ intervallumon a függvény görbéje alatti terület nagysága ezek szerint $F(b)-F(a)$.

A határozott integrál 6.1. definíciója szerint a terület nagysága

$$A = \int_a^b f(x)\,dx,$$

vagyis

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{6.5}$$

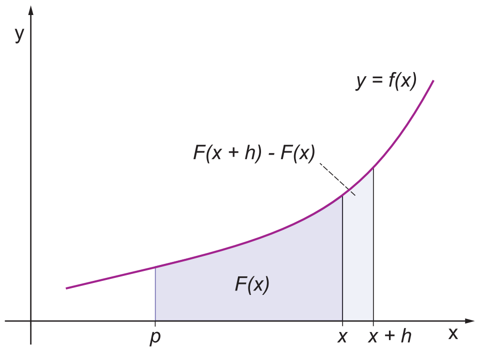
A követett út helyesnek tűnik, keressünk most már kapcsolatot $f(x)$ és $F(x)$ között! Kapcsolat nyilvánvalóan létezik, hiszen $f(x)$ alapvetően befolyásolja a terület nagyságát.

A 6.9. ábrán bejelöltük az $[x;x+h]$ intervallumhoz tartozó területet.

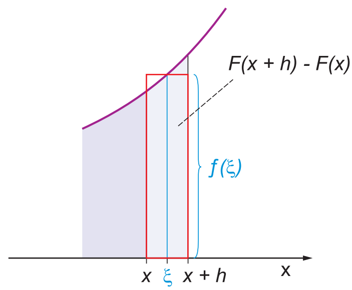
Ennek nagysága a (6.5) definíció szerint $F(x+h)-F(x)$. Ez a világosabb szürke színnel jelölt terület átdarabolható egy olyan téglalappá, melynek alapja h, magassága pedig $f(\xi)$. ξ az értelmezési tartomány valamely eleme az $[x;x+h]$ intervallum belsejében, $f(\xi)$ pedig az ehhez tartozó függvényérték (6.10. ábra). Az átdarabolhatóság a rajz alapján nyilvánvaló, természetesen korrekt módon be is bizonyítható. A bizonyítást nem ismertetjük, nagyon sok könyvben megtalálható[1,5,6,7].

Tehát

$$F(x+h) - F(x) = f(\xi)\,h.$$



6.9. ábra Kapcsolat $f(x)$ és $F(x)$ között



6.10. ábra Terület átdarabolása

h-val osztva mindkét oldalt:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(\xi).$$

Határátmenetet képezve mindkét oldalon:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0} f(\xi).$$

Az egyenlőség baloldalán éppen $F(x)$ -nek x-hez tartozó differenciálhányadosa áll (lásd az (5.5) definíciót). A jobboldalon, mivel h nagysága 0-hoz tart, ξ x-hez tart. Emiatt

$$\lim_{h\to 0} f(\xi)=f(x).$$

Ez utóbbiakat összegezve:

$$F'(x)=f(x),$$

vagyis az $f(x)$ függvény $F(x)$ *deriváltja*.

Összegezve eredményeinket kapjuk a *Newton-Leibniz tétel*t:

6.1. tétel: Ha az $f(x)$ és $F(x)$ függvények az $[a;b]$ intervallumon folytonosak, továbbá az $f(x)$ függvény az $F(x)$ deriváltja az $(a;b)$ intervallumon, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)\ .$$

Tehát ha az $f(x)$ függvényhez tartozó $F(x)$ képletét ismerjük, akkor a számítás már sokkal egyszerűbb ahhoz képest, mint amit a 6.1. fejezet példájának megoldásában láttunk. Azt, hogy $F(x)$ képletét hogyan keressük meg, a 6.3. fejezetben mutatjuk be. A terület illetve a határozott integrál kiszámításának lépéseit a 6.4.1. fejezetben fogjuk részletesen tárgyalni.

6.3. A határozatlan integrál

A határozott integrál értékének a Newton-Leibniz tétel szerinti kiszámításához szükségünk van tehát egy olyan függvényre, amelynek a deriváltja $f(x)$:

$$F'(x) = f(x). \tag{6.6}$$

Ugyanezt a kapcsolatot fejezi ki a következő jelölés:

$$\int f(x)\,dx = F(x). \tag{6.7}$$

(A baloldal felolvasása: „Integrál $f(x)dx$.")

Azt a műveletet, amelyet a (6.7) szabállyal jelölünk, *integrálás*nak nevezzük, az $F(x)$ függvényt pedig $f(x)$ *primitív függvény*ének. Az integrálás tehát a deriválás inverz művelete.

Látni fogjuk,hogy az integrálás sokkal nehezebb művelet a deriválásnál, a függvények nagyon nagy hányadának nem fogjuk tudni meghatározni a primitív függvényét, soknak pedig egyáltalán nincs is.

6.2. tétel: Ha egy $f(x)$ függvénynek van primitív függvénye, akkor végtelen sok van, és ezek csak egy-egy konstans tagban különböznek egymástól.

Bizonyítás

Legyen $F_1(x)$ és $F_2(x)$ egyaránt $f(x)$ primitív függvénye. Ekkor a (6.6) képlet szerint

$$F_1'(x) = f(x)$$

és

$$F_2'(x) = f(x),$$

vagyis

$$F_1'(x) = F_2'(x).$$

Átrendezve:

$$F_1'(x) - F_2'(x) = 0.$$

A deriválás azonosságai alapján ebből az

$$\left(F_1(x) - F_2(x)\right)' = 0$$

majd az

$$F_1(x) - F_2(x) = C,$$

azonosság adódik.

Átrendezéssel kapjuk az

$$F_1(x) = F_2(x) + C \tag{6.8}$$

azonosságot, amit igazolnunk kellett.

Mivel a C konstans tetszőleges valós értéket felvehet, így valóban végtelen sok primitív függvényt kapunk.

6.3. definíció: Az $f(x)$ függvény primitív függvényeinek összességét $f(x)$ *határozatlan integrál*jának nevezzük és a következőképpen jelöljük:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,.$$

6.3.1. Alapintegrálok

A differenciálási szabályok alapján könnyen megadhatjuk néhány alapfüggvény határozatlan integrálját. Például az $f(x) = x^n$ függvényre vonatkozó azonosság:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\,, \qquad \text{ha} \qquad n \neq -1\,.$$

Bizonyítás:

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n\,.$$

Az 5.2. táblázat alapján állítottuk össze a 6.2. táblázatot. A benne szereplő azonosságok a fentihez hasonlóan deriválással könnyen igazolhatók.

6.2. táblázat Alapfüggvények határozatlan integráljai

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\,, \quad n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tg\ x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctg\ x + C$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$ +C
$\frac{1}{1+x^2}$	arc$tg\ x$ +C

6.3.2. Általános integrálási szabályok

A differenciálásra vonatkozó (5.7) képletből következik, hogy

$$\int kf\left(x\right)dx = k\int f\left(x\right)dx\,, \qquad \text{ahol } k\in\mathbb{R}\,, \tag{6.9}$$

vagyis integrálásnál a konstans szorzó kiemelhető.

Az (5.8) képletből pedig az

$$\int\left(f\left(x\right)\pm g\left(x\right)\right)dx = \int f\left(x\right)dx \pm \int g\left(x\right)dx \tag{6.10}$$

azonosság következik, vagyis összeg és különbség integrálása tagonként is elvégezhető. Mindkét szabály akkor érvényes, ha a jobboldalakon álló integrálok léteznek.

Felhívjuk a figyelmet, hogy szorzatfüggvényre, hányadosfüggvényre illetve összetett függvényre nincs általános szabály. Semmiképpen nem szabad szorzatot tényezőnként, illetve hányadosnak külön a számlálóját és a nevezőjét integrálni. Ha így tennénk, deriválással ellenőrzést végezve rögtön látni fogjuk, hogy hibáztunk.

Példák:

1. $\int\left(3x^3-4x^2+5x-1\right)dx = 3\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}-x+C\,.$

   Az integrálásnál mindkét fenti szabályt alkalmaztuk.

   Ellenőrzés:
   $$\left(3\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}-x+C\right)' = 3\frac{4x^3}{4}-4\frac{3x^2}{3}+5\frac{2x}{2}-1 = 3x^3-4x^2+5x-1\,.$$

2. $\int(3x-4)\left(4x^2+5\right)dx$

   Szorzat integrálására nincs általános szabály. Itt a szorzatot át tudjuk alakítani a zárójelek felbontásával:
   $$\int(3x-4)\left(4x^2+5\right)dx = \int\left(12x^3-16x^2+15x-4\right)dx = 12\frac{x^4}{4}-16\frac{x^3}{3}+15\frac{x^2}{2}-4x+C.$$
   Az ellenőrzést az olvasóra bízzuk.

3. $\int\frac{x^2-x+2}{x}dx$

   Itt az osztást végezzük el tagonként:
   $$\int\frac{x^2-x+2}{x}dx = \int\left(x-1+\frac{2}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2}-x+2\ln|x|+C\,.$$

4. $\int\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C.$

   A gyököt törtkitevős hatvánnyá alakítottuk integrálás előtt.

6.3.3. Egy speciális alakú szorzat integrálása

Szorzatfüggvény integrálására sajnos nincs általános szabály. Egy speciális esetben azonban nagyon könnyen tudunk integrálni, olyankor, amikor az integrálandó függvény egy összetett függvénynek és a belső függvény deriváltjának a szorzata, vagyis $f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)$ alakú. Az (5.11) azonosságból ugyanis az

$$\int f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx = F\left(g\left(x\right)\right)+C \tag{6.11}$$

azonosság következik.

Bizonyítás:

$$\left(F\left(g\left(x\right)\right)+C\right)' = F'\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right) = f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right).$$

Ilyen függvényeknél tehát nem kell mást tennünk, mint integrálni a külső függvényt a belső függvény mint változó szerint, majd utánaírni az integrációs konstanst.

Példák:

1. $\int 3\cos\left(3x+1\right)dx$

   Az integráljel mögött összetett függvényt találunk, $\cos\left(3x+1\right)$-et. Ennek belső függvénye $3x+1$, aminek deriváltja, 3 szorzótényezőként szerepel az integrálandó függvényben. Alkalmazzuk a (6.11) azonosságot:

   $$\int 3\cos\left(3x+1\right)dx = \sin\left(3x+1\right)+C,$$

   mivel a koszinuszfüggvény integrálja a szinuszfüggvény.

   Ellenőrzés deriválással:

   $$\left(\sin\left(3x+1\right)+C\right)' = 3\cos\left(3x+1\right).$$

2. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

   A képletet célszerűen átalakítjuk:

   $$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int \frac{1}{x^2+1}2xdx = \int\left(x^2+1\right)^{-1}2xdx.$$

   Tehát az $\frac{1}{x^2+1} = \left(x^2+1\right)^{-1}$ függvény az összetett, belső függvénye x^2+1, ennek deriváltja $2x$. Az integrál tehát:

   $$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int\left(x^2+1\right)^{-1}2xdx = \ln\left|x^2+1\right|+C.$$

   Mivel x^2+1 értéke a változó minden lehetséges értékénél pozitív, az abszolútérték jelet el is hagyhatjuk:

   $$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln\left(x^2+1\right)+C.$$

   Az ellenőrzést az olvasóra bízzuk.

3. $\int (5x-3)^{10}\,dx$

   A belső függvény deriváltja, 5 nem szerepel az integrálandó függvényben, de bele tudjuk csempészni, osztunk és szorzunk is vele:

$$\int (5x-3)^{10}\,dx = \frac{1}{5}\int 5(5x-3)^{10}\,dx = \frac{1}{5}\frac{(5x-3)^{11}}{11} + C\,.$$

   Ez utóbbi kis trükköt általánosíthatjuk és új szabályként adhatjuk meg, de tudnunk kell, hogy a szabály csak a (6.11) azonosság speciális esete:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C\,, \tag{6.12}$$

   ahol a és b valós konstansok, továbbá $f(x)$ primitív függvénye $F(x)$.

6.3.4. Parciális integrálás

A következőkben szorzatfüggvények integrálására vonatkozó újabb lehetőséget mutatunk be, amely bizonyos feltételek teljesülése esetén jól alkalmazható.

A szorzatfüggvény deriválására vonatkozó (5.9) összefüggés mindkét oldalát integrálva a következő azonosságot kapjuk:

$$f(x)g(x) + C = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx\,.$$

Átrendezve kapjuk meg belőle a parciális (részleges) integrálás képletét:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx\,. \tag{6.13}$$

Az integrációs konstanst nem szerepeltetjük, hiszen a jobboldal második tagja egy integrál, abba beleértjük. A művelet neve éppen azért parciális integrálás, mert ez az integrál megjelenik az eredményben, tovább kell integrálnunk.

Az eljárás tehát a következő:

A szorzat egyik tényezőjét deriváltnak tekintjük és integrálnunk kell, ezt a tényezőt jelöli $f'(x)$. A másik tényezőt, $g(x)$-et deriváljuk, ez a derivált szerepel a jobboldali második integrálban. Nyilvánvaló, hogy akkor érdemes alkalmazni a módszert, ha egyrészt $f'(x)$-et könnyen tudjuk integrálni, másrészt $f(x)g'(x)$ integrálása egyszerűbb feladat, mint az eredeti szorzaté.

A parciális integrálásra különösen alkalmas szorzattípusok részletes tárgyalásától itt eltekintünk, helyette néhány példát mutatunk be. Az érdeklődő olvasónak ajánljuk Szász Gábor könyvét[1].

Példák:

1. $\int 3x\cos(2x-1)\,dx$

   Legyen

$$f'(x) = \cos(2x-1) \qquad \text{és} \qquad g(x) = 3x\,,$$

ezzel

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x-1) \qquad \text{és} \qquad g'(x)=3\,.$$

$f(x)$ kiszámításánál a (6.12) összefüggést alkalmaztuk.

A függvényeket beírva a (6.13) képletbe a következőt kapjuk:

$$\int 3x\cos(2x-1)\,dx = 3x\frac{1}{2}\sin(2x-1)-\int\frac{3}{2}\sin(2x-1)\,dx\,.$$

A jobboldali integrál könnyen kiszámítható, ismét a (6.12) összefüggést alkalmazzuk. Az eredmény:

$$\int 3x\cos(2x-1)\,dx = \frac{3}{2}x\sin(2x-1)+\frac{3}{4}\cos(2x-1)+C\,.$$

2. $\int e^x \sin x\,dx$

Legyen

$$f'(x)=e^x \qquad \text{és} \qquad g(x)=\sin x\,,$$

ezzel

$$f(x)=e^x \qquad \text{és} \qquad g'(x)=\cos x\,.$$

Beírva őket a parciális integrálás képletébe:

$$\int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx\,. \tag{6.14}$$

Látszólag nem jutottunk előbbre, a jobboldali integrál nem egyszerűbb az eredetinél.

Újra parciálisan integrálunk:

Legyen

$$f'(x)=e^x \qquad \text{és} \qquad g(x)=\cos x\,,$$

ezzel

$$f(x)=e^x \qquad \text{és} \qquad g'(x)=-\sin x\,.$$

Az integrál:

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx\,.$$

Beírjuk az eredményt a (6.14) egyenletbe:

$$\int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x-\left(e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx\right)=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,dx$$

Látható, hogy a kiszámítandó integrál jelent meg a jobboldalon, mégpedig negatív előjellel. Az egyenletet átrendezve megkaphatjuk az értékét:

$$2\int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x-e^x\cos x\,,$$

$$\int e^x\sin x\,dx = \frac{e^x\sin x-e^x\cos x}{2}+C.$$

Az integrációs konstanst itt is csak a végén adtuk hozzá a jobboldalhoz.

3. A 6.2. táblázatban nem szerepel az $\ln x$ függvény határozatlan integrálja, pedig elvárnánk. Számítsuk ki!

   A függvény maga nem szorzat, de szorzattá alakíthatjuk integrálás előtt:

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \ln x \, dx .$$

   A szorzatot parciálisan integráljuk. Az $f'(x) = \ln x$ nem lenne jó választás, hiszen éppen $\ln x$ integrálása a feladatunk.

   Legyen tehát

$$f'(x) = 1 \qquad \text{és} \qquad g(x) = \ln x ,$$

   ezzel

$$f(x) = x \qquad \text{és} \qquad g'(x) = \frac{1}{x} .$$

   Az integrál:

$$\int 1 \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C .$$

6.3.5. Integrálás helyettesítéssel

Gyakran alkalmazott eljárás a helyettesítéssel történő integrálás, rövidebben helyettesítéses integrálás, amit egy példán mutatunk be. A feladat az

$$\int x \sin\left(x^2 - 1\right) dx$$

integrál kiszámítása.

Az integrálandó függvényt könnyebben integrálhatóvá alakíthatjuk, ha alkalmazzuk a

$$t(x) = x^2 - 1$$

helyettesítést:

$$\int x \sin t dx .$$

A képlet így még használhatatlan, hiszen két változója van, *x* és *t*, valamint még mindig *x* szerinti integrálást írunk elő a *dx* szimbólummal.

A két problémát egyszerre oldja meg a következő eljárás:

Deriváljuk $t(x)$-et *x* szerint:

$$\frac{dt}{dx} = 2x ,$$

a baloldali jelölést formailag törtnek tekintjük és kifejezzük az egyenletből *dx*-et:

$$dx = \frac{1}{2x} dt ,$$

majd az eredményt behelyettesítjük az integrálandó függvényben *dx* helyére:

$$\int x \sin t \frac{dt}{2x} = \int \frac{x}{2x} \sin t dt = \int \frac{1}{2} \sin t dt.$$

Mint látható, x-szel tudtunk egyszerűsíteni, az integrálást most már könnyen el tudjuk végezni:

$$\int \frac{1}{2}\sin t dt = -\frac{1}{2}\cos t + C.$$

(Mindenképpen szükséges x kiesése ahhoz, hogy integrálni tudjunk. Hogy kiesik-e vagy sem, az az integrálandó függvény és a helyettesítés képletétől függ, emiatt a módszer csak korlátozottan alkalmazható.)

Már csak annyi a feladatunk, hogy t helyére beírjuk a képletét:

$$-\frac{1}{2}\cos t + C = -\frac{1}{2}\cos\left(x^2-1\right) + C,$$

vagyis

$$\int x\sin\left(x^2-1\right)dx = -\frac{1}{2}\cos\left(x^2-1\right) + C.$$

Az eljárás lépései tehát:

- x alkalmasan választott függvényének helyettesítése egy új változóval (ennek jelölésére a t terjedt el, az x-től való függést általában nem jelöljük);
- t deriválása x szerint;
- dx kifejezése a deriváltból;
- a dx-re kapott kifejezés behelyettesítése az integrálandó függvénybe;
- az integrálás elvégzése;
- a helyettesített kifejezés visszaírása az integrálba t helyére.

A lépések száma talán nagynak tűnik, de némi gyakorlattal nem jelent problémát az eljárás végrehajtása. A kritikus lépés mindenképpen a megfelelő $t(x)$ függvény megtalálása. A sikeres integrálás feltétele az, hogy az x változó integrálás előtt tűnjön el a függvény képletéből.

Megjegyezzük, hogy az eljárásban a $\frac{dt}{dx}$ kifejezés törtként való kezelése vitathatónak tűnik, de korrekt indoklása több helyen megtalálható, például Szász Gábor könyvében is[1].

A (6.11) képletnek megfelelő feladatok mindig megoldhatók helyettesítéses integrálással, ha a belső függvényt helyettesítjük t-vel. Ennek oka az, hogy a belső függvény deriváltja szorzótényezőként szerepel az integrálandó függvényben. Arra, hogy más esetekben is használható az eljárás, bemutatunk egy példát:

> A feladat az $\int\left(1+e^x\right)^2 dx$ integrálás elvégzése.
>
> Akár a
>
> $$t = e^x,$$
>
> akár a
>
> $$t = 1 + e^x$$
>
> helyettesítés célszerű lehet. Válasszuk most az utóbbit, az eljárás így érdekesebb.

Ezzel

$$\frac{dt}{dx} = e^x ,$$

$$dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t-1} ,$$

mivel a helyettesítés miatt

$$e^x = t-1 .$$

Elvégezzük a behelyettesítéseket:

$$\int \left(1+e^x\right)^2 dx = \int t^2 \frac{1}{t-1} dt = \int \frac{t^2}{t-1} dt .$$

Az integrálandó függvény racionális törtfüggvény. A számláló fokszáma nagyobb, mint a nevezőé, ezért polinomosztást végzünk a 3.4.7. fejezetben leírt módon.

Elvégzendő tehát a

$$t^2 : \left(t-1\right)$$

osztás.

A művelet a lépések magyarázata nélkül a következő:

$$\begin{array}{l}
t^2 : \left(t-1\right) = t+1 \\
\underline{t^2 - t} \\
\quad\ t \\
\quad\ \underline{t-1} \\
\qquad 1
\end{array}$$

A maradék 1, az eredmény tehát a következő:

$$\frac{t^2}{t-1} = t+1+\frac{1}{t-1} ,$$

ezzel az integrálás:

$$\int \frac{t^2}{t-1} dt = \int \left(t+1+\frac{1}{t-1} \right) dt = \frac{t^2}{2} + t + \ln\left|t-1\right| + C_1 .$$

(Az $\dfrac{1}{t-1}$ tag integrálását a 6.3.3. fejezet (2) példájában leírt módszerrel végeztük el.)

Az eredménybe visszahelyettesítjük t értékét:

$$\int \left(1+e^x\right)^2 dx = \frac{\left(e^x+1\right)^2}{2} + e^x + 1 + \ln\left|e^x\right| = \frac{e^{2x}}{2} + 2e^x + \frac{3}{2} + x + C_1 = \frac{e^{2x}}{2} + 2e^x + x + C,$$

ahol

$$C = C_1 + \frac{3}{2} ,$$

vagyis a határozatlan integrálokban a konstansok összevonhatók.

Látható, hogy az integrálás sokszor nem egyszerű feladat. Könnyen tudunk olyan függvényeket konstruálni, amelyeknek integrálását nem tudjuk elvégezni. Vannak olyan függvények, melyeknek nincs is primitív függvényük. Bizonyítható például, hogy az

$$f(x) = e^{-x^2}$$

függvénynek nem létezik primitív függvénye. Az ilyen görbék alatti terület közelítő kiszámításáról a 6.4.1. fejezetben szólunk.

6.4. Az integrálszámítás alkalmazásai

6.4.1. Területszámítás

Miután már képesek vagyunk meghatározni egyszerűbb függvények primitív függvényeit, visszatérünk a függvénygörbék alatti területek meghatározásához.

A számításokat a 6.1. tétel, a Newton-Leibniz tétel alapján fogjuk elvégezni. A 6.1. fejezetben a határozott integrál definícióját felhasználva kiszámítottuk az $f(x) = x^2$ függvény görbéje alatti területet a $[0;2]$ intervallumon, eredményül $\frac{8}{3}$-ot kaptunk.

Számítsuk ki újra a területet!

Az első lépés a feladat megfogalmazása, a határozott integrál felírása. A feladat tehát az

$$A = \int_0^2 x^2 dx$$

határozott integrál kiszámítása. A második lépés a primitív függvény meghatározása. Mivel a későbbiekben a primitív függvény helyettesítési értékeire is szükségünk lesz, ezt egy szögletes zárójellel jelöljük a következő módon:

$$A = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} + C \right]_0^2 .$$

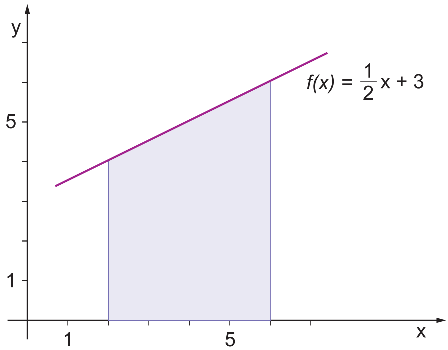
Következik a primitív függvény helyettesítési értékének kiszámítása a felső és az alsó határon, majd az utóbbi kivonása az előbbiből:

$$A = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} + C \right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} + C \right) - \left(\frac{0^3}{3} + C \right) = \frac{2^3}{3} + C - \frac{0^3}{3} - C = \frac{8}{3}$$

Eredményünk egyezik a korábbival, viszont sokkal kevesebb munkával jutottunk hozzá. Láthatjuk, hogy az integrációs konstans a számolás végén pozitív és negatív előjellel is szerepel, tehát kiesik. Ez a tételből adódóan mindig így van, emiatt határozott integrálásnál a konstanst nem tüntetjük fel.

Példák:

1. Számítsuk ki az $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x+3$ függvény görbéje alatti területet a $\left[2;6\right]$ intervallumon (6.11. ábra)!



6.11. ábra Az $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x+3$ függvény görbéje alatti terület kiszámítása

Látjuk, hogy a kérdéses síkidom egy trapéz, melynek párhuzamos oldalai, vagyis alapjai függőlegesek. Magassága 4, alapjainak hossza 4 és 6, így területe a geometriából ismert képlet alapján:

$$A=\frac{\left(a+c\right)}{2}m=\frac{\left(4+6\right)}{2}4=20\,,$$

ahol a és c az alapok hossza, m a magasság.

A terület meghatározása integrálással:

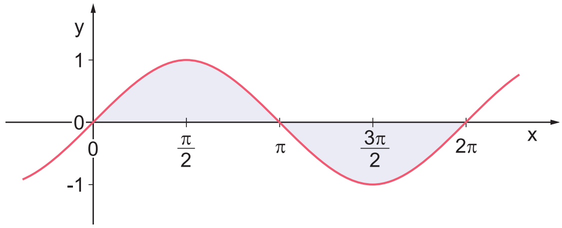
$$A=\int_2^6\left(\frac{1}{2}x+3\right)dx=\left[\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+3x\right]_2^6=\left(\frac{6^2}{4}+3\cdot 6\right)-\left(\frac{2^2}{4}+3\cdot 2\right)=27-7=20\,,$$

az eredmények megegyeznek.

2. Számítsuk ki az $f\left(x\right)=\sin x$ függvény görbéje alatti területet a $\left[0;2\pi\right]$ intervallumon (6.12. ábra)!

Ha nem figyelünk és mechanikusan alkalmazzuk a területszámítás képletét, akkor a következőt kapjuk:

$$A=\int_0^{2\pi}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{2\pi}=\left(-\cos 2\pi\right)-\left(-\cos 0\right)=\left(-1\right)-\left(-1\right)=-1+1=0.$$



6.12. ábra A szinuszfüggvény görbéje alatti terület kiszámítása

A 6.11. ábrán látjuk, hogy a terület nagysága nem nulla, a kapott eredmény rossz. A problémát az okozza, hogy a $[0;\pi]$ intervallumon az integrál pozitív, míg a $[\pi;2\pi]$ intervallumon negatív a (6.2) összefüggés értelmében. A két intervallumon az integrálok abszolútértéke megegyezik, ezért kaptuk a nulla eredményt.

A megoldás a következő: kiszámítjuk a területet a $[0;\pi]$ intervallumon és az eredményt megszorozzuk kettővel.

$$A_1 = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = (-(-1)) - (-1) = 1 + 1 = 2.$$

A terület nagysága tehát

$$A = 2A_1 = 4.$$

Ennek a kis feladatnak több tanulsága is van.

A fentiek szerint területszámítás előtt érdemes a függvény grafikonját felvázolni. Ha az x tengely alatt is vannak területrészek, akkor a kiszámítandó területet részekre osztjuk úgy, hogy a zérushelyeket is integrálási határok lesznek. A részintervallumokon külön-külön integrálunk, a negatív területek ellentettjét vesszük, majd a részterületeket összeadjuk.

Érdekes talán az is, hogy akár egy transzcendens függvény görbéje alatti terület is lehet egész szám.

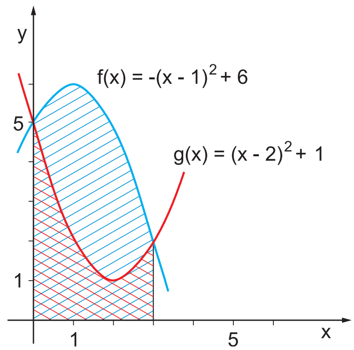
Fontos észrevétel, hogy az előjelekre és a részeredményekre a számítások során nagyon gondosan kell ügyelni, mert könnyen hibázhatunk.

Természetesen bonyolultabb területeket is meghatározhatunk integrálszámítással úgy, hogy alkalmas módon részekre osztjuk illetve kiegészítjük a síkidomokat úgy, hogy mindegyik összetevő területe valamilyen görbe alatti terület legyen.

Itt csak egy ilyen jellegű példát mutatunk be.

Példa:

Számítsuk ki az $f(x) = -(x-1)^2 + 6$ és a $g(x) = (x-2)^2 + 1$ függvények görbéi által körbezárt síkidom területét!



6.13. ábra Görbék által körbezárt terület kiszámítása

Az előbbi példáknál is szemléletesek az ábrák, ilyen jellegű feladatoknál pedig szinte nélkülözhetetlenek. A két görbe függvénytranszformációval könnyen ábrázolható (6.13. ábra).

Az ábráról a metszéspontok vízszintes koordinátái, amelyek az integrálási intervallum határai lesznek, leolvashatóak. Ki is számíthatjuk őket úgy, hogy a két függvényt egyenlővé tesszük és a kapott egyenletet megoldjuk. Itt a megoldandó egyenlet másodfokú:

$$-(x-1)^2+6=(x-2)^2-1,$$

gyökei nulla és 3.

Az $f(x)$ függvény görbéje határolja felülről a kérdéses területet, a görbéje alatti területet függőleges vonalazás mutatja. A $g(x)$ függvény görbéje alulról határol, a görbe alatti területet vízszintes vonalazás mutatja. Látható, hogy a körbezárt terület a két görbe alatti terület különbsége:

$$A=\int_0^3\left(-(x-1)^2+6\right)dx-\int_0^3\left((x-2)^2+1\right)dx.$$

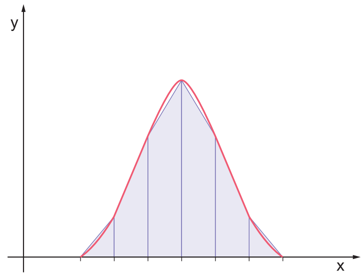
A négyzetreemeléseket és a lehetséges összevonásokat elvégezve a következőt kapjuk:

$$A=\int_0^3\left(-x^2+2x+5\right)dx-\int_0^3\left(x^2-4x+5\right)dx.$$

Az integrálásokat elvégezhetjük külön-külön is, de a határozott integrál tulajdonságaiból következően (6.1. fejezet) össze is vonhatjuk őket. Jelen esetben ezt tesszük, a számolás egyszerűbb lesz. Az eredmény:

$$A=\int_0^3\left(-2x^2+6x\right)dx=\left[-2\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}\right]_0^3=\left(-2\frac{3^3}{3}+6\frac{3^2}{2}\right)=9\,.$$

Az alsó határon, a nulla helyen a primitív függvény helyettesítési értéke nulla, ezt nem tüntettük fel.



6.14. ábra A numerikus integrálás elve

Az analitikában, különböző komponensek koncentrációinak meghatározásánál gyakran kapunk a 6.14. ábrán bemutatotthoz hasonló görbéket. Fontos jellemzőjük, hogy az alattuk lévő terület arányos a komponens koncentrációjával, ezért meg kell határoznunk a görbe alatti területet.

A görbék egyenlete nem ismert, pontjaik mérési adatokból származnak. Emiatt az általunk eddig követett eljárástól el kell tekintenünk. A mérési adatokból viszont kellő sűrűséggel ismerjük a görbe pontjainak koordinátáit. A terület kiszámításánál a 6.1. fejezet példájában leírt eljáráshoz hasonlót követünk.

Felosztjuk a kérdéses intervallumot megfelelő számú egyenlő részre. Minden részintervallum elején és végén ismerjük a függvényértéket. A területet közelíthetnénk téglalapokkal is, de láthatóan sokkal kisebb az eredmény hibája, ha a 6.14. ábrán bemutatott módon trapézok területét számítjuk ki és összegezzük. Kimutatható, hogy az analitikában megszokott görbék esetében 1 százaléknál kisebb relatív hibával számíthatjuk ki a görbék alatti területeket, ha az intervallumot legalább 20-30 egyenlő részre osztjuk fel.

Az itt vázlatosan leírt eljárás a *numerikus integrálás*. Nagyon jól algoritmizálható, ezért számítógépes programokkal az integrál könnyen és gyorsan meghatározható.

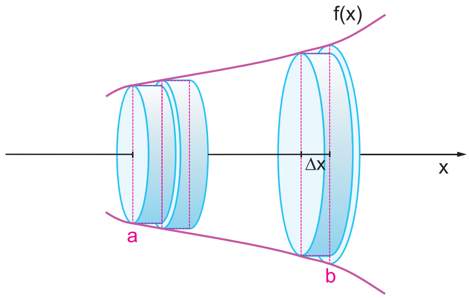
6.4.2. Forgástestek térfogata

Az alapfeladat a következő: adott a folytonos $f(x)$ függvény görbéje az $[a;b]$ intervallumon. A görbe az adott intervallumon legyen korlátos! Forgassuk meg a görbét az x tengely körül, és számítsuk ki az így kapott forgástest térfogatát (6.15. ábra)!

Induljunk el a 6.1. fejezetben leírthoz hasonló módon! Részekre osztjuk az $[a;b]$ intervallumot. Egy-egy részintervallumon állandónak tekintjük a függvényértéket és azzal szerkesztünk téglalapot. Az egyszerűség kedvéért most minden részintervallumon a minimális függvényértéket vesszük. A téglalapok megforgatásával egyenes körhengereket kapunk. Az i-edik henger magassága az i-edik részintervallum hossza, Δx_i, sugara pedig a minimális függvényérték, m_i az adott részintervallumon. Ennek a hengernek a térfogata:

$$V_i = m_i^2 \pi \Delta x_i ,$$

mivel a henger térfogatának képlete: $V = r^2 \pi m$.



6.15. ábra Ábra forgástest térfogatának kiszámításához

Ha a részintervallumok száma n, akkor a forgástest térfogata közelítőleg:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} m_i^2 \pi \Delta x_i \ .$$

Ebből határátmenet képzésével a 6.1. fejezetben ismertetett módon a

$$V = \int_a^b \left(f\left(x\right)\right)^2 \pi dx = \pi \int_a^b f^2\left(x\right) dx \qquad (6.15)$$

képlet adódik a forgástest pontos térfogatára.

Példa:

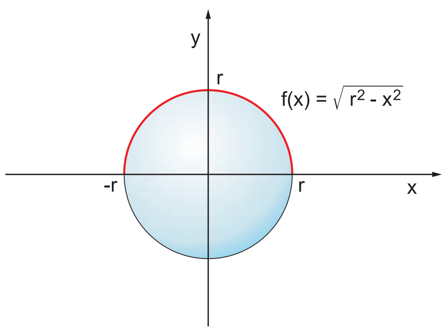
Számítsuk ki az r sugarú gömb térfogatát!

A megoldáshoz helyezzük el az r sugarú kör pozitív félkörét a koordináta-rendszerben, középpontjával az origóban (6.16. ábra)!

A félkör egyenlete:

$$f\left(x\right) = \sqrt{r^2 - x^2} \ ,$$

az integrálási intervallum a $\left[-r; r\right]$.



6.16. ábra Ábra a gömb térfogatának kiszámításához

Az adatokat behelyettesítjük a (6.15) képletbe és kiszámítjuk a térfogatot:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2 \right) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} =$$

$$= \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \pi \left(-r^3 + \frac{r^3}{3} \right) = \pi 2 r^3 - \pi 2 \frac{r^3}{3} = \frac{4 r^3 \pi}{3},$$

ahogyan azt a középiskolából ismerjük. Megjegyezzük, hogy a félkör középpontját nem feltétlenül kellett volna az origóra illeszteni, bárhol lehetne a vízszintes tengelyen, de a számítások elvégzése így a legegyszerűbb.

Megemlítjük még, hogy határozott integrállal kiszámíthatjuk például görbe ívhosszát, forgástest palástjának területét is, de a számításokkal itt nem foglalkozunk.

6.4.3. Munka kiszámítása

A fizikában, illetve általában a természettudományokban nagyon elterjedt az integrálszámítás alkalmazása. Mi most egyetlen kiragadott kérdést tárgyalunk, mégpedig azt, hogy hogyan tudjuk kiszámítani egy dugattyúval lezárt ideális gáz munkáját, ha a gáz állandó hőmérsékleten tágul. A problémával fizikai kémiai tanulmányaink során fogunk találkozni.

Tekintsük a 6.17. ábrát!

A gáz térfogata a folyamat elején V_1, nyomása p_1. Hőmérséklete állandó, jele T, a dugattyú felülete, egyben a henger keresztmetszete A!

A középiskolából tudjuk, hogy a munka, W nagyságát

$$W = Fs$$

képlettel tudjuk kiszámítani, ha az erő, F iránya megegyezik az elmozdulás, s irányával, és az erő állandó.

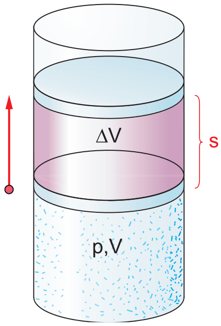
A gáz

$$F = p_1 A$$

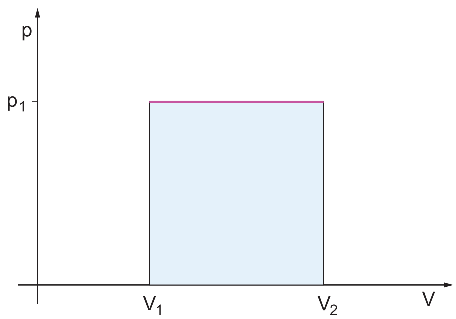
erővel hat a dugattyúra, tehát a

$$W = p_1 A s$$

képlettel számíthatnánk ki a munkát állandó nyomás mellett.



6.17. ábra Táguló gáz munkája



6.18. ábra Táguló gáz munkája állandó nyomáson

Az As szorzat az ábráról leolvashatóan éppen a térfogatváltozás nagyságát adja, tehát

$$W = p_1 \Delta V \,.$$

A 6.18. ábrán látható, hogy ha a gáz állandó nyomáson tágulna, akkor a munka nagysága éppen a p-V görbe alatti téglalap területe lenne a $[V_1;V_2]$ intervallumon.

A feladat szerint azonban a gáznak nem a nyomása, hanem a hőmérséklete állandó. Ilyenkor az állapotváltozásra a Boyle-Mariotte törvény érvényes:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \,,$$

másképpen

$$pV = \textit{állandó} \,.$$

Legyen most az állandó értéke $p_1 V_1$, vagyis írjuk a törvényt

$$pV = p_1 V_1$$

alakba!

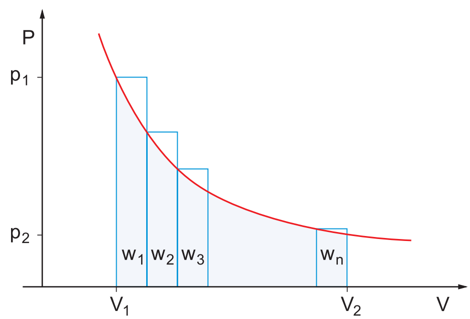
Átrendezéssel megadhatjuk a nyomás térfogattól való függését:

$$p(V) = p_1 V_1 \frac{1}{V}. \tag{6.16}$$

Ha a nyomást a térfogat függvényében ábrázoljuk, akkor a 6.19. ábrát kapjuk.

A munka kiszámítását a már ismert módon kezdjük. Felosztjuk a $[V_1;V_2]$ intervallumot n részre.

Egy-egy részintervallumon a nyomást állandónak tekintjük (mondjuk a maximális értéket vesszük mindenhol, ezt P_i-vel jelöljük), és összegezzük a részintervallumokon elvégzett munkákat:



6.19. ábra Táguló gáz munkája állandó hőmérsékleten

$$W \approx \sum_i W_i = \sum_i P_i \Delta V_i \,.$$

Határátmenetet képezve integrált kapunk:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\, dV \,.$$

A kapott képlet általánosan érvényes, nem csak állandó hőmérsékleten. Mi most behelyettesítjük a nyomás (6.16) képletét és kiszámítjuk az integrált:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p_1 V_1 \frac{1}{V} dV = p_1 V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = p_1 V_1 [\ln V]_{V_1}^{V_2} = p_1 V_1 (\ln V_2 - \ln V_1) = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

A munka itt is éppen a függvénygörbe alatti terület, ami a folyamatok p-V diagramon történő ábrázolásának nagy előnye.

Feladatok:

1. Integrálja a következő függvényeket!

a) $f(x) = 12$ *b)* $f(x) = 5x$

c) $f(x)=3x^2-8x+2$

d) $f(x)=2-x+x^4-6x^6$

e) $f(x)=5\sin x-3\cos x$

f) $f(x)=e^x-3x-3$

g) $f(x)=\sqrt{x}$

h) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

2. Integrálja a következő függvényeket!

a) $f(x)=x(x-2)$

b) $f(x)=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)$

c) $f(x)=\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)$

d) $f(x)=(3x-3)\left(x^2-2x+4\right)$

e) $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$

f) $f(x)=\dfrac{x^2-x-3}{x}$

3. Integrálja a következő függvényeket!

a) $f(x)=3\sin 3x$

b) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$

c) $f(x)=2\sqrt{2x-6}$

d) $f(x)=\cos(5x-1)$

e) $f(x)=e^{1-x}$

f) $f(x)=(5x-1)^{12}$

4. Integrálja a következő függvényeket!

a) $f(x)=3x\sin x$

b) $f(x)=x^2\cos x$

c) $f(x)=xe^x$

d) $f(x)=3e^x\sin x$

5. Számítsa ki az $f(x)=x^2$ függvény görbéje alatti területet az $[1;4]$ intervallumon!
6. Számítsa ki az $f(x)=x^2+x-1$ függvény görbéje alatti területet a $[2;5]$ intervallumon!
7. Számítsa ki az $f(x)=2e^x$ függvény görbéje alatti területet a $[0;1]$ intervallumon!
8. Számítsa ki az $f(x)=x^2$ és a $g(x)=2x$ függvények által körbezárt területet!
9. Megforgatjuk az $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1$ egyenletű egyenesnek a $[2;6]$ intervallumra eső szakaszát az x tengely körül, így egy csonkakúpot kapunk. Számítsuk ki a csonkakúp térfogatát!

7. Differenciálegyenletek

7.1. Definíciók

A tananyag nem lenne teljes, ha nem érintenénk a differenciálegyenletek témakörét.

A fizikában, a kémiában, a műszaki tudományokban, de akár a gazdasági életben vagy a meteorológiában is a feladatok megoldása során sokszor kell olyan egyenleteket felállítani és megoldani, amelyekben egy ismeretlen függvény és különböző rendű deriváltjai szerepelnek változók és konstansok mellett. A megoldást ilyen esetekben a függvény meghatározása jelenti. Azért találkozunk gyakran ilyen egyenletekkel, mert általában sokkal könnyebb összefüggést találni a függvényérték megváltozása és a változók elhanyagolhatóan kicsi mértékű megváltozása között, mint felírni a tényleges függvényt.

Differenciálegyenlettel írhatjuk le például egy populáció létszámának növekedését:

$$\frac{dN}{dt} = kN,$$

vagy másképp

$$N' = kN,$$

ahol N a populáció létszáma, t az idő, k arányossági tényező. Az egyenlet azt fejezi ki, hogy a létszám növekedése arányos magával a létszámmal. Ez nagyon egyszerű összefüggés, ritkán igaz önmagában. A létszám biztosan nem nőhet a végtelenig például a táplálék korlátozott volta miatt. A korlátozó feltételeket megadhatjuk úgy, hogy k értékét is az idő függvényének tekintjük, vagy további tagokkal bővíthetjük az egyenletet.

Newton második törvénye szerint

$$F = ma,$$

ahol F egy testre ható erő, m a test tömege, a a gyorsulása.

Tudjuk, hogy a gyorsulás az elmozdulás idő szerinti második deriváltja (5.8.2. fejezet):

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = x''.$$

Ha a testet rugó mozgatja, akkor a rá ható erő arányos az egyensúlyi helyzettől való távolsággal, vagyis a kitéréssel:

$$F = -Dx.$$

A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a kitérés és az erő ellentéte irányúak.

Behelyettesítések révén a

$$-Dx = mx''$$

egyenletet kapjuk, ami szintén differenciálegyenlet, hiszen második derivált szerepel benne.

A differenciálegyenletek definíciója a következő:

7.1. definíció: Differenciálegyenleten olyan egyenletet értünk, melyben a meghatározandó ismeretlen egy függvény, szerepelnek benne az ismeretlen függvény különböző deriváltjai, esetleg további függvények is.

A definíciónak megfelelően a függvény maga is szerepelhet a differenciálegyenletben, mint nulladrendű derivált, de legalább egy minimum elsőrendű deriváltnak szerepelnie *kell* benne.

A differenciálegyenletek megoldására általános módszer sajnos nincs. Ha meg tudjuk egyáltalán oldani őket, az alkalmazott módszer csak bizonyos típusú egyenletek megoldására használható, emiatt a differenciálegyenletek osztályozása alapvető fontosságú. Az osztályozás a legkülönbözőbb szempontok szerint történhet.

7.2. definíció: Ha az ismeretlen függvény egyváltozós, akkor közönséges differenciálegyenletről beszélünk, ha többváltozós, akkor parciális differenciálegyenletről.

7.3. definíció: Egy differenciálegyenletet n-edrendűnek nevezünk, ha az ismeretlen függvény benne szereplő legmagasabbrendű deriváltja n-edrendű.

Nagyon sok osztályozás a megoldási módszerek alapján történik. A differenciálegyenletek irodalma és problémaköre annyira szerteágazó, hogy mi meg sem kíséreljük még az áttekintést sem, csupán egy kis ízelítőt adunk, bemutatjuk az egyik legegyszerűbb, a gyakorlatban sokszor előforduló egyenlettípus megoldási módszerét.

Mielőtt azonban erre rátérnénk, ismerkedjünk meg néhány további definícióval!

Tekintsük az

$$yy' = 9x \tag{7.1}$$

differenciálegyenletet! (A felírásban rögtön látjuk az egyik egyezményes jelölést, miszerint az ismeretlen függvényt általában y-nal jelöljük, de elhagyjuk az x-től való függés $y(x)$ jelölését.)

Behelyettesítéssel rögtön látjuk, hogy az

$$y = 3x \tag{7.2}$$

függvény megoldása az egyenletnek:

$$y' = 3,$$

$$yy' = 3x \cdot 3 = 9x.$$

Ha azonban az

$$y=\sqrt{9x^2+C} \tag{7.3}$$

függvényt helyettesítjük be, akkor azt is látjuk, hogy ez is megoldás:

$$y'=18x\frac{1}{2\sqrt{9x^2+C}},$$

$$yy'=\sqrt{9x^2+C}\cdot 18x\frac{1}{2\sqrt{9x^2+C}}=\frac{18x}{2}=9x\cdot$$

Mint majd látni fogjuk, a differenciálegyenletek megoldása során mindig kell integrálnunk. Ez természetes, hiszen a deriváltból integrálással kapjuk meg magát a függvényt. A (7.3) megoldásban szerepel az integrációs konstans, az ilyen típusú megoldást *általános megoldás*nak nevezzük. (Az $y=-\sqrt{9x^2+C}$ függvény is kielégíti a (7.1) egyenletet, az egyértelmű hozzárendelés követelménye miatt választottuk a pozitív értéket megoldásként.)

A (7.2) megoldást az általános megoldásból úgy kaphatjuk meg, hogy a konstans helyére nullát helyettesítünk be. Az ilyen típusú megoldás, amelyben tehát a konstans meghatározott értéket vesz fel, a *partikuláris megoldás*. A partikuláris megoldást mindig az általánosból kapjuk meg úgy, hogy előírunk valamilyen feltételt a változók értékeire. Az előbbi partikuláris megoldást úgy kaphatjuk meg, hogy előírjuk például az $y(0)=0$ feltételt (vagyis *y* értéke legyen nulla, ha *x* értéke nulla).

Ezeket behelyettesítjük az általános megoldás egyenletébe:

$$0=\sqrt{0+C},$$

majd kifejezzük *C*-t.

Az adott változóértékhez adott függvényértéket előíró feltételt *kezdeti feltétel*nek nevezzük (régebben nevezték peremfeltételnek is).

Van még egy megoldástípus, ami az előző kettőből nem kapható meg, és általában érdektelen. A (7.1) egyenletnek ilyen megoldása nincs, de például az

$$y'=y$$

egyenletnek megoldása az

$$y=0$$

függvény, ami az általános

$$y=Ce^x$$

megoldásból nem kapható meg.

Az ilyen típusú megoldást *szinguláris*nak nevezzük.

7.2. Szétválasztható változójú elsőrendű közönséges differenciálegyenletek megoldása

A továbbiakban csupán a címben említett típusú egyenletek megoldásával foglalkozunk. Hallgatóink a későbbiekben ilyen differenciálegyenletekkel találkoznak, hasznos, ha ismerik a megoldásuk módszerét.

Közös jellemzőjük, hogy

$$g(y)\,y' = f(x)$$

alakra hozhatóak.

A megoldás elvi menete:

Mindkét oldalt integráljuk x szerint:

$$\int g(y)\,y'dx = \int f(x)\,dx. \tag{7.4}$$

A baloldalt úgy tekintjük, mintha helyettesítéssel integrálnánk, az

$$y = y(x)$$

helyettesítést alkalmazva.

Így

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

$$dx = \frac{dy}{y'}\cdot$$

Ezt behelyettesítve a (7.4) egyenletbe az

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$

egyszerű összefüggés adódik.

Mindkét oldalt integráljuk a változója szerint, az integrálások elvégzése után a

$$G(y) + C_1 = F(x) + C_2$$

egyenletet kapjuk, ahol $G(y)$ és $F(x)$ primitív függvények. C_1 mindig átvihető a jobboldalra:

$$G(y) = F(x) + C_2 - C_1 = F(x) + C,$$

mivel konstansok különbsége konstans. Elegendő tehát az integrálások elvégzése során a jobboldalon egyetlen integrációs konstanst feltüntetni.

A fenti eljárást a gyakorlatban a következőképpen hajtjuk végre:

– Alkalmazzuk az

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

átjelölést.

– Szétválasztjuk a változókat. A fenti kifejezést törtként kezelve dy-t szorzótényezőként arra az oldalra visszük, ahol csak y szerepel, mint változó (ez általában a baloldal), dx-et szorzóként arra az oldalra, ahol x szerepel (ez általában a jobboldal).

– Mindkét oldal elejére kitesszük a határozatlan integrál jelét, majd integrálunk a megfelelő változó szerint.

– A megoldásból kifejezzük y-t. Ha ez nem lehetséges, akkor a függvényt implicit alakban hagyjuk.

– Amennyiben tartozik kezdeti feltétel a feladathoz, akkor meghatározzuk az integrációs konstans aktuális értékét és megadjuk a partikuláris megoldást is.

Példa:

1. Oldjuk meg az

$$y + xy' = 0$$

differenciálegyenletet az $y(1) = 1$ kezdeti feltétel mellett!

Először az általános megoldást keressük meg.

Alkalmazzuk az

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

átjelölést:

$$y + x\frac{dy}{dx} = 0\,.$$

Szétválasztjuk a változókat:

$$x\frac{dy}{dx} = -y\,,$$

$$\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx\,.$$

Beírjuk az integráljeleket:

$$\int \frac{1}{y}dy = \int -\frac{1}{x}dx$$

és integrálunk:

$$\ln|y| = -\ln|x| + C_1\,, \qquad (C_1 \in \mathbb{R})\,.$$

Átalakítjuk a kapott kifejezést:

$$\ln|y| + \ln|x| = C_1\,,$$

$$\ln(|y||x|) = C_1\,,$$

$$e^{\ln(|y||x|)} = e^{C_1}\,,$$

$$|y||x| = e^{C_1} = C_2\,, \qquad (C_2 > 0)$$

$$|y| = \frac{C_2}{|x|}\,.$$

Ebből vagy az

$$y = \frac{C_2}{x},$$

vagy az

$$y = -\frac{C_2}{x}$$

megoldás adódik. A kettő egyesíthető az

$$y = \frac{C}{x}, \qquad (C \in \mathbb{R} \setminus 0)$$

függvényben. Ez az általános megoldás, ami behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhető:

$$y' = -\frac{C}{x^2},$$

$$y + xy' = \frac{C}{x} + x\left(-\frac{C}{x^2}\right) = \frac{C}{x} - \frac{C}{x} = 0 \cdot$$

A partikuláris megoldás megkereséséhez behelyettesítjük az $y = 1$ és az $x = 1$ értékeket a megoldásba és kifejezzük *C*-t:

$$1 = \frac{C}{1},$$

$$C = 1.$$

A kezdeti feltételnek megfelelő partikuláris megoldás tehát:

$$y = \frac{1}{x} \cdot$$

Ha a feladatba az $x = 0$ értéket behelyettesítjük (ami az általános megoldás értelmezési tartományába nem tartozik bele), akkor az

$$y + 0y' = 0$$

összefüggést, ezzel az

$$y = 0$$

szinguláris megoldást kapjuk. Ez a szinguláris megoldás azonban *x* értékétől függetlenül is megoldása az egyenletnek.

Megjegyzés: a konstansokkal a megoldás során viszonylag szabadon bántunk, mindig a céljainknak megfelelő alakban adtuk meg őket. Ez általában is jellemző a differenciálegyenletek megoldására.

Végül egy olyan egyenlet levezetését mutatjuk be, amely mind a képalkotó, mind a laboratóriumi analitikus szakmában alapvető jelentőségű.

Ha egy elektromágneses sugárzás képes behatolni egy közegbe, akkor abban a megtett útjától és a közeg anyagi minőségétől függő mértékben elnyelődik.

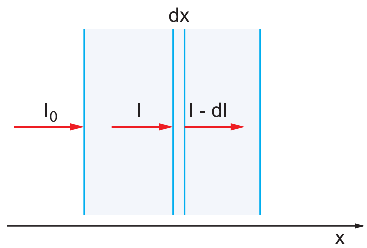
A képalkotó diagnosztikában a röntgensugarak egy részének az emberi testben történő elnyelődése után a meggyengült röntgensugarak a testből való kilépés után alkotnak értékelhető képet fényérzékeny lemezen, vagy detektor segítségével.

A laboratóriumi diagnosztikában oldatokon áthaladó, meghatározott hullámhosszúságú fénysugár intenzitásának változását detektáljuk, a változásból az oldat koncentrációját tudjuk kiszámítani.

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a fény szót fogjuk használni.

Feladatunk tehát az, hogy megvizsgáljuk, hogy hogyan függ a fény intenzitása a közegben megtett útjának hosszától.

Vegyünk egy párhuzamos síkokkal határolt, megfelelően vastag közeget, melynek határára I_0 intenzitású fénysugár érkezik és belép (7.1. ábra)!



7.1. ábra Fénysugár gyengülése átlátszó közegben

Jelöljünk ki a közeg belsejében egy *dx* vékonyságú réteget, melybe *I* intenzitású fénysugár lép be!

A fénysugár intenzitásának megváltozása, *dI* nyilvánvaló módon arányos *I*-vel (ha mondjuk 200 fotonból 10 nyelődik el, akkor másik 200-ból is, így 400 fotonból már 20), és a megtett úttal, *dx*-szel. Mivel *x* növekedésével *I* csökken, kell egy negatív előjel is az arányosságba:

$$dI \approx -Idx\,.$$

Ahhoz, hogy az arányosságból egyenlőség legyen, szükségünk lesz egy arányossági tényezőre. Ez alapvetően függ a fény hullámhosszától és a közeg anyagi minőségétől egyaránt, jelöljük μ-vel. Ezzel fel is állítottuk kis differenciálegyenletünket. (Itt utalunk vissza a 7.1. fejezet egyik állítására, miszerint sokkal könnyebb egyenletet felírni egy mennyiség megváltozására vonatkozóan, mint magát a függvényt megalkotni.)

A megoldandó differenciálegyenlet tehát:

$$dI = -\mu Idx\,,$$

keressük az $I = I(x)$ függvényt.

A megoldás menete a példáéval megegyező:

Szétválasztjuk a változókat:

$$\frac{1}{I}dI = -\mu dx,$$

kitesszük az integráljeleket:

$$\int \frac{1}{I}dI = \int -\mu dx$$

és integrálunk:

$$\ln I = -\mu x + C_1.$$

A baloldalon most nem használjuk az abszolútérték jelet, mert a fényintenzitás értéke nem lehet negatív.

Átalakítjuk egyenletünket:

$$e^{\ln I} = e^{-\mu x + C_1},$$

$$I = e^{-\mu x + C_1} = e^{-\mu x}e^{C_1} = e^{-\mu x}C = Ce^{-\mu x}.$$

Ezzel az általános megoldást megkaptuk, de mivel konkrét gyakorlati problémáról van szó, ki kell küszöbölnünk a konstanst. Az ehhez felhasználható kezdeti feltétel a következő: ha $x = 0$, vagyis a fénysugár éppen a közeg határán van, akkor $I = I_0$, vagyis $I(0) = I_0$.

Behelyettesítjük ezeket az értékeket az általános megoldásba:

$$I_0 = Ce^{-\mu \cdot 0} = Ce^0 = C \cdot 1 = C.$$

Ezt visszaírva az általános megoldásba kapjuk meg a partikuláris, esetünkben a végleges megoldást:

$$I = I_0 e^{-\mu x}.$$

A törvény neve a röntgendiagnosztikában gyengülési törvény, a kémiai analitikában (kissé más formában felírva) Bouguer-Lambert-Beer törvény, mindkét területen alapvető a jelentősége. Az érdekesség kedvéért megemlítjük, hogy *Pierre Bouguer* francia matematikus és fizikus ismerte fel 1719-ben[8].

7.3. Differenciálegyenletek közelítő megoldása

A téma gyakorlati jelentősége olyan nagy, hogy mindenképpen meg kell említenünk.

Talán már világossá vált az olvasó számára, hogy a differenciálegyenletek megoldása nehéz feladat. Még az előző fejezetben tárgyalt, legegyszerűbb típusú differenciálegyenleteket sem tudjuk megoldani, ha nem tudjuk elvégezni az integrálást. Bonyolultabb esetekben pedig sokszor teljesen reménytelen az analitikus megoldás.

A gyakorlat azonban igényli a felvetett problémák megválaszolását, például hogy mennyi lesz egy anyag koncentrációja bizonyos reakcióidő eltelte után, hol ér földet egy elromlott mesterséges hold, mennyi lesz a hőmérséklete egy kihűlő testnek bizonyos idő elteltével, stb. A gyakorlat által felvetett kérdések szerencsés közös jellemzője, hogy elegendő adott pontossággal válaszolni rájuk, éppen azért, mert gyakorlati problémák. Általában senkit nem érdekel például egy hőmérsékleti adat egymilliomod fok pontossággal, néhány tized, esetleg század fok hiba sokszor elhanyagolható.

A feladat tehát a következő: adott az

$$y' = f(x; y) \tag{7.5}$$

típusú differenciálegyenlet és az

$$y(x_0) = y_0$$

kezdeti feltétel. Meg kell határozni azt az y értéket, ami egy távolabbi x_k helyhez tartozik, miközben az egyenlet analitikus megoldását nem ismerjük.

A közelítő megoldásra sokféle különböző megoldás ismert. Mi most a legegyszerűbben megérthető, Euler-módszernek nevezett eljárás elvét ismertetjük.

Legelőször egy fogalmat kell tisztáznunk. A differenciálegyenlet partikuláris megoldása egy függvény képletét szolgáltatja. Mivel ezt integrálással kaptuk, *integrálgörbé*nek nevezzük. Az általános megoldás tartalmazza az összes partikuláris megoldást, ezért görbeseregnek nevezzük. Az egyes integrálgörbék a C konstans értékében térnek el egymástól.

A közelítő megoldáshoz mindenképpen ismerni kell az integrálgörbe egy pontját, ezzel választunk ki a görbeseregből egy görbét. Ez a pont az $(x_0; y_0)$ pont, amit a kezdeti feltétel ad meg. Fogalmazhatunk úgy is, hogy integrálgörbénk az $(x_0; y_0)$ pontból indul.

Ha ismernénk az analitikus megoldást, akkor behelyettesítéssel ki tudnánk számítani a keresett $y = y(x_k)$ értéket.

Mivel nem ismerjük, a görbét az érintőjével helyettesítve kiszámítunk egy új függvényértéket az x_0-tól nem túl távoli x_1 helyen (5.8.1. és 5.8.4. fejezet).

Ehhez az (5.28) egyenlet illetve az (5.29) szabály megfelelő alakját használjuk. Az érintő iránytangense a (7.5) egyenletből adódóan $f(x_0; y_0)$, ezért az érintő egyenlete:

$$y = y_0 + f(x_0; y_0)(x - x_0).$$

Az x_1 helyhez tartozó közelítő függvényérték:

$$y_1 = y_0 + f(x_0; y_0)(x_1 - x_0).$$

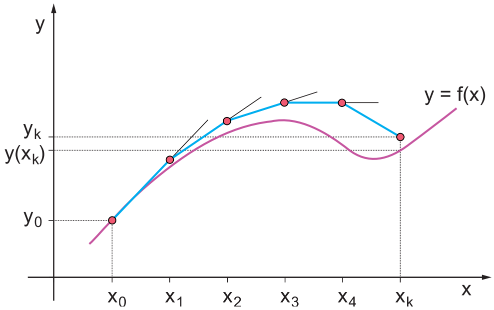
A közelítő megoldásnak megkaptuk tehát egy $(x_1; y_1)$ pontját. Ebből továbblépve teljesen hasonló módon kapunk egy $(x_2; y_2)$ pontot:

$$y_2 = y_1 + f(x_1; y_1)(x_2 - x_1),$$

abból egy $(x_3; y_3)$ pontot, és így tovább.

Az eljárást addig folytatjuk, amíg a vízszintes tengelyen el nem érjük az x_k helyet.

Így az integrálgörbét egy törtvonallal helyettesítettük, ami $y(x_k)$-ra természetesen csak egy közelítő y_k értéket szolgáltat (7.2. ábra).



7.2. ábra Differenciálegyenlet közelítő megoldása

Az elkövetett hiba különböző módszerekkel becsülhető. Ha az első eljárással túl nagy a hiba, akkor végigcsináljuk a számításokat újra, kisebb lépésekkel. Addig ismételünk, amíg a hiba kellően kicsivé nem válik.

Mint látható, az eljárás nagyon sok számolást igényel, viszont nagyon jól algoritmizálható. Elvégzése számítógépes program segítségével egyszerűbb esetekben nem probléma. Léteznek gyorsabban közelítő eljárások is. Ezeknek akkor vesszük nagy hasznát, ha bonyolult differenciálegyenlet-rendszerek közelítő megoldását keressük, mert ezek számítógépes úton is csak hosszú idő után kaphatók meg. Ilyen egyenletrendszerek írnak le például bonyolult kémiai reakciókat, vagy mondjuk az időjárást.

Feladatok:

1. Ellenőrizze, hogy a következő differenciálegyenleteknek megoldásai-e az adott függvények:

   a) $y + y' = (x+1)^2$ $\qquad y = x^2 + 1$

   b) $y + y' = 0$ $\qquad y = e^{-x}$

   c) $\frac{y}{y'} = \frac{tg2x}{2}$ $\qquad y = \sin 2x$

   d) $yy' = \frac{1}{2}$ $\qquad y = \sqrt{x}$

   e) $y - y' = x^2$ $\qquad y = x^2 + 2x - 2$

2. Oldja meg a következő differenciálegyenleteket az adott kezdeti feltételek mellett!

   a) $y' - x = 0$ $\qquad y(0) = 0$

   b) $y' = \frac{2}{y}$ $\qquad y(1) = 2$

   c) $y' = 3y$ $\qquad y(0) = 5$

8. A felhasznált irodalom

A következőkben megadjuk a tananyag készítése során felhasznált publikációk jegyzékét. A jegyzékben szereplő könyveket és jegyzeteket az érdeklődő hallgatók haszonnal forgathatják ismereteik bővítése és a tantárgy anyagának mélyebb elsajátítása érdekében.

---

[1] Szász Gábor: Matematika I. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.
ISBN 963 18 82926

[2] Richard Mankiewicz: A matematika históriája. HVG Kiadó Rt, Budapest, 2003.
ISBN 963 7525 300

[3] Sain Márton: Nincs királyi út! Matematikatörténet. Gondolat Kiadó, Budapest, 1986. ISBN 963 281 7044

[4] Filep László: A tudományok királynője. A matematika fejlődése. Bessenyei Kiadó, Nyíregyháza, 1997. ISBN 963 7546 83 9

[5] Stefan Banach: Differenciál- és integrálszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1975. ISBN 963 17 08055

[6] Walter József (szerk): Matematika I. Agrármérnök hallgatók számára (jegyzet). PATE Állattenyésztési Kar, Kaposvár, 1995.

[7] Fritz Reinhardt, Heinrich Soeder: Atlasz. Matematika. Athenaeum Kiadó Kft, Budapest, 1999. ISBN 963 85979 4 1

[8] Simonyi Károly: A fizika kultúrtörténete. Gondolat Kiadó, Budapest, 1981.
ISBN 963 281 172 0