

FIZIKA

FIZIKA

az Orvosi Laboratóriumi
és Képző Diagnosztikai Analitikus
alapszak hallgatói részére

Szerzők:

Walter Norbert
Bogner Péter



PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITY OF PÉCS



SZÉCHENYI TERV

Medicina Könyvkiadó Zrt. • Budapest, 2014

A kiadvány a következő program keretében jelent meg:
TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0106

Lektor:
Litz József

© Walter Norbert, Bogner Péter, 2014

ISBN 978 963 226 457 8

Borítóterv: Bede Tamásné
Műszaki szerkesztő: Kökösi-Sigmond Gábor
Az ábrákat rajzolta: Walter Norbert
Animációk, mozgóképelemek: Walter Norbert
Azonossági szám: 3700

Tartalomjegyzék

Bevezető	16
1. Mechanika	21
1.1. Anyagi pont kinematikája.....	21
1.1.1. Mechanikai alapfogalmak, vonatkoztatási rendszerek, helyvektor.....	21
1.1.2. A sebesség.....	25
1.1.3. A gyorsulás.....	27
1.1.4. Szabadesés, nehézségi gyorsulás.....	28
1.1.5. Vízszintes hajítás.....	29
1.1.6. Egyenletes körmozgás.....	30
1.1.7. Harmonikus rezgőmozgás.....	32
1.1.8. Harmonikus rezgések összetétele.....	38
1.1.9. Anharmonikus rezgések.....	40
1.1.10. Mechanikai hullámok.....	41
1.1.10.5. A hullámok tulajdonságai.....	44
1.2. Az anyagi pont dinamikája.....	52
1.2.1. Az anyagi pont Kinetikájának törvényei.....	52
1.3. A munka és az energia.....	71
1.3.1. Az energia.....	71
1.3.2. A munka.....	71
1.3.3. Példák speciális munkákra.....	72
1.3.4. A teljesítmény.....	76
1.3.5. Hatásfok.....	76
1.4. Megoldandó feladatok.....	77
2. Hőtan	83
2.1. A hőmérséklet és a hőtágulás.....	83
2.1.1. A hőmérséklet.....	83
2.1.2. Homogén és izotróp szilárd testek hőtágulása.....	84
2.1.3. Szilárd testek felületi hőtágulása.....	86
2.1.4. Szilárd testek és folyadékok térfogati (köbös) hőtágulása.....	86
2.2. Az ideális gázok termikus állapotegyenlete.....	88
2.3. Az ideális gázok állapotváltozásai.....	89
2.3.1. Izobár állapotváltozás.....	89
2.3.2. Izochor állapotváltozás.....	91
2.3.3. Izotermikus állapotváltozás.....	91
2.4. Az ideális gázok energetikai jellemzői.....	93
2.4.1. Belső energia.....	93
2.4.2. Hőmennyiség.....	93
2.4.3. Fajhő és hőkapacitás.....	94
2.5. Halmazállapot-változások és fázisátalakulások.....	96
2.6. A termodinamika főtételei.....	99
2.6.1. A termodinamika I. főtétele.....	99
2.6.2. A termodinamika II. főtétele.....	99
2.6.3. A termodinamika III. főtétele.....	101

2.7. A molekuláris fizika elemei	102
2.7.1. Az ideális gáz nyomása és hőmérséklete	102
2.7.2. Az ideális gázok nyomása	102
2.7.3. Az ekvipartíció-tétel	104
2.7.4. Az entrópia statisztikus értelmezése	105
2.7.5. A Boltzmann-képlet	108
2.7.6. A Boltzmann-eloszlás és a Maxwell-féle sebességeloszlás	109
2.8. A hő terjedése	111
2.8.1. A hővezetés	111
2.8.2. A hőáramlás.....	114
2.8.3. A hősugárzás	114
2.9. Megoldandó feladatok.....	116
3. Elektromágnességtan	120
3.1. Elektrosztatika	122
3.1.1. Elektrosztatikai alapfogalmak	122
3.1.2. A Coulomb-törvény.....	123
3.1.3. Az elektromos mező és jellemzése.....	125
3.1.4. Az elektromos dipólus viselkedése homogén elektromos mezőben	131
3.1.5. Az elektromos mező fluxusa.....	132
3.1.6. Az elektromos mező munkája és feszültsége.....	137
3.1.7. A potenciális energia és potenciál.....	140
3.1.8. Elektromos kapacitás, kondenzátorok.....	142
3.1.9. A piezoelektromosság	147
3.2. Töltések áramlása, elektromos áramok	148
3.2.1. Az elektromos áram	148
3.2.2. Az Ohm-törvény homogén vezetőre és az elektromos ellenállás	150
3.2.3. Összetett áramkörök, a Kirchhoff-törvények.....	151
3.2.4. Fogyasztók kapcsolása	152
3.2.5. Áramerősség- és feszültségmérő műszerek.....	157
3.2.6. Az egyenáram munkája és teljesítménye	158
3.2.7. A zárt áramkörre vonatkozó Ohm-törvény	159
3.2.8. Termoelektromos jelenségek.....	160
3.3. Magnetosztatika	162
3.3.1. Mágneses alapjelenségek	162
3.3.2. A mágneses mező jellemzése.....	163
3.3.3. Erőhatások mágneses mezőben.....	165
3.3.4. Az anyagok mágneses tulajdonságai.....	168
3.3.5. Ampère-féle gerjesztési törvény.....	168
3.3.6. Az időben állandó elektromos és mágneses mező (összefoglalás)	170
3.4. Az időben változó elektromágneses mező	173
3.4.1. Nyugalmi indukció.....	173
3.4.2. Önindukció.....	176
3.4.3. Kölcsönös indukció.....	176
3.4.4. Mozgási indukció	178
3.4.5. Váltakozó áramú áramkörök	183
3.5. Elektromágneses rezgések.....	189

3.5.1. Soros RLC áramkör szabad rezgése.....	189
3.5.2. Soros RLC áramkör kényszerrezgése	190
3.5.3. Nagyfrekvenciájú elektromágneses rezgések.....	191
3.6. A vákuumbeli eltolási áram	192
3.7. A vákuumbeli Maxwell-egyenletek rendszere	193
3.8. Elektromágneses hullámok	194
3.8.1. Az elektromágneses rádióhullámok keletkezése.....	195
3.8.2. Az elektromágneses hullámok energiasűrűsége.....	198
3.8.3. A rádióhullámok alkalmazásai	199
3.9. Megoldandó feladatok.....	200
4. Fénytan (optika)	204
4.1. Geometriai optika.....	205
4.1.1. A fényvisszaverődés.....	205
4.1.2. Leképezés visszaverődött fénynyalábokkal	205
4.1.3. A fénytörés	212
4.1.4. A fénytörés speciális esetei	213
4.1.5. Leképezés lencsékkel	220
4.1.6. A színlátás	226
4.2. Fizikai fénytan (hullámoptika).....	227
4.2.1. Fényhullámok interferenciája.....	228
4.2.2. Fényhullámok elhajlása (diffrakció)	231
4.2.3. A fény polarizációja	233
4.2.4. Holográfia.....	235
4.3. Megoldandó feladatok.....	237
5. Atomfizika	238
5.1. Atomhéjfizika	239
5.1.1. A hőmérsékleti sugárzás.....	239
5.1.2. A fényelektromos hatás	241
5.1.3. Fotoelektron-sokszorozó	243
5.1.4. A Compton-effektus.....	244
5.1.5. A hullám-részecske kettősség problémája	247
5.1.6. Az anyaghullámok.....	247
5.1.7. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció.....	250
5.1.8. Klasszikus atommodellek.....	252
5.1.9. A Bohr-féle atommodell.....	253
5.1.10. A kvantummechanika kialakulása.....	261
5.1.11. Az egydimenziós Schrödinger-féle hullámegyenlet	263
5.1.12. Az alagúteffektus.....	266
5.1.13. A röntgensugárzás	267
5.2. Atommagfizika	274
5.2.1. Az atommagok tulajdonságai	274
5.2.2. Az atommag mérete és sűrűsége	275
5.2.3. Az atommag kötési energiája	275
5.2.4. Magmomentumok	277
5.2.5. A magerők.....	279
5.2.6. Radioaktivitás.....	281

5.3. Részecskefizika	285
5.3.1. A részecskefizika alapjai	285
5.3.2. Részecskecsaládok	286
5.3.3. Kölcsönhatások	288
5.4. Megoldandó feladatok.....	290
Irodalom.....	292
Tárgymutató	293

Ábrák jegyzéke

1.1. ábra:	Pálya, út, elmozdulás.....	22
1.2. ábra:	Parabolapálya a $z = 2$ síkban.....	23
1.3. ábra:	Síkbeli polárkoordináta-rendszer	24
1.4. ábra:	Gömbi koordináta-rendszer.....	24
1.5. ábra:	Sebesség	25
1.6. ábra:	Gyorsulás.....	28
1.7. ábra:	Vízszintes hajítás.....	30
1.8. ábra:	Egyenletes körmozgás.....	32
1.9. ábra:	A harmonikus rezgőmozgás pillanatnyi kitérése	33
1.10. ábra:	Fázisszög	34
1.11. ábra:	Harmonikus rezgőmozgás pillanatnyi sebessége	35
1.12. ábra:	Harmonikus rezgőmozgás pillanatnyi gyorsulása.....	37
1.13. ábra:	Harmonikus rezgőmozgást végző test maximális kitérése, maximális sebessége és maximális gyorsulása.....	38
1.14. ábra:	Lebegés.....	39
1.15. ábra:	Csillapodó rezgés kitérés-idő függvénye	40
1.16. ábra:	Téglalap-rezgés Fourier-közelítése	41
1.17. ábra:	Vonalas spektrum	41
1.18. ábra:	Harmonikus gerjesztő rezgés által kialakított 1D hullám	44
1.19. ábra:	Visszaverődés.....	45
1.20. ábra:	Törés.....	45
1.21. ábra:	Törés a beesési merőlegetől.....	46
1.22. ábra:	Teljes visszaverődés határszöge.....	47
1.23. ábra:	Hullámok elhajlása résen	48
1.24. ábra:	Erősítés	49
1.25. ábra:	Gyengítés.....	49
1.26. ábra:	Kioltás	50
1.27. ábra:	Polarizáció	51
1.28. ábra:	Nehézségi erő és súlyerő	56
1.29. ábra:	Hidrosztatikai nyomás.....	58
1.30. ábra:	Felhajtóerő származtatása	59
1.31. ábra:	Csillapodó rezgés	62
1.32. ábra:	Kényszerrezgés.....	63
1.33. ábra:	Rezonanciagörbe	64
1.34. ábra:	Föld körüli körpálya	65
1.35. ábra:	Kúpinga mozgása	66
1.36. ábra:	Esés ellenálló közegben	66
1.37. ábra:	Két test rugalmatlan ütközése	68
1.38. ábra:	Impulzusmomentum.....	70
1.39. ábra:	Munkavégzés egyenes úton.....	71
1.40. ábra:	Munkavégzés görbe vonalú pályán	72
1.41. ábra:	Rugalmas erő munkája	74
1.42. ábra:	Harmonikus oszcillátor energiája.....	75
2.1. ábra:	Hőmérsékleti skálák	84

2.2. ábra:	Lineáris hőtágulás függvénye.....	85
2.3. ábra:	Bimetall görbülete.....	85
2.4. ábra:	Felületi hőtágulás	86
2.5. ábra:	A víz sűrűségének változása a hőmérséklet függvényében	87
2.6. ábra:	Izobár állapotváltozás a) $p - V$ diagram b) $V - T$ diagram c) $p - T$ diagram	89
2.7. ábra:	Izobár állapotváltozásokor végzett munka.....	90
2.8. ábra:	Izochor állapotváltozás a) $p - V$ diagram b) $V - T$ diagram c) $p - T$ diagram	91
2.9. ábra:	Izotermikus állapotváltozás a) $p - V$ diagram b) $V - T$ diagram c) $p - T$ diagram.....	92
2.10. ábra:	Izotermikusan táguló gáz által végzett munka	92
2.11. ábra:	Adiabatikus állapotváltozás $p - V$ diagramja.....	95
2.12. ábra:	Halmazállapot változások	96
2.13. ábra:	Hőfelvétel halmazállapot-változások során	97
2.14. ábra:	Fázisdiagram	97
2.15. ábra:	A víz fázisdiagramja.....	98
2.16. ábra:	Az ideális gáz nyomása a részecskék fallal való ütközéséből származik	102
2.17. ábra:	Négy részecske mikroeloszlásai két egyenlő térrészben.....	106
2.18. ábra:	Maxwell-féle sebességeloszlás görbéi	110
2.19. ábra:	Belső hővezetés	111
2.20. ábra:	Külső hővezetés.....	112
2.21. ábra:	Hőátvitel	112
2.22. ábra:	Newton-féle lehülési törvény grafikonja.....	113
2.23. ábra:	Hősugárzás $\omega(\lambda)$ energiasűrűségének hullámhossz szerinti eloszlása	114
2.24. ábra:	26. feladathoz	117
2.25. ábra:	27. feladathoz	117
2.26. ábra:	28. feladathoz	118
2.27. ábra:	29. feladathoz	118
2.28. ábra:	31. feladathoz	118
3.1. ábra:	Ponttöltés elektrosztatikus mezője	126
3.2. ábra:	Erővonalak szemléltetése a) pozitív és b) negatív ponttöltés körül	127
3.3. ábra:	Két ponttöltés elektromos mezője.....	128
3.4. ábra:	Párhuzamos töltött fémlapok közötti elektromos mező.....	129
3.5. ábra:	Ponttöltés mozgása transzverzális elektromos mezőben.....	131
3.6. ábra:	Elektromos dipólus elektromos mezőben	132
3.7. ábra:	Felületvektor.....	133
3.8. ábra:	Elektromos fluxus számítása.....	133
3.9. ábra:	Egyenes vezető körüli elektromos mező fluxusa	135
3.10. ábra:	Töltött síklap körüli elektromos mező fluxusa.....	136
3.11. ábra:	Munka kiszámítása inhomogén elektromos mezőben.....	137
3.12. ábra:	Próbatöltéssel végzett munka.....	139
3.13. ábra:	Konzervatív mező által végzett munka	141
3.14. ábra:	Kondenzátor	142
3.15. ábra:	Síkkondenzátor.....	143
3.16. ábra:	Kondenzátor technikai rajzjele.....	143
3.17. ábra:	Kondenzátorok párhuzamos kapcsolása.....	144
3.18. ábra:	Kondenzátorok soros kapcsolása	145
3.19. ábra:	Fizikai és technikai áramirány.....	148
3.20. ábra:	Áramforrások jelölései	149

3.21. ábra:	Fogyasztók soros kapcsolása.....	153
3.22. ábra:	Fogyasztók párhuzamos kapcsolása.....	154
3.23. ábra:	Terheletlen potenciométer.....	156
3.24. ábra:	Terheletlen potenciométer csúszkával	156
3.25. ábra:	Terhelt potenciométer	157
3.26. ábra:	Áramerősség mérés ampermérővel	157
3.27. ábra:	Feszültségmérés voltmérővel	158
3.28. ábra:	Kapcsolás valós áramforrással	160
3.29. ábra:	Seebeck-effektus	161
3.30. ábra:	Rúd mágnese	163
3.31. ábra:	Egyenes áramvezető	163
3.32. ábra:	Hengeres tekercs (szolenoid)	164
3.33. ábra:	Köráram.....	164
3.34. ábra:	Párhuzamos áramvezetők.....	164
3.35. ábra:	Párhuzamos áramvezetők között ható erő.....	167
3.36. ábra:	Ampère-féle gerjesztési törvény.....	168
3.37. ábra:	Szolenoid mágneses mezője a tekercs belsejében.....	170
3.38. ábra:	Nyugalmi indukció: mágnes közelítése a tekercs felé	173
3.39. ábra:	Nyugalmi indukció: mágnes távolítása a tekercstől.....	173
3.40. ábra:	Növekvő fluxusú mágneses mező	174
3.41. ábra:	Csökkenő fluxusú mágneses mező.....	174
3.42. ábra:	Kölcsönös indukció	177
3.43. ábra:	Transzformátor	178
3.44. ábra:	Mozgási indukció	179
3.45. ábra:	Mozgási indukció magyarázata.....	179
3.46. ábra:	Forgó vezetőkeret mágneses mezőben.....	180
3.47. ábra:	Váltakozó feszültség előállítása	181
3.48. ábra:	Örvényáram.....	182
3.49. ábra:	Ohmos fogyasztó.....	184
3.50. ábra:	Induktív ellenállású fogyasztó.....	185
3.51. ábra:	Az induktív fogyasztó fáziskésleltető hatása	186
3.52. ábra:	Kapacitív ellenállású fogyasztó.....	186
3.53. ábra:	A kapacitív ellenállású fogyasztó fázissiettető hatása.....	187
3.54. ábra:	Szabad RLC -kör	189
3.55. ábra:	Áramrezgés szabad RLC -körben.....	189
3.56. ábra:	RLC -kör kényszerrezgése.....	190
3.57. ábra:	RLC -kör impedanciája.....	191
3.58. ábra:	Indukált örvényes mágneses mező.....	194
3.59. ábra:	Indukált örvényes elektromos mező.....	194
3.60. ábra:	Dipólantenna előállítása LC rezgőkörből.....	196
3.61. ábra:	Dipól sugárzás E -vonalai az idő múlásával.....	196
3.62. ábra:	Dipól sugárzás E - és B -vonalai	197
3.63. ábra:	Színuszos elektromágneses hullám	198
3.64. ábra:	21. Feladathoz	201
3.65. ábra:	22. Feladathoz	201
3.66. ábra:	23. Feladathoz	201
3.67. ábra:	24. Feladathoz	202

3.68. ábra:	25. Feladathoz	202
4.1. ábra:	Fényvisszaverődés.....	205
4.2. ábra:	Síktükör képalkotása	206
4.3. ábra:	Tükör mérete	207
4.4. ábra:	Homorú gömbtükör	208
4.5. ábra:	Homorú gömbtükör fókuszpontja	208
4.6. ábra:	Homorú tükör leképezési törvénye	209
4.7. ábra a) és b):	Homorú gömbtükör képalkotása	210
4.8. ábra:	Elliptikus henger alakú homorú tükör.....	211
4.9. ábra:	Domború gömbtükör képalkotása	211
4.10. ábra:	Homorú parabolatükör	212
4.11. ábra:	Fénytörés a beesési merőlegeshez.....	213
4.12. ábra:	Fénytörés a beesési merőlegestől	214
4.13. ábra:	Teljes visszaverődés határszöge.....	214
4.14. ábra:	Csillag látszólagos helye a földi megfigyelő számára	215
4.15. ábra:	Eltolódás plánpárhuzamos lemezen.....	215
4.16. ábra:	Párhuzamos eltolódás	217
4.17. ábra:	Prizma törőszöge és eltérítési szöge.....	218
4.18. ábra:	Prizma képfordítása.....	219
4.19. ábra:	Optikai szál.....	220
4.20. ábra:	Változó törésmutatójú optikai szál.....	220
4.21. ábra:	Gömbblencse felépítése.....	220
4.22. ábra:	Vékony gyűjtőlencsék.....	220
4.23. ábra:	Vékony szórólencsék.....	221
4.24. ábra:	Leképezési törvény bikonvex lencsénél.....	221
4.25. ábra:	Vékony gyűjtőlencse képalkotása	223
4.26. ábra:	Vékony szórólencse képalkotása.....	224
4.27. ábra:	Mikroszkóp képalkotása.....	225
4.28. ábra:	Apertúraszög levegővel.....	225
4.29. ábra:	Apertúraszög folyadékkal	226
4.30. ábra:	Fehér fény felbontása színekre prizmával.....	226
4.31. ábra:	Fény interferenciája szappanhártyán	229
4.32. ábra:	Michelson-féle interferométer.....	230
4.33. ábra:	Egyrétes elhajlás	231
4.34. ábra:	Kétréses elhajlás	232
4.35. ábra:	Kétréses elhajlás távol lévő ernyőn kivetített képe	233
4.36. ábra:	Fény polarizációja kéttükrös kísérlettel.....	234
4.37. ábra:	Brewster-törvény	235
4.38. ábra:	Hologram készítése	236
4.39. ábra:	Hologram megtekintése.....	236
5.1. ábra:	Hőmérsékleti sugárzás.....	239
5.2. ábra:	Abszolút fekete test	240
5.3. ábra:	Fotoeffektus fotocellában.....	242
5.4. ábra:	A Planck-állandó meghatározása	243
5.5. ábra:	Fotoelektron-sokszorozó	243
5.6. ábra:	Compton-effektus.....	245
5.7. ábra:	A szórt foton hullámhosszának növekedése a szóródási szög függvényében....	246

5.8. ábra:	Anyaghullám	249
5.9. ábra:	Hullámcsomag kiszélesedése	250
5.10. ábra:	Részecske pályája klasszikusan és kvantumfizikailag	250
5.11. ábra:	Heisenberg-féle határozatlansági reláció	251
5.12. ábra:	Főkvantumszámok	256
5.13. ábra:	Mellékvantumszámok	258
5.14. ábra:	Mágneses kvantumszám.....	259
5.15. ábra:	Elektron legvalószínűbb tartózkodási helye adott energiájú héjon.....	262
5.16. ábra:	Részecske potenciáldobozban.....	264
5.17. ábra:	Hullámfüggvények és megtalálási valószínűségek	265
5.18. ábra:	Potenciálgát	266
5.19. ábra:	Alagúteffektus	267
5.20. ábra:	Röntgensugárzás tartománya.....	268
5.21. ábra:	Röntgenső felépítése.....	268
5.22. ábra:	Fékezési röntgensugárzás.....	270
5.23. ábra:	Röntgenspektrum karakterisztikus vonalakkal.....	270
5.24. ábra:	Sugárelnyelés homogén anyagban	271
5.25. ábra:	Gyengülési törvény	272
5.26. ábra:	Egy nukleonra jutó kötési energia.....	277
5.27. ábra:	Atommagok rendszáma és neutronszáma közötti viszony.....	279
5.28. ábra:	Nukleon potenciális energiája az atommagban.....	281
5.29. ábra:	α -részecske alagúteffektusa potenciálgáton	283
5.30. ábra:	Az atom nagyságrendi viszonyai.....	285
5.31. ábra:	Pároképződés.....	286
5.32. ábra:	Annihiláció	286
5.33. ábra:	A He-atom felépítése.....	288
5.34. ábra:	A β -bomlás sémái.....	289

Táblázatok jegyzéke

2.1. táblázat: A részecskék eloszlása két térrészben	107
5.1. táblázat: Az elektronhéjak feltöltődése	261
5.2. táblázat: Atommagok spinje.....	277
5.3. táblázat: Az anyagi részecskék családjai, és a kölcsönhatásokat közvetítő részecskék	287

Példák jegyzéke

1.1. Példa: A helyvektor számítása	22
1.2. Példa: A sebesség számítása	26
1.3. Példa: A gyorsulás számítása	27
1.4. Példa: Szabadon eső test mozgása	29
1.5. Példa: Vízszintesen elhajított test mozgása.....	29
1.6. Példa: Rezgőmozgást végző test átlagos sebesség nagysága.....	36
1.7. Példa: A nehézségi gyorsulás.....	55
1.8. Példa: A nehézségi erő okozta mozgás	60
1.9. Példa: Harmonikus rezgőmozgás	61
1.10. Példa: Csillapított rezgőmozgás	62
1.11. Példa: Kényszerrezgés.....	63
1.12. Példa: Egyenletes körmozgás.....	64
1.13. Példa: Kúpinga mozgása	65
1.14. Példa: Esés ellenálló közegben	66
1.15. Példa: Tökéletesen rugalmatlan ütközés	68
1.16. Példa: Elhajított test impulzusváltozása.....	69
1.17. Példa: A nehézségi erő munkája és a potenciális energia	72
1.18. Példa: A gyorsító erő munkája és a kinetikus energia	73
1.19. Példa: A rugalmas erő munkája	73
1.20. Példa: A csúszási súrlódási erő munkája.....	74
1.21. Példa: Kényszererő munkája.....	74
1.22. Példa: Harmonikus oszcillátor energiája.....	75
2.1. Példa: Bimetall görbülése.....	85
2.2. Példa: Állandó nyomáson táguló gáz munkája	90
2.3. Példa: Állandó hőmérsékleten táguló gáz munkája	92
2.4. Példa: Olvadó jég entrópiaváltozása	101
2.5. Példa: A testek lehűlése.....	113
3.1. Példa: A proton és az elektron között ható erők.....	124
3.2. Példa: Ponttöltés elektrosztatikus mezője	126
3.3. Példa: Két ponttöltés eredő elektromos mezője	127
3.4. Példa: Párhuzamos töltött fémlapok elektromos mezője.....	128
3.5. Példa: Ponttöltés mozgása homogén elektromos mezőben.....	129
3.6. Példa: Ponttöltés mozgása transzverzális homogén elektromos mezőben.....	130
3.7. Példa: Pontszerű töltés elektromos fluxusa.....	133
3.8. Példa: Egyenes vezető körüli elektromos mező térerőssége.....	134
3.9. Példa: Töltött gömb belsejében lévő térerősség.....	136
3.10. Példa: Sík vezető lap körüli térerősség	136
3.11. Példa: Próbátöltésen végzett munka és a mező feszültsége	139
3.12. Példa: Ponttöltés potenciális energiája és az elektromos mező potenciálja.....	140
3.13. Példa: Síkkondenzátor kapacitása	142
3.14. Példa: Az elektromos mező energiája és energiasűrűsége	145
3.15. Példa: Síkkondenzátor fegyverzeteinek megváltozása	146
3.16. Példa: Feszültségosztó összefüggések	153
3.17. Példa: Áramosztó összefüggések	155

3.18. Példa: Egyenáram teljesítménye	159
3.19. Példa: Egyenes vezető mágneses mezője.....	169
3.20. Példa: Hengeres tekercs (szolenoid) mágneses mezője a tekercs belsejében	169
3.21. Példa: Szinuszos váltakozó áram effektív értéke	183
4.1. Példa: A tükör mérete.....	207
4.2. Példa: A gömbtükör fókuszpontjának helyének meghatározása.....	208
4.3. Példa: Párhuzamos eltolódás	217
5.1. Példa: A Nap felületi hőmérséklete.....	240
5.2. Példa: Az elektron hullámhossza	248
5.3. Példa: Makroszkopikus méretű test de Broglie-hullámhossza.....	248
5.4. Példa: Az idő határozatlansága	251
5.5. Példa: Makroszkopikus test sebességének határozatlansága	252
5.6. Példa: H -atom.....	256
5.7. Példa: Elektronpályák meghatározása.....	257
5.8. Példa: Az elektron energiája a H -atomban.....	262
5.9. Példa: Részecske egydimenziós „potenciáldobozban”	264
5.10. Példa: A felezési rétegvastagság	272
5.11. Példa: Kötési energia.....	276
5.12. Példa: A π -mezon tömege	280

„A fizika minden nehézsége, úgy látszik, abban áll, hogy a mozgásjelenségekben a természet erőit kikutassuk, s azután ezeknek az erőknek a segítségével a többi jelenséget megmagyarázzuk.”

Isaac Newton

„A matematikának a természettudományok terén való hasznossága a csodával határos. Nincs is rá racionális magyarázat. Mert semmiképpen sem természetes, hogy legyenek „természeti törvények”, és még kevésbé kézenfekvő, hogy az ember felfedezhesse őket. Az a tény, hogy a matematika nyelve alkalmas a fizikai törvények megfogalmazására, csodálatos ajándék, amelyet soha nem leszünk képesek igazán megérteni vagy kiérdemelni.”

Wigner Jenő

Bevezető

A természet alapvető törvényeinek megismerése ismert történelmünk szerint kezdetektől fogva az emberiség törekvése volt. Számos őskori és ókori nép hagyatéka ismert, amelyekről bebizonyosodott, hogy kiterjedt ismerettel rendelkeztek a bolygók, csillagok járásáról, az őszi és tavaszi napéjegyenlőségről. Az arabok nagy pontossággal tudták megjósolni a napfogyatkozást, a görögök ismerték az elektromosságot és a mágnességet, hidrosztatikai, statikai tudás birtokában voltak, a rómaiak vízvezetékeket építettek, és mindannyiukra igaz, hogy lenyűgöző mérnöki és építészeti tudással rendelkeztek. A középkorban a kereskedelem kialakulása az égitestek mozgásának egyre pontosabb megismerését hozta magával, és ebben a korban alakult ki a vegyészet alapjainak felfedezése is. A felvilágosodás után a tudomány fejlődése egyre gyorsabbá vált, és napjainkra korábban elképzelhetetlen méretet öltött.

A *Fizika* a természet nyelvét beszélő tudomány. A Fizika keresi azokat az alapvető törvényeket, amelyek a Világegyetem *13,8 milliárd* évvel ezelőtti kezdete óta kialakították és mozgatják ma is a minket körülvevő világot.

A Fizika tapasztalati tényeken alapuló tudomány, mert törvényeit a tapasztalati úton fogalmazza meg. Megfigyelünk jelenségeket, és megpróbáljuk reprodukálni azokat. A kísérleti körülmények között is mindig ugyanúgy bekövetkező jelenségek és megfigyeléseink alapján törvényeket fogalmazunk meg. A törvényt mindaddig igaznak tekintjük, amíg újabb jelenség azt nem mutatja, hogy pontosításra, általánosabb megfogalmazásra szorul, esetleg teljesen felül kell bírálni. Ezt *induktív* megközelítésnek nevezzük, és a kísérleti fizika legfontosabb eszközeinek tekintjük.

A megismerésnek másik módja, a *deduktív* módszer, az elméleti fizika területe. Nagyon sok felismerés született meg (főként a XIX–XX. században) oly módon, hogy kísérleti tapasztalat híján egy alapfeltevésből vagy alapigazságból kiindulva elméleti úton vezették le a törvényeket. Kitűnő példája ennek a James Clerk MAXWELL által megjósolt elektromágneses hullámok létezése, vagy az Albert EINSTEIN által leírt relativitáselmélet, amelyeknek bizonyítására csak az elméletek megjelenését követően került sor.

A törvények és törvényszerűségek megfogalmazására három különböző érvényű módszert használunk:

- A *természeti törvények* olyanok, amelyeket felfedezünk, és az embertől függetlenül érvényesek. Semmilyen test vagy gép mozgása, működése nem mondhat ellent nekik.

- Az *axiómák* vagy sarkigazságok (alapigazság, alaptény), olyan kiindulási alaptételek, amelyeket az adott keretek között magától értetődőnek fogadunk el, és úgy tekintjük, hogy azok nem szorulnak további bizonyításra. Egy tudomány axiómáinak pontos meghatározása a tudomány megszületését is jelenti.
- A *posztulátum* követelmény, alapkövetelmény, alapfeltevés. Hasonló az axiómához, de míg az axiómák igazságához nem férhet kétség, a posztulátumokról ez nem állítható ilyen biztonsággal.

Mára a Fizika ezeket az alapvető természeti törvényeket nagyon nagy részletességgel megismerte. A természetet mozgató erők megfigyelésében odáig jutottunk, hogy négyféle kölcsönhatást ismerünk:

1. Az *erős kölcsönhatás* a legnagyobb erősségű, ez felel például az atommagokat felépítő protonok és neutronok közötti vonzásért, és nagyon kis hatótávolsága van.
2. Az *elektromágneses kölcsönhatás* az erős kölcsönhatásnál 10^{-2} -szor gyengébb erősségű kölcsönhatás, az elektromosan töltött részecskék között lép fel, hatótávolsága végtelen.
3. A *gyenge kölcsönhatás* néhány atomi skálán fellépő jelenségért felelős, mint például a radioaktív β -bomlás. Erőssége az elektromágneses kölcsönhatásnál kisebb, az erős kölcsönhatás erősségének csak mintegy 10^{-13} -szorosa, hatótávolsága pedig még kisebb, mint az erős kölcsönhatásé.
4. A *gravitációs kölcsönhatás* minden részecske és test között fellép. A négy alapvető kölcsönhatás közül ez a leggyengébb, az erős kölcsönhatásnál mintegy 10^{-38} -szor kisebb erősségű, hatótávolsága azonban végtelen.

A kísérletezés és a vizsgálat tárgya szerint különböztetjük meg a Fizika tudományterületeit, amelyek különböző jelenségeket azonos tulajdonságuk szerint foglalják magukban. Ezek a tudományterületek a következők:

A *Mechanika* a testek nyugalmi állapotával, és mozgásaival foglalkozik. Legegyszerűbb közelítésként a testeket tömegpontnak képzelem el, majd azokból pontrendszereket és kiterjedt testeket felépítve alkotja meg törvényeit, figyelembe véve azt is, hogy a testek alakváltozásra is képesek. Alaptörvényeit Isaac NEWTON foglalta egységbe elsőként a *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) című könyvében. A Mechanika nem veszi figyelembe azt, hogy a testek hőmérséklete változhat, és nem képes nagyon nagyszámú tömegpontból álló rendszer minden elemének mozgását követni.

Olyan folyamatok leírása, ahol a hőmérséklet és ennek következtében a testek valamely jellemzője változik, a *Hőtan* feladata. Ez a tudományterület vizsgálja azt, hogy mi történik a különböző halmazállapotú testekkel akkor, ha hőállapotuk megváltozik, hogyan változik méretük, rugalmasságuk vagy halmazállapotuk. Ugyancsak a Hőtan témakörébe tartozik annak leírása is, hogy milyen módszerrel jellemezhető a nagyszámú elemből álló rendszer statisztikus viselkedése. A Hőtan alaptörvényeit főtételekként ismerjük.

Az *Elektromágnesség* elektromos és mágneses jelenségeket tárgyal. Leírja mind az elektromos töltések, mind pedig az elektromos és mágneses mező kölcsönhatásait. Csak a XIX. század óta tudjuk, hogy az elektromosság és a mágnesség egyazon kölcsönhatás két megjelenése, és legtöbbször együtt vannak jelen. Az Elektromágnesség törvényeinek egységbe foglalt rendszere a négy Maxwell-egyenlet.

A *Fénytan* nevű tudományterület a fény geometriai terjedését és hullámtermészetét magyarázza. A fény akkor tekinthető egyenes vonalban terjedő jelenségnek, ha homogén (egynemű)

és izotróp (irányfüggetlen) közegben vizsgáljuk. Ha természetét szeretnénk megérteni, elektromágneses rezgések térben és időben való terjedésével, elektromágneses hullámmal magyarázhatjuk. Ez ad lehetőséget olyan jelenségek tárgyalására, amelyek csak hullámoknál értelmezhetők.

Az *Atom- és részecskefizika* a legapróbb testek kölcsönhatásait tárgyalja. Az anyag természetének kiismerésére irányuló törekvésnek köszönhető atom fogalmának ókorban történt megjelenése óta több mint két évezred telt el. Igazi áttörést azonban a *Kvantummechanika* XX. század elejére tehető robbanásszerű kialakulása hozott, számtalan Nobel-díjjal jutalmazott gondolat született. A részecskék állapotainak dinamikáját leíró egyenlet Erwin SCHRÖDINGER nevéhez fűződik, amelyet a kvantummechanika alapegyenletének tekintünk.

Az *Asztrofizika* a hozzánk képest óriási méretű testek tudományterülete. Az égitestek és szabad szemmel nem látható mélyég-objektumok (ködök, galaxisok stb.) kialakulását, mozgását és változásait kutatja. Leírásukhoz Einstein általános relativitáselmélete bizonyult a legpontosabbnak. A tankönyv, írásának célja miatt, ezt a tudományterületet nem tartalmazza.

Jelen tankönyv az **Orvosi Laboratóriumi és Képző Diagnosztikai Analitikus** szak számára készült. A Fizika tudománynak azon területeiről és azoknak azon szűkebb részeiről nyújt betekintést, amelyek a szak későbbi szakmai tantárgyai során alapvető ismeretként elváltak. A tankönyv írása során az a fizikai mennyiség játszik központi szerepet, amelynek megmaradása az egész világunk alapvető törvényének tekinthető: az energia. Igyekeztünk az olyan levezetések nélkülözni, amelyek magas szintű matematikai ismereteket igényelnek, vagy amelyek nélkülözhetők a tananyag megértése és elsajátítása szempontjából. Az elméleti megfontolásokat igyekeztünk példákkal illusztrálni. Ezek egy része számolási feladat, másik része pedig paraméteresen megoldható probléma, azonban mindkét típusú példa a tananyag szerves részét képezi. A **Példákat** kiemeléssel különítettük el a szöveg többi részétől, végét ♣ szimbólum jelzi.

Jelöléseink során a következő rendszert használtuk:

- A fizikai mennyiségeket és a mértékegységeket jelölő betűket dőlten írjuk, pl.: E (energia), l m .
- A fizikai mennyiség fölé húzott nyíl vektormennyiséget jelöl, pl.: \vec{r} .
- A háromszögletű zárójelek közé írt mennyiséggel átlagértéket adunk meg, pl.: $\langle P \rangle$.
- A kezdő- és végpontot jelölő betűk fölé rajzolt ív jelöléssel ívhosszra vagy ívszakaszra utalunk, pl.: \widehat{AB} .
- Az összefüggésekben szereplő szorzatok szorzópontját csak vektorok skaláris szorzata esetén írjuk ki, így megkülönböztetve az egyszerű szorzástól, pl.: $\vec{F} \cdot \vec{r} = Fr \sin \alpha$.
- Vektormennyiségek vektoriális szorzata esetén a matematikában megszokott „kereszt” jelölést alkalmazzuk, pl.: $\vec{v} \times \vec{B}$ (olvasd: v -vektor-kereszt- b -vektor).

A fizikai mennyiségek meghatározásakor alapvető kritérium a *mérhetőség*. Egy jelenség akkor írható le fizikailag, ha a leíró mennyiséget meg lehet mérni. A mérés összehasonlítást jelent egy előre meghatározott alapegységvel. A fizikai mennyiség ily módon a mennyiség számértékének és mértékegységének szorzata.

A Mértékegységek Nemzetközi Rendszere, röviden **SI** (Système International d'Unités) modern, nemzetközileg elfogadott mértékegységrendszer, amely néhány kiválasztott mértékegy-

ségen, illetve azok 10 hatványaival kifejezett többszörösein vagy törtrészein alapul. A jelenleg használt SI mértékegységrendszer a 11. Általános Súly- és Mértékügyi Konferencia (General Conference on Weights and Measures) fogadta el 1960-ban. Az SI alapmennyiségei és ezek alapmértékegységei a következők:

1. Hosszúság

A hosszúság jele az l (longitúdó), használatosak ezen kívül: s (út), r (sugár), x, y, z (helykoordináták), h (magasság), d (vastagság, ill. átmérő) stb.

A hosszúság alapegysége a méter, amely a 86-os tömegszámú kriptonatom $2p_{10}$ és $5d_5$ energiaszintjei közötti átmenetkor keletkező sugárzás hullámhosszának 1 650 763,73-szorosával, vagy BAY Zoltán 1983-as ajánlása alapján azzal az úthosszal egyenlő, amelyet a fény vákuumban $\frac{1}{299792458}$ -ad másodperc alatt tesz meg, jele: m .

2. Idő

Az időt a fizikában t (tempus) jelöli, de használjuk a τ (rövid időtartam) és a T (periódusidő) jelöléseket is.

Az idő alapegysége a másodperc (szekundum), ami a 133-as tömegszámú céziumatom két hiperfinom energiaszintje közötti átmenetnek megfelelő sugárzás 9 192 631 770 periódusának időtartamával egyenlő, jele: s .

3. Tömeg

Jele az m (massa), valamint M (nagy tömeg) és μ (kis tömeg).

A tömeg mértékegysége a kilogramm, ami a nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatal által Sèvres-ben (Párizs mellett) őrzött 90% platina és 10% irídium ötvözetből készült hengernek, a nemzetközi kilogramm-prototípusnak a tömegével egyenlő, jele: kg

4. Termodinamikai hőmérséklet

A termodinamikai vagy abszolút hőmérsékletet T -vel (temperatura) jelöljük, ezen kívül ritkábban t is használatos (más hőmérsékleti skáláknál).

Mértékegysége a kelvin, amelyet a víz hármaspontjának termodinamikai hőmérsékletének $\frac{1}{273,16}$ -od részében határoztak meg. Sir William THOMSON, Kelvin lordja tiszteletére jele: K .

5. Elektromos áramerősség

Az elektromos áramerősség jele az I , de használható i is (változó áramerősség esetén).

Mértékegysége az amper, melynek Ampère-törvény alapján megadott definíciója szerint két, egymással párhuzamos, egyenes, végtelen hosszúságú és elhanyagolhatóan kicsi kör keresztmetszetű vezetőben, amelyek vákuumban egymástól 1 m távolságban helyezkednek el, akkor folyik 1 amper erősségű áram, ha egymásra méterenként $2 \cdot 10^{-7}$ N erővel hatnak, jele: A .

6. Fényerősség

A fizikában a fényerősség vagy fényáram-erősség is az I jelet kapta (sőt mindenfajta áramlási erősséget így jelölünk).

Mértékegysége a kandela. 1 kandela a fényerőssége annak az $\frac{1}{6} \cdot 10^{-5} m^2$ területű abszolút fekete testnek, amely a platina dermedési hőmérsékletén (2042 K), 101325 Pa nyomáson sugároz. Ilyen egy közönséges viaszgyertya fényereje is, innen az elnevezés (candle), jele: *cd*.

7. Anyagmennyiség

Az anyagmennyiség jele az n .

Mértékegysége a mól, ami annyi darab részecskét jelent, ahány darab atom van 0,012 kg ^{12}C -ben, jele: mol.

A Fizika a legegzaktabb tudomány, mert a jelenségek leírásához képes legmélyebben felhasználni a matematika nyelvét. A törvényeket megfogalmazhatjuk szavakban, azonban a matematikai *összefüggés* az, ami ellentmondásmentesen, bármely nemzetiségű és anyanyelvű ember számára ugyanazt jelenti.

A tankönyv olvasása során kitartást és sikert kívánunk olvasóinknak a tananyag elsajátításához, és kívánjuk, hogy szeressen meg egy olyan tudományt, amelyet nem az ember alkot, hanem szeretne megismerni, és céljainak megfelelően hasznosítani. Ehhez útravalóul egy utolsó idézet:

„Aki a Planck-állandóról beszél, és nem érzi azt, hogy egy kicsit remeg a hangja, az nem értett az egészből semmit!”

Teller Ede

Kelt: Kaposváron, 2013. év április havában.

Walter Norbert
szerkesztő

1. Mechanika

A *Mechanika* a testek mozgását és a mozgás változását, azok okait kutató tudományterület.

A XX. század tudományos eredményeiből arra lehet következtetni, hogy a természeti törvényekre, jelenségekre vonatkozó ismereteink nem örök életűek. Az elméletek fejlődése és a mérések finomodásával általánosabb érvényű törvények léphetnek a régiek mellé vagy helyére. Jó példa erre a Klasszikus mechanika és a Relativisztikus mechanika. Kimutatható, hogy a fénysebességhez képest nagyságrendekkel kisebb sebességű mozgásoknál (ilyen a makroszkopikus testek mozgása) a relativisztikus mechanika nagy pontossággal ugyanazokra az eredményekre vezet, mint a klasszikus (newtoni) mechanika. A Kvantummechanika az atomi méretekhez képest több nagyságrenddel nagyobb méretű és tömegű testek esetében szintén a klasszikus mechanikai közelítéshez vezet. Mi ebben a részben csak klasszikus mechanikai problémákkal foglalkozunk, ezen belül is nagyobb hangsúlyt fektetünk a pontszerűnek tekinthető, tömeggel rendelkező testekre, anyagi pontokra.

1.1. Anyagi pont kinematikája

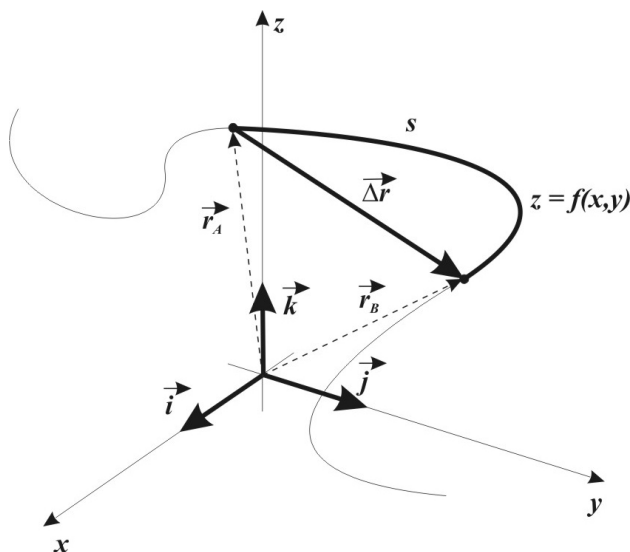
1.1.1. Mechanikai alapfogalmak, vonatkoztatási rendszerek, helyvektor

Egy testet *tömegpontnak* (anyagi pontnak, pontszerű testnek) tekinteni mindig valamilyen közelítést jelent. A körülmények, a környezet és a vizsgálati pontosság iránti igény dönti el, hogy ez a közelítés megengedhető-e. A *Kinematikában* azt vizsgálják, hogy *melyek a mozgás jellemzői*: a tömegpont hol tartózkodik adott időpillanatban egy választott koordináta-rendszerben, mekkora ott a sebessége és a gyorsulása. Ezeket mozgásegyenletekben fogjuk kifejezni. Nem vizsgáljuk ugyanakkor a mozgás *okait*, ezt majd a dinamikában (kinetikában) tesszük meg.

Koordináta-rendszert mindig célszerűségi alapon választunk, az adott problémához legjobban illeszkedőt, ahol a mozgást a legegyszerűbben lehet leírni a matematika eszközeivel. A koordináta-rendszert *valamilyen objektumhoz rögzítve* képzeljük el. Az, hogy mihez rögzítjük a koordináta-rendszert, alapvetően befolyásolja a benne történt mozgás milyenségét, a mozgást jellemző egyenleteket. Például egy egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonatban a vonathoz rögzített koordináta-rendszerben annak kerekei *egyenletes körmozgást* végeznek. Ugyanezen kerék egy pontja a Földhöz rögzített koordináta rendszerből nézve *ciklois* pályán mozog. A vonatban álló személy által leejtett tárgy egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgást (szabadesést) végez a vonathoz rögzített koordináta-rendszerben, míg a Földhöz rögzített koordináta-rendszerben parabola pályán mozog (vízszintes hajítás).

1.1.1.1. A Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer

A mozgások leírásakor a matematikai előismeretekre való tekintettel legtöbbször a derékszögű *Descartes-féle koordináta-rendszert* fogjuk használni (1.1. ábra), melynek tengelyeit x , y , z -vel, és az origóból (O) kiinduló tengely irányú egységvektorokat \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} -val jelöljük (a betű fölötti vízszintes nyíl vektormennyiségre utal).



1.1. ábra: Pálya, út, elmozdulás

Ebben a rendszerben mindhárom koordinátatengely merőleges a másik kettőre, mindhárom helykoordináta az origótól mért adott irányú távolságot jelöli, valamint x , y és z úgy követik egymást, mint ahogy jobb kezünk egymásra páronként merőlegesen kinyújtott hüvelyk-, mutató- és középső ujja.

A tömegpont (P) helye az $\vec{r}(t)$ helyvektorával jellemezhető, melynek P pontba mutató végpontja a t idő függvényében általános esetben valamilyen térgörbén, az ún. pályán halad (1. Animáció: Pálya, út, elmozdulás). Az $\vec{r}(t)$ helyvektor felírható a tengelyek irányába mutató összetevő vektorok eredőjeként:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

ahol $x(t)$, $y(t)$ és $z(t)$ az $\vec{r}(t)$ helyvektor abszolút értékének időtől függő komponensei, vagy ún. trajektóriái.

Ez azt jelenti, hogy a P tömegpont mozgása – ebben a vonatkoztatási rendszerben – három, egymásra merőleges egyenes vonalú mozgás *szuperpozíciója* (összetevése).

Az $\vec{r}(t)$ függvény matematikailag egy úgynevezett egyparaméteres (a paraméter a t idő) vektor-skalár függvény, amelyre a matematikában tanultakat lehet alkalmazni.

Az $\vec{r}(t)$ abszolút értéke (hossza), vagyis $|\vec{r}(t)|$ a Pitagorasz-tétel alapján kiszámítható. Adott t időpillanat esetén:

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}.$$

1.1. Példa: A helyvektor számítása

Legyen $\vec{r}(t) = \frac{1}{2}t\vec{i} + t^2\vec{j} + 2\vec{k}$ a tömegpont pályaegyenlete (a számadatok SI-ben megadott értékek). Kérdések:

- Hol tartózkodik a tömegpont a $t_1 = 1$ s és $t_2 = 2$ s időpillanatokban?
- Milyen távol van a tömegpont ekkor az origótól?
- Honnan indult a tömegpont?

Megoldás:

a) A tömegpont helye:

$$\vec{r}(t_1) = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k},$$

azaz a tömegpont $t_1 = 1$ s-nál a $P\left(\frac{1}{2}; 1; 2\right)$ pontban tartózkodik,

$$\vec{r}(t_2) = \vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k},$$

azaz a tömegpont $t_2 = 2$ s-nál a $Q(1; 4; 2)$ pontban tartózkodik.

b) Az origótól való távolsága:

$$|\vec{r}(t_1)| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{21}{4}} \text{ m},$$

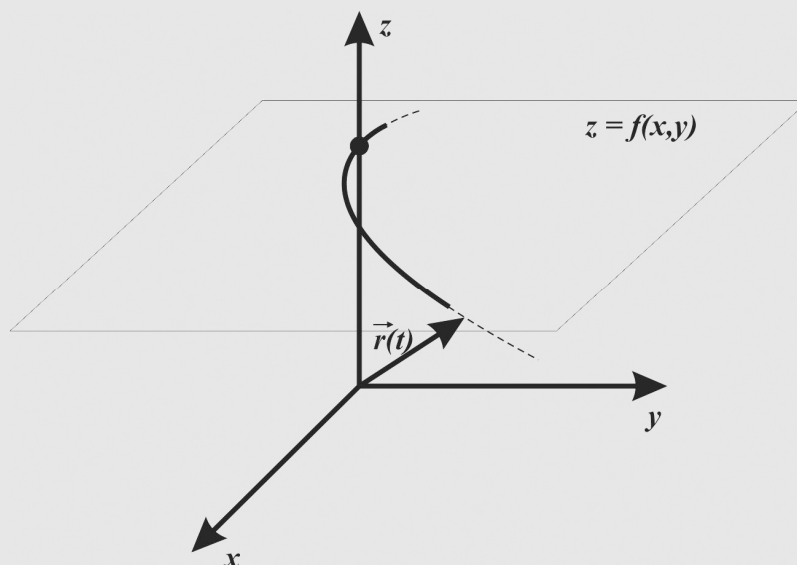
$$|\vec{r}(t_2)| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21} \text{ m}.$$

c) Indulásának helye:

A tömegpont $t_0 = 0$ s esetén $\vec{r}(t_0) = 2 \cdot \vec{k}$, azaz a $t_0 = 0$ s-nál a $P_0(0; 0; 2)$ pontban tartózkodott.

Mivel a $z(t) = 2$ m konstans, nem függ az időtől, ezért a mozgás síkmozgás, amely sík az x-y síkkal párhuzamos („vízszintes”) és a z tengely $z = 2$ m ponton dőfi (ahonnan a mozgás éppen indul, (1.2. ábra).

Mivel $x(t) = \frac{1}{2}t$ és $y(t) = t^2$, ezért a pálya paraméteres skalár egyenletrendszeréből t kiküszöbölhető és ekkor a mozgásegyenlet Descartes-féle koordináta-rendszerben, nem paraméteresen $y = 4x^2$, amely *parabola* (1.2. ábra).♣

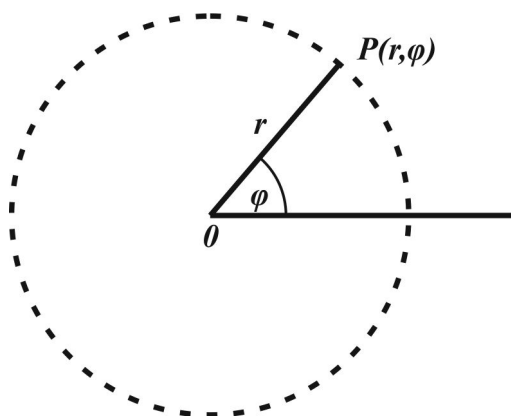


1.2. ábra: Parabolapálya a $z = 2$ síkban

1.1.1.2. Polárkoordináta-rendszerek

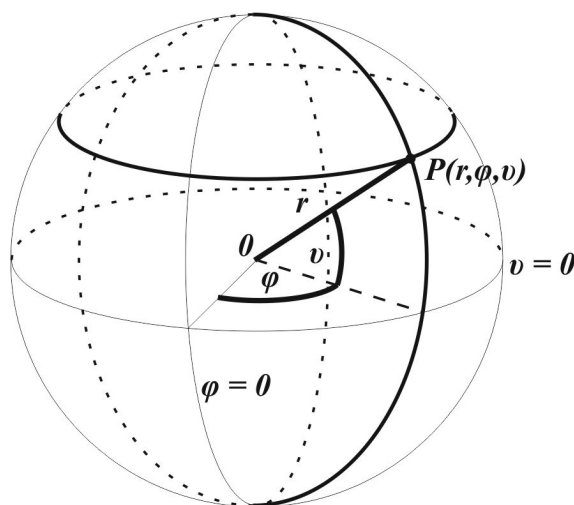
A hely megadására és a helykoordinátákból származtatott fizikai mennyiségek számítására a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer mellett a *síkbeli* és a *gömbi polárkoordináta-rendszert* is használhatjuk. Alkalmazásuk olyan esetekben indokolt, ahol a mozgás szimmetriája könnyebbé teszi a velük való számolást.

A *síkbeli polárkoordináta-rendszer* egy adott P pont síkbeli, körszimmetrikus mozgásokor használhatjuk. Itt a P pont helyzetét az origótól mért r távolság és egy adott referencia-irányhoz képesti φ szögelfordulás jellemzi. Az r sugár értéke 0-tól $+\infty$ -ig mehet, míg a φ polárszög $+\infty$ és $-\infty$ között bármilyen értéket felvehet (1.3. ábra).



1.3. ábra: Síkbeli polárkoordináta-rendszer

Térbeli mozgásnál, vagy gömbszimmetriával rendelkező probléma megoldásánál az egyik leggyakrabban alkalmazott rendszer a *gömbi koordináta-rendszer*, amelyet például a Földön való tájékozódáskor, az ún. földrajzi koordináta-rendszerben is alkalmaznak. Adott P pont helyét ilyenkor három koordináta jellemzi: az origótól mért r távolság vagy sugár, a referencia-irányhoz képesti vízszintes φ szögelfordulás vagy *azimutuszög* (a Földön ez a hosszúsági fok), valamint a referencia-irányhoz képesti függőleges ν szögelfordulás vagy *polárszög* (a Földön ez a szélességi fok, 1.4. ábra).



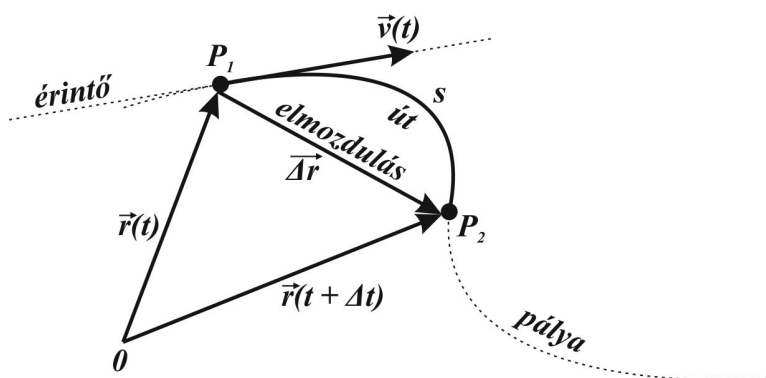
1.4. ábra: Gömbi koordináta-rendszer

1.1.2. A sebesség

Tartózkodjon a t időpillanatban a tömegpont a pályának az $\vec{r}(t)$ helyvektorral jellemzett P_1 pontjában, $\Delta t > 0$ idő múlva, vagyis a $t + \Delta t$ időpillanatban pedig az $\vec{r}(t + \Delta t)$ helyvektorral jellemzett P_2 pontban. Ekkor az anyagi pont Δt idő alatti *elmozdulása*:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t).$$

Ezalatt az 1.5. ábra szerint a tömegpont a pálya teljes vagy egy részének $\widehat{P_1 P_2}$ ívhosszát teszi meg, amelyet $s \equiv \widehat{P_1 P_2} \geq |\Delta \vec{r}|$ *útnak* nevezünk. Az s út tehát egyenes vonalú pálya esetén az elmozdulás abszolút értékével azonos nagyságú, görbe vonalú pálya esetén pedig kisebb annál.



1.5. ábra: Sebesség

A $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ hányadost *átlagsebességnek* nevezzük (iránya $\Delta \vec{r}$ irányába mutat), amely Δt csökkenésével egyre jobban megközelíti a P_1 pontbeli *pillanatnyi sebességét*, amelynek pontos értéke

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t),$$

és számértéke megmutatja, hogy mekkora állandó sebességgel haladna tovább a test, ha az adott pillanatban megszűnne a sebesség változása.

Megjegyzés:

A mennyiség fölé írt pont ($\dot{\vec{r}}(t)$)-t olvasd: *r*-pont-*t* az idő szerinti deriválás megkülönböztetésére szolgál, a továbbiakban is ezt a jelölésrendszert fogjuk követni.

A pillanatnyi sebességvektor tehát az $\vec{r}(t)$ helyvektor idő szerinti első deriváltja. Ennek $|\dot{\vec{r}}(t)|$ abszolút értéke a sebesség nagysága:

$$v = |\dot{\vec{r}}(t)| = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

A sebesség definíciója alapján SI-beli mértékegysége a méter per másodperc, jele: $\frac{m}{s}$. Gyak-

ran használt, nem SI-egysége a $\frac{km}{h}$, az átváltás: $1 \frac{m}{s} = 3,6 \frac{km}{h}$.

1.2. Példa: A sebesség számítása

- a) Számítsuk ki az 1.1. Példában szereplő tömegpont sebességét a sebesség általános definíciója alapján!
- b) Mekkora a tömegpont sebessége induláskor?

Megoldás:

- a) A test sebessége a helyvektor idő szerinti deriváltja:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{1}{2}\vec{i} + 2t\vec{j},$$

azaz a sebességvektor komponensei:

$$v_x = \frac{1}{2} \frac{m}{s}, \quad v_y = 2t \frac{m}{s}, \quad v_z = 0 \frac{m}{s},$$

és így

$$v = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 4t^2} \frac{m}{s}.$$

Innen a tömegpont sebessége $t_1 = 1$ s és $t_2 = 2$ s időpillanatokban:

$$\vec{v}(t_1) = \dot{\vec{r}}(t_1) = \frac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j},$$

tehát:

$$v(t_1) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2} \frac{m}{s} = \sqrt{\frac{17}{4}} \frac{m}{s},$$

valamint:

$$\vec{v}(t_2) = \dot{\vec{r}}(t_2) = \frac{1}{2}\vec{i} + 4\vec{j},$$

tehát:

$$v(t_2) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4^2} \frac{m}{s} = \sqrt{\frac{65}{4}} \frac{m}{s}.$$

- b) A tömegpont sebessége induláskor:

A $\vec{v}(t)$ függvény alapján:

$$\vec{v}(t_0) = \frac{1}{2} \cdot \vec{i},$$

azaz:

$$v_x = \frac{1}{2} \frac{m}{s}, \quad v_y = 0 \frac{m}{s}, \quad v_z = 0 \frac{m}{s},$$

és így:

$$v = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{1}{2} \frac{m}{s}.$$

Az 1.5. ábra alapján nyilvánvaló, hogy a sebességvektor iránya a test pályájának P_1 pontbeli érintőjének irányába mutat.♣

1.1.3. A gyorsulás

A *gyorsulásvektor* (röviden gyorsulás) a sebességvektor változási gyorsaságát jellemzi, és számértéke megmutatja az egységnyi idő alatti sebességváltozást. Definíciója alapján:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k},$$

ahol $a_x = \ddot{x}(t)$, $a_y = \ddot{y}(t)$, $a_z = \ddot{z}(t)$, a gyorsulásvektor skalár komponensei.

A gyorsulásvektor tehát a sebességvektor idő szerinti első deriváltja, illetve a helyvektor idő szerinti második deriváltja. Iránya $\Delta \vec{v}(t)$ sebességváltozás irányával megegyező, nagysága pedig:

$$a = |\vec{a}(t)| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Definíciója alapján SI-beli mértékegysége méter per másodperc a négyzetben, vagyis $\frac{m}{s^2}$.

1.3. Példa: A gyorsulás számítása

Számítsuk ki az 1.1. Példában szereplő tömegpont gyorsulását a gyorsulás definíciója alapján!

Megoldás:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = 2\vec{j},$$

ahol

$$a_x = 0 \frac{m}{s^2}, \quad a_y = 2 \frac{m}{s^2}, \quad a_z = 0 \frac{m}{s^2},$$

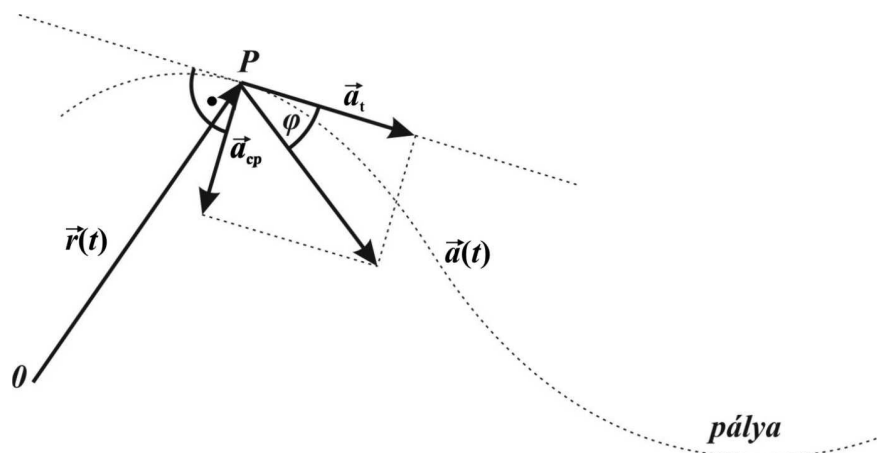
azaz a tömegpont y irányban egyenletesen gyorsul

$$a = |\vec{a}(t)| = a_y = 2 \frac{m}{s^2}$$

nagyságú állandó gyorsulással.♣

Ha a tömegpont egyenes vonalú pályán halad, akkor $\vec{v}(t)$ sebességvektorának és $\vec{a}(t)$ gyorsulásvektorának iránya egy egyenesbe esik. Ebben az esetben célszerű a koordináta-rendszert úgy felvenni, hogy a mozgás valamelyik tengelyre essen. Ezzel a feladat skalár-mennyiségekkel való számolásra egyszerűsödik.

Nem egyenes vonalú mozgás esetén a gyorsulásvektor nem esik egy egyenesbe a sebességvektorral, hanem azzal bizonyos szöget zár be (1.6. ábra).



1.6. ábra: Gyorsulás

A $\vec{v}(t)$ sebességvektor és az $\vec{a}(t)$ gyorsulásvektor által kifeszített síkot a térgörbe (pálya) P pontjához tartozó simuló síkjának nevezzük. Az $\vec{a}(t)$ gyorsulásvektor ekkor felbontható egy $\vec{a}_t(t)$ érintőirányú (tangenciális irányú, vagy ún. pályamenti) és egy arra, valamint a sebességvektorra merőleges, vagy ún. normális irányú $\vec{a}_n(t)$ komponensre:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_n(t) + \vec{a}_t(t).$$

1.1.4. Szabadesés, nehézségi gyorsulás

Tapasztalat szerint a Föld felszínéhez közel szabadon elengedett test a tömegétől függetlenül állandó nagyságú gyorsulással mozog a Föld felé (amennyiben a levegő közegellenállásától eltekinthetünk), más néven szabadesést végez. A gyorsulás neve *nehézségi gyorsulás*, melyet megkülönböztetésképpen g -vel jelölünk. A nehézségi gyorsulás vektormennyiség, iránya a Föld tömegközéppontja felé mutat (függőlegesen lefelé). Könnyen belátható, hogy g értéke függ a földfelszíntől mért magasságtól (valójában a Föld tömegközéppontjától mért távolságtól), azonban nem ennyire magától értetődő, hogy a földrajzi szélességtől is. Magyarország földrajzi szélességén g értéke $9,81 \frac{m}{s^2}$ körüli.

1.4. Példa: Szabadon eső test mozgása

Határozzuk meg a zérus kezdősebességgel h magasságból induló, szabadon eső test mozgásegyenleteit!

Megoldás:

Zérus kezdősebességgel h magasságból induló, szabadon eső test mozgásegyenletét adott t időpillanatbeli $z(t)$ magasságával, $v(t)$ sebességével és $a(t)$ gyorsulásával adhatjuk meg.

a) A magasság:

$$z(t) = h - \frac{g}{2}t^2,$$

b) a sebesség:

$$\vec{v}(t) = \vec{g}t,$$

c) a gyorsulás pedig:

$$a(t) = g = \text{állandó} \spadesuit$$

1.1.5. Vízszintes hajítás

A vízszintesen v_0 kezdősebességgel elhajított test mozgását a vízszintes x irányban és a függőleges z irányban vizsgáljuk. Mivel mozgása z irányban változik (szabadesést végez), x irányban pedig nem, összetett mozgását a két irányban történő $x(t)$ és $z(t)$ komponensek trajektóriái határozzák meg.

1.5. Példa: Vízszintesen elhajított test mozgása

Határozzuk meg a v_0 kezdősebességgel vízszintesen elhajított test mozgásegyenleteit!

Megoldás:

A h magasságban v_0 kezdősebességgel vízszintesen elhajított test mozgásegyenleteit a t időpillanatbeli $\vec{r}(t)$ helyével, $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ sebességével és $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$ gyorsulásával adjuk meg.

a) A hely:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + z(t)\vec{k} = v_0t\vec{i} + \left(h - \frac{g}{2}t^2\right)\vec{k}.$$

b) A sebesség:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = v_0\vec{i} - g\vec{k},$$

melynek nagysága

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2},$$

iránya a pálya adott pillanatbeli érintőjének irányával esik egybe.

c) A gyorsulás pedig:

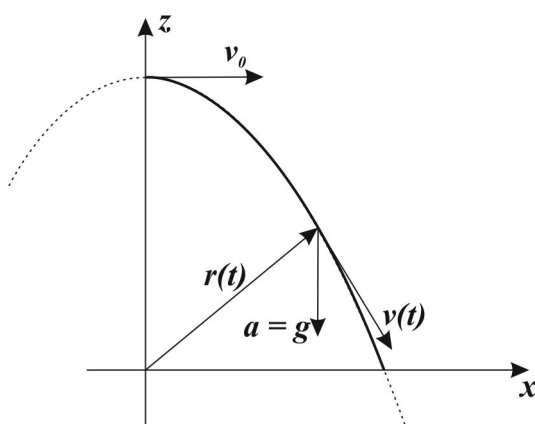
$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}(t) = -g\vec{k},$$

melynek nagysága $g = \text{állandó}$, iránya függőlegesen lefelé mutat.

Mivel $x(t) = v_0 t$ és $z(t) = h - \frac{g}{2} t^2$, a paraméteres egyenletrendszerből t kiküszöbölésével a pálya egyenlete:

$$z(x) = h - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + h,$$

amely *parabola*.♣



1.7. ábra: Vízszintes hajítás

1.1.6. Egyenletes körmozgás

Egyenletes körmozgásról akkor beszélünk, ha a *test pályája kör*, és *egyenlő időközök alatt egyenlő nagyságú íveket fut be*. A körmozgás összefüggései könnyen megérthetők, ha analógiát vonunk az egyenesvonalú egyenletes mozgás és az egyenletes körmozgás között.

Amikor az egyenesvonalú mozgásnál s útról beszélünk, akkor a körmozgásnál egy bizonyos kiinduló helyzettől mért φ szögelfordulásról, melynek SI-beli mértékegysége a radián, amit azonban l -gyel jelölünk.

A körmozgások jellemzője a T *keringési idő* vagy *periódusidő*, ami egy teljes kör megtételéhez szükséges időt jelent.

A periódusidő reciproka, vagyis az egységnyi idő alatt megtett körök száma az n *fordulatszám*.

A definícióból világos, hogy $n = \frac{1}{T}$, SI-beli mértékegysége az $\frac{1}{s}$ (valójában $\frac{\text{fordulat}}{s}$).

Az egyenes vonalú mozgásnál az egységnyi idő alatt megtett út nagysága számértékileg a v sebességgel egyenlő, aminek a megfelelője körmozgás esetén az egységnyi idő alatti szögelfordulás vagy ω *szögsebesség*, SI-beli mértékegysége a $\frac{\text{rad}}{s} = \frac{1}{s}$. A szögsebesség kiszámítható

tó egy adott szögelfordulás és az ehhez tartozó idő hányadosaként. Egy teljes kör megtételéhez, vagyis 2π radián szögelforduláshoz T idő szükséges, ezért

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n.$$

Megjegyzés:

Valójában a szögsebesség is vektormennyiség, amelynek iránya a körmozgás síkjából merőlegesen felfelé mutat, ha a mozgás az óramutató járásával ellentétes, lefelé, ha az óramutató járásával megegyező irányban történik.

Egyenesvonalú egyenletes mozgásnál az út $s = vt$ alapján számítható ki, egyenletes körmozgásnál pedig a szögelfordulás $\varphi = \omega t$ szerint.

Az egyenesvonalú egyenletes mozgás gyorsulása zérus, hiszen a sebesség nem változik. Ebben azonban a körmozgás különbözik tőle, mert ilyenkor a sebességvektor iránya változik. Gyorsulásról pedig minden olyan esetben beszélünk, amikor a sebességvektornak bármelyik jellemzője (akár a nagysága, akár az iránya) megváltozik. Egyenletes körmozgás esetén a sebességvektor nagysága állandó ugyan, de az iránya minden pillanatban más és más, ezért ezért normál irányú gyorsulása van, amelyet körmozgásnál *centripetális gyorsulásnak* hívunk:

$$a_{cp} = r\omega^2,$$

melynek iránya minden pillanatban a kör középpontja felé mutat.

Megjegyzés:

Az egyenletesen változó mozgásnál definiált gyorsulással analóg mennyiség egyenletesen változó körmozgás esetén az ún. β szöggyorsulás, SI-beli mértékegysége az $\frac{1}{s^2}$, és ennél is igaz, hogy:

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Az ω szögsebesség és a körpálya sugarának szorzata a *kerületi sebesség*:

$$v_k = r\omega.$$

Vegyük észre, hogy a körmozgásnál a hely meghatározásakor a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer helyett a közszimmetria miatt a síkbeli polárkoordináta-rendszert használtuk a mozgás leírásához. A kör r sugara állandó, a φ szögelfordulás a polárszög, melynek nagysága függ az időtől. A körmozgás természetesen leírható Descartes-koordinátákkal is, de ebben az esetben a leírás lényegesen bonyolultabb lenne, hiszen mindkét koordináta időbeli változása szinusz-, ill. koszinusz-függvénnyel adható meg:

$$x(t) = r \cos \omega t,$$

valamint:

$$y(t) = r \sin \omega t,$$

míg polárkoordinátákkal a mozgásegyenletek:

$$r = \text{állandó},$$

és

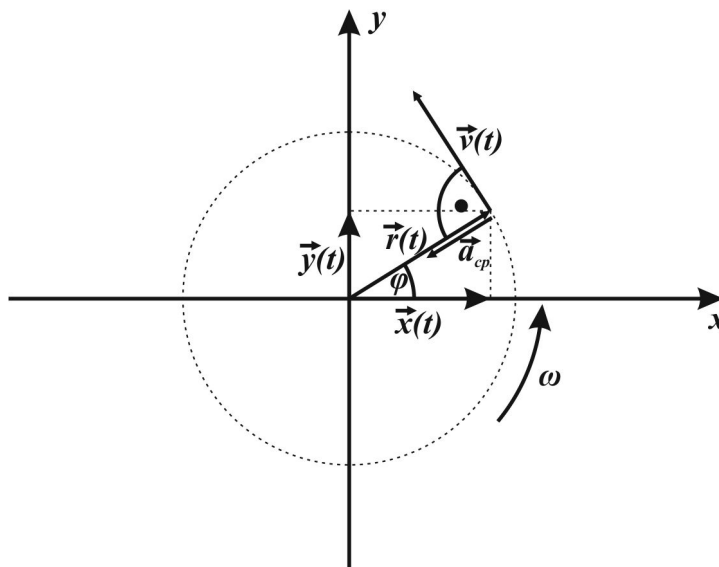
$$\varphi = \omega t$$

alakúra egyszerűsödnek.

Ha a körmozgás nem a vízszintestől indul, hanem φ_0 kezdeti szögelfordulástól, akkor a függvény Descartes-koordinátákkal történő leírása

$$x(t) = r \cos(\omega t + \varphi_0), \text{ illetve } y(t) = r \sin(\omega t + \varphi_0)$$

alakú lesz. Az elmondottakat a 1.8. ábra szemlélteti.



1.8. ábra: Egyenletes körmozgás

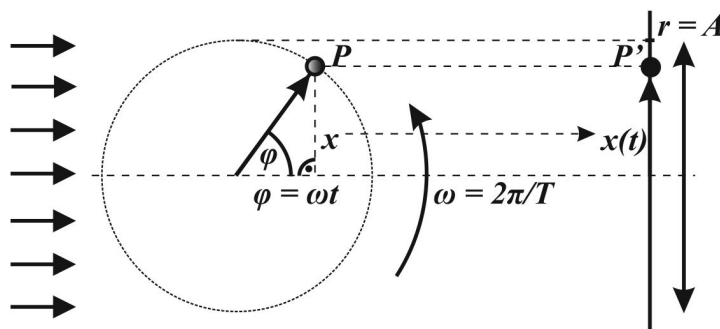
1.1.7. Harmonikus rezgőmozgás

A mechanikai rezgések az *anyagi pontnak*, vagy tömegpontokból álló anyagi rendszernek *periodikusan ismétlődő állapotváltozásai*.

Harmonikus rezgésről akkor beszélünk, ha a mozgás út-idő függvénye *szinusz* vagy *koszinusz* függvény. Az alábbiakban bemutatjuk, hogy az egyenletes körmozgásnak a kör síkjára merőlegesen elhelyezett falra vetített képe harmonikus rezgőmozgást végez ([2. Animáció: Harmonikus rezgőmozgás](#)). Ideális esetben ugyanilyen mozgást végez egy rugóra akasztott test is (*l. később*).

1.1.7.1. Kitérés-idő függvény

Vizsgáljuk meg az 1.9. ábra szerinti elrendezést, amelyen egy P pontszerű test r sugarú pályán, ω szögsebességű (ill. T periódusidejű és n fordulatszámú) egyenletes körmozgást végez. Ezt a mozgást a körmozgás síkjára merőlegesen elhelyezkedő falra vízszintesen kivetítjük, amelyen P' pont a test árnyéka. Határozzuk meg P' pillanatnyi helyét az idő függvényében.



1.9. ábra: A harmonikus rezgőmozgás pillanatnyi kitérése

A hely megadásához egy kiindulópontra (origóra) van szükség, ami jelen esetben a körmozgás vízszintes pozíciójának megfelelő állapota, az úgynevezett *egyensúlyi helyzet*. Az egyensúlyi helyzetet az 1.9. ábrán vízszintes szaggatott vonal szemlélteti. Ebben az esetben P' pillanatnyi helyét az egyensúlyi helyzettől mért távolsággal lehet jellemezni, amit x *kitérésnek* nevezünk. A kitérés pillanatról pillanatra változik, de értékei periodikusan ismétlődnek, maximális értéke az A *amplitúdó*, az egyensúlyi helyzettől mért legnagyobb távolság. Látható, hogy az amplitúdó megegyezik a kör sugarával, vagyis: $A=r$.

A kitérés értéke ugyanakkora, mint a körmozgásnál berajzolt, a P pontot és az egyensúlyi helyzetet jelölő vízszintest összekötő x szakasz. A derékszögű háromszögből leolvasható, hogy

$$x = r \sin \varphi.$$

Mivel a körmozgás egyenletes, ezért

$$x(t) = r \sin \omega t.$$

A fentiek figyelembe vételével a rezgőmozgás *kitérés-idő függvénye* $A=r$ helyettesítéssel:

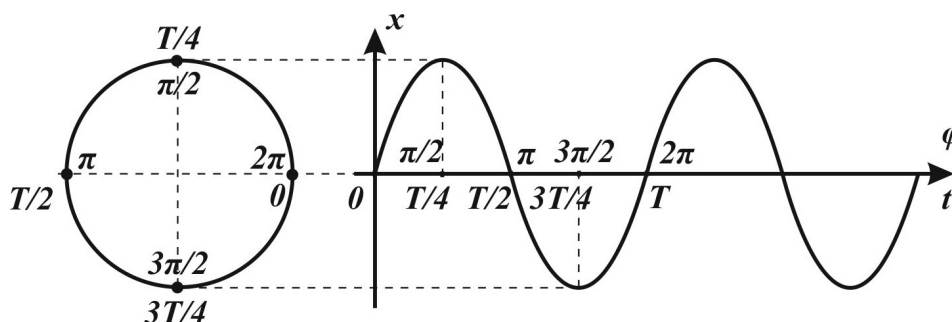
$$\boxed{x(t) = A \sin \omega t}$$

Megjegyzések:

1. Ha a körmozgás nem a vízszintestől indul, hanem φ_0 kezdeti szögelfordulástól, akkor a függvény $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ alakú lesz.
2. A függőleges irányú vetület nagysága $y(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ lenne, vagyis a körmozgás felbontható két, egymásra merőleges harmonikus rezgés eredőjére.

1.1.7.2. Fázisszög

Körmozgás esetén φ és ω szemléletes fizikai mennyiségek: szögelfordulás, ill. szögsebesség. De mi a jelentésük a harmonikus rezgőmozgás esetén, ami egyenesvonalú mozgás, így ennél szögről és szögsebességről beszélni nem szerencsés, azonban mégis szerepelnek a kifejezésben. Ehhez a kitérés-idő függvényt ábrázoljuk (1.10. ábra):



1.10. ábra: Fázisszög

A vízszintes tengelyen ábrázoljuk az időt. Ekkor egy teljes rezgés annyi idő alatt zajlik le, amennyi idő alatt a körmozgást végző pont egy teljes kört megtesz (T). Ugyanakkor azt is megtehetjük, hogy a kitérést az idő helyett φ függvényében ábrázoljuk, hiszen φ és t arányosak egymással ($\varphi = \omega t$ miatt). Ekkor a rezgés bármely pillanatbeli állapotának megfelel egy-egy szög dimenziójú mennyiség, amelynek a számértéke a körmozgás pillanatnyi szögelfordulásával egyenlő, jelentése azonban nem „szög” hanem *rezgésállapot* vagy *fázis*. Eszerint a 0 fázis megfelel az *egyensúlyi helyzetnek*, $\frac{\pi}{2}$ a *maximális kitérésnek*. Amikor a rezgés először visszatér az egyensúlyi helyzetbe, a fázisa π , de ez a rezgésállapot nem azonos a 0 fázissal, mert a sebessége ellentétes irányú a kiinduló helyzethez képest (a körmozgás esetén P pont az ellentétes oldalon van). A rezgésállapot akkor lesz ismét azonos a kiinduló állapottal, amikor a körmozgást végző pont egy teljes kört megtett, vagyis szögelfordulása 2π , közben $\frac{3\pi}{2}$ -nél P' ismét maximális kitérésű volt az előzőhöz képest ellenkező irányban.

A fentiek alapján definiálunk két fogalmat:

1. *Azonos fázisúnak* nevezünk két rezgést vagy egy rezgés azon állapotait, amikor a fáziskülönbség:

$$\Delta\varphi = (2n - 2)\pi,$$

ahol $n = 1, 2, \dots$. Tehát ilyen esetekben a fáziskülönbség értéke $0, 2\pi, 4\pi$ stb. lehet.

2. *Ellentétes fázisúnak* nevezünk két rezgést vagy egy rezgés azon állapotait, amikor a fáziskülönbség

$$\Delta\varphi = (2n - 1)\pi,$$

ahol $n = 1, 2, \dots$. Tehát ilyenkor a fáziskülönbség $\pi, 3\pi, 5\pi$ stb.

Az ω jelentése körmozgásnál szögsebesség, ami a számértékileg szögelfordulás változási gyorsaságával egyenlő. Rezgőmozgásnál ugyanez a számérték a rezgési fázis változási gyorsaságát jelenti, neve *körfrekvencia*. Kiszámítása:

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

SI-beli mértékegysége: $\frac{1}{s}$ (valójában $\frac{rad}{s}$).

1.1.7.3. Sebesség-idő függvény

A harmonikus rezgőmozgás sebesség-idő függvényét kétféle módon lehet levezetni: a kitérés-sel analóg módon geometriailag vagy differenciálással.

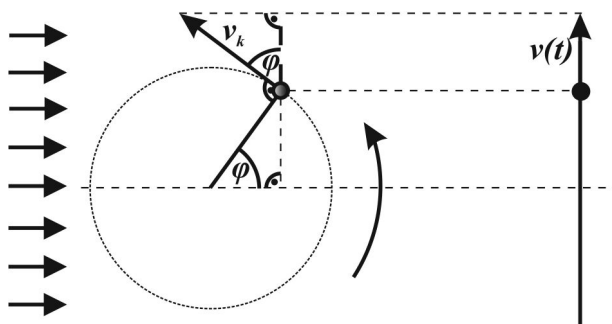
1.1.7.3.1. Geometriailag

A geometriai levezetésnél három dolgot kell figyelembe venni:

1. A rezgőmozgás $\vec{v}(t)$ pillanatnyi sebességvektora a körmozgás \vec{v}_k kerületi sebességvektorának *függőleges* irányú komponense (1.11. ábra).
2. A kerületi sebesség és a szögsebesség $v_k = r\omega$ szerint függenek össze egymással.
3. A szögelfordulás szöge valamint a kerületi sebességvektor függőlegesssel bezárt szöge *me-rőleges szárú szögek*, tehát *egyenlők*.

Ezek alapján könnyen belátható, hogy a rezgőmozgás pillanatnyi sebessége:

$$v(t) = v_k \cos \varphi = v_k \cos \omega t = r\omega \cos \omega t = A\omega \cos \omega t .$$



1.11. ábra: Harmonikus rezgőmozgás pillanatnyi sebessége

1.1.7.3.2. Differenciálással

A sebesség-idő függvényt az út-idő függvény idő szerinti deriváltja adja meg, ezért:

$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega \cos \omega t .$$

Megjegyzés:

φ_0 kezdőfázis esetén a függvény: $v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$ alakúvá válik.

Azokban a pillanatokban, amikor a rezgőmozgást végző test az egyensúlyi helyzetben halad át ($x = 0$), a sebessége maximális, melynek nagysága:

$$v_{max} = A\omega ,$$

amikor pedig kitérése maximális, ($x_{max} = A$), akkor a sebessége zérus.

1.6. Példa: Rezgőmozgást végző test átlagos sebességnagysága

- a) Mekkora a harmonikus rezgőmozgást végző tömegpont átlagos sebességnagysága egy teljes rezgés alatt?
 b) Melyik pillanatban egyezik meg az átlagsebesség a pillanatnyi sebességgel?
 c) Hol tartózkodik ekkor a rezgő test?

Megoldás:

- a) Az átlagos sebességnagyság:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4A}{T} = \frac{4A}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{2A\omega}{\pi} = \frac{2}{\pi} v_{\max}.$$

- b) Az időpillanat kiszámítása:

$$v(t) = A\omega \cos \omega t = \frac{2A\omega}{\pi}.$$

Ebből:

$$\cos \omega t = \frac{2}{\pi},$$

és

$$\omega t = \arccos\left(\frac{2}{\pi}\right),$$

azaz:

$$t = \frac{\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)}{\omega} = \frac{T}{2\pi} \arccos\left(\frac{2}{\pi}\right).$$

- c) A test helyének kiszámítása:

Mivel

$$\cos \omega t = \frac{2}{\pi},$$

és innen

$$\cos^2 \omega t = \frac{4}{\pi^2},$$

ezért:

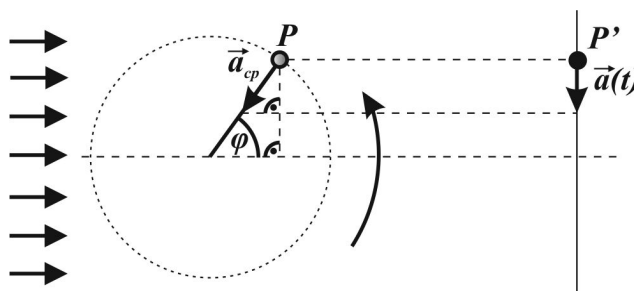
$$x = A \sin \omega t = A \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = A \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}} = \frac{A}{\pi} \sqrt{\pi^2 - 4} \approx 0,77A. \clubsuit$$

1.1.7.4. Gyorsulás-idő függvény

A gyorsulás-idő függvényt szintén le lehet vezetni geometriailag és differenciálással is.

1.1.7.4.1. Geometriailag

A harmonikus rezgőmozgás pillanatnyi gyorsulása a körmozgás *centripetális gyorsulásának függőleges* irányú komponense (1.12. ábra).



1.12. ábra: Harmonikus rezgőmozgás pillanatnyi gyorsulása

Mivel a körmozgást eleve polárkoordináta-rendszerben tárgyaltuk, és tudjuk, hogy a P pont helyzetét helyvektorral adhatjuk meg, ezért fontos figyelembe venni azt is, hogy a centripetális gyorsulás vektor az \vec{r} helyvektorral mindig ellentétes irányú:

$$\vec{a}_{cp} = -\vec{r}\omega^2.$$

A centripetális gyorsulásvektor vízszintessel bezárt szöge megegyezik a pillanatnyi szögelfordulással (φ -vel) ezért:

$$a(t) = a_{cp} \sin \varphi = a_{cp} \sin \omega t = -r\omega^2 \sin \omega t = -A\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x(t).$$

1.1.7.4.2. Differenciálással

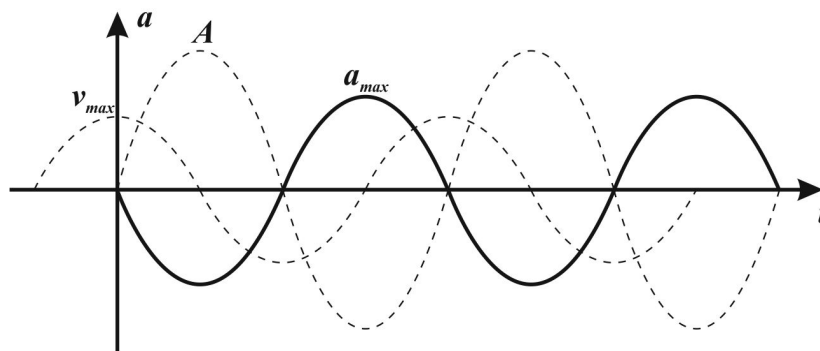
A gyorsulás-idő függvényt a sebesség-idő függvény deriválásával kapjuk meg:

$$a(t) = \dot{v}(t) = -A\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x(t).$$

Megjegyzések:

1. A gyorsulás-idő függvényben szereplő negatív előjel arra utal, hogy a pillanatnyi gyorsulás-vektor mindig ellentétes irányú a pillanatnyi kitérés-vektorral.
2. φ_0 kezdőfázis esetén: $a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)$.

A gyorsulás-idő függvényt grafikonon ábrázolva (1.13. ábra) és a kitérés-, valamint sebesség-idő grafikonnal összehasonlítva láthatjuk, hogy a gyorsulás azokban a pillanatokban maximális (értéke: $A\omega^2$), amikor a kitérés is maximális és a pillanatnyi sebesség zérus, viszont zérus azokban a pillanatokban, amikor a kitérés is zérus és a pillanatnyi sebesség maximális.



1.13. ábra: Harmonikus rezgőmozgást végző test maximális kitérése, maximális sebessége és maximális gyorsulása

1.1.8. Harmonikus rezgések összetétele

Két vagy több harmonikus rezgőmozgás eredőjeként harmonikus, és nem harmonikus (anharmonikus) rezgések, sőt nem periodikus mozgások is létrejöhetnek. Speciális esetekben ezek a mozgások jól szemléltethetők és elemi matematikai eszközökkel is kezelhetők. Mi csak a speciális esetekre mutatunk példákat.

1.1.8.1. Egy egyenesbe eső azonos frekvenciájú harmonikus rezgések összetétele

Legyen két, egy egyenesbe eső harmonikus rezgőmozgást leíró mozgásegyenlet:

$$x_1(t) = A_1 \sin \omega t,$$

és

$$x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Ekkor az eredő kitérést x_1 és x_2 összege adja:

$$x = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Ez matematikai átalakításokkal

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

alakra hozható, ahol A és φ_0 az adott adatokból kiszámítható. Megállapíthatjuk, hogy az eredő mozgás is harmonikus rezgőmozgás. ennek speciális esetei:

1.1.8.1.1. Erősítés

Ha $\varphi_0 = 0$, akkor az eredő kitérés:

$$x(t) = (A_1 + A_2) \sin(\omega t),$$

vagyis olyan harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenlete, amelynek amplitúdója az összetevő rezgések amplitúdóinak összege, a rezgések *erősítik* egymást.

1.1.8.1.2. Gyengítés

Ha $\varphi_0 = \pi$, akkor a rezgések minden pillanatban ellentétes fázisúak és ezért:

$$x(t) = (A_1 - A_2) \sin(\omega t),$$

azaz az eredő harmonikus rezgőmozgás amplitúdója az összetevők különbsége, a rezgések *gyengítik* egymást.

1.1.8.1.3. Kioltás

Ha $A_1 = A_2$, akkor $x=0$, a rezgések éppen *kioltják* egymást.

1.1.8.1.4. Lebegés

Ha a rezgések nem egyenlő frekvenciájúak, akkor nagyon sokféle eredő mozgás lehetséges. Mi azt az esetet vizsgáljuk, amikor $A_1 = A_2$ és $\varphi_0 = 0$. Ebben az esetben

$$x(t) = A(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t),$$

ami trigonometriai átalakításokkal

$$x(t) = 2A \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

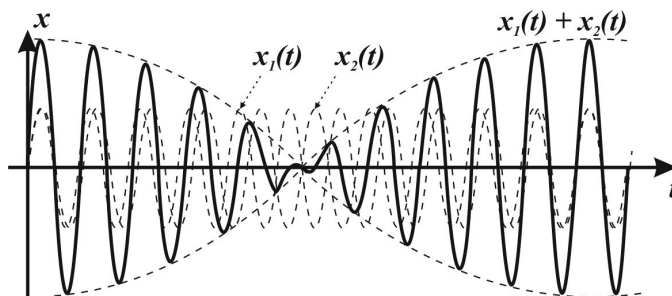
alakúra hozható.

Ez ugyan periodikus mozgás, de *nem harmonikus*. Különleges esetnek számít, amikor $\omega_1 \approx \omega_2$. Ekkor $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ bevezetésével az eredő kitérés:

$$x(t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin \omega t,$$

ami egy ω körfrekvenciájú szinuszos rezgést jelent $2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$ időtől függő amplitúdóval. Ez az amplitúdó azonban időben nagyon lassan változik $\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \ll \omega\right)$ a

szinuszos rezgés amplitúdójához képest. Ezt a jelenséget *lebegésnek* nevezik (1.14. ábra). Például ha két közel azonos frekvenciájú hangvillát egyszerre szólaltatunk meg, akkor ez a lüktető hang erősödése és halkulása jól követhető az emberi fül számára is.



1.14. ábra: Lebegés

1.1.9. Anharmonikus rezgések

Azokat a rezgéseket, amelyek nem írhatók le tisztán egyetlen szinusz- vagy koszinusz-függvénnyel, anharmonikus rezgéseknek nevezzük.

1.1.9.1. Csillapodó rezgések

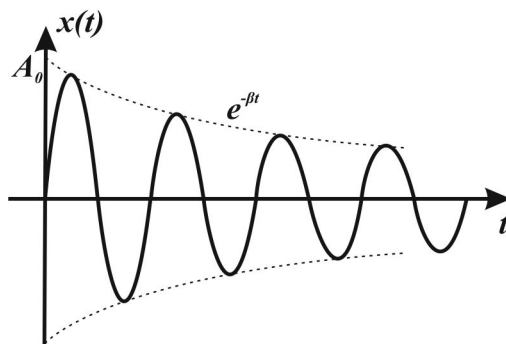
Említettük, hogy ideális esetben a rugóra akasztott test is harmonikus rezgőmozgást végez. Ideális eset azonban nem létezik, mert bizonyos befolyásoló körülmények nem zárhatók ki. Ezek lehetnek:

- közegellenállás, súrlódás
- a rugó saját tömege nem zérus
- a rugóban a deformáció hatására hő fejlődik.

Ezen befolyásoló körülmények miatt a mozgás során a rezgő test veszít az energiájából, vagyis az energia *disszipálódik*. A csillapodó rezgést az

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin \omega t$$

mozgásegyenlet írja le. Ez az egyenlet csak az $e^{-\beta t}$ szorzóban különbözik a harmonikus rezgés kitérés-idő függvényétől, ami azt eredményezi, hogy a kezdeti A_0 amplitúdó exponenciálisan csökken. Grafikonon ábrázolva láthatjuk (1.15. ábra), hogy az $e^{-\beta t}$ függvény a csillapodó rezgés grafikonjának *burkológörbéje*.



1.15. ábra: Csillapodó rezgés kitérés-idő függvénye

Azt, hogy a csillapodás milyen mértékű, az exponenciális tag kitevőjében szereplő β *csillapítási tényező* határozza meg. β értéke alapján beszélhetünk gyengén csillapított, erősen csillapított ill. túlcsillapított rezgésekről. Az a frekvencia, amit a rendszer fizikai tulajdonságai határoznak meg (a rezgő test tömege és például a rugó rugalmassági tényezője), az ún. *sajátfrekvencia*, amit általában f_0 -al jelölünk.

1.1.9.2. A Fourier-tétel

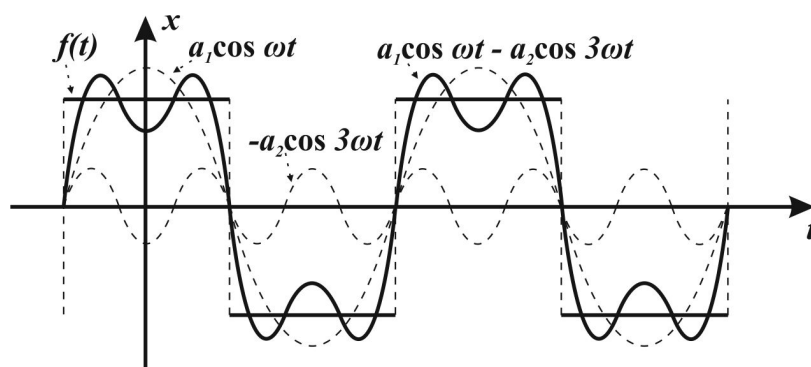
Joseph FOURIER írta le annak módszerét, hogy egy komplex jel miként írható le egyszerű szinuszrezgések végtelen összegeként. Fourier ezt az elvet differenciálegyenletek sorozatának megoldása révén a *hőszóródás* leírására használta. A matematika **Fourier-tétele** szerint min-

den periodikus, azonban nem harmonikus (anharmonikus) rezgés leírható harmonikus (szinusz- vagy koszinusz-) rezgések *végtelen sorozataként*:

$$f(x) \approx \frac{c_0}{2} + a_1 \cdot \cos \omega x + a_2 \cdot \cos 2\omega x + \dots + a_n \cdot \cos n\omega x + \\ + b_1 \cdot \sin \omega x + b_2 \cdot \sin 2\omega x + \dots + b_n \cdot \sin n\omega x$$

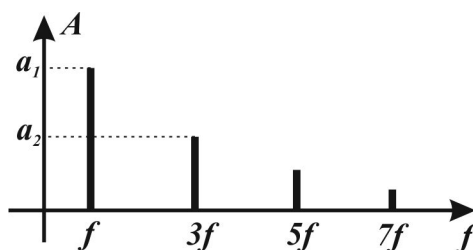
amelyben a_i és b_i csökkenő tendenciát mutatnak. Az ω neve *alapfrekvencia* (vagy alapharmonikus), aminek egész számú többszöröse a *felharmonikusok*.

A 1.16. ábra a Fourier-sor első két tagjával szemlélteti, hogy hogyan lehet egy pl. az y tengelyre szimmetrikus téglalaprezgést koszinuszfüggvényekkel közelíteni. Ha egyre több tagot adunk hozzá a sorhoz, az eredmény egyre kisebb hibával adja meg a téglalaprezgést.



1.16. ábra: Téglalap-rezgés Fourier-közelítése

Egy összetett rezgés frekvenciaeloszlását *spektrumnak* nevezzük. A spektrum lehet *folytonos*, ha a frekvenciák folytonosan, ugrás nélkül követik egymást, valamint *vonalas* (diszkrét), ha csak bizonyos frekvenciák fordulnak elő benne és ezek nem folytonosan követik egymást. A 1.17. ábra látható téglalaprezgés spektruma például vonalás, mert csak az ω , 3ω stb.-nek megfelelő f , $3f$ stb. frekvenciákat tartalmazza tendenciózusan csökkenő amplitúdóval.



1.17. ábra: Vonalas spektrum

1.1.10. Mechanikai hullámok

Ha a mechanikai rezgést végző rezgő centrumot (a gerjesztő rezgést vagy hullámforrást) rugalmas közeg veszi körül, akkor a rezgési energia képes pontról pontra továbbterjedni. A rezgés tömegpontról tömegpontra történő térben és időben való terjedését *mechanikai hullámnak* nevezzük. A hullámok terjedése

- *térbeli*, mert a hullám eljut A pontból B pontba,
- *időbeli*, mert bizonyos ideig eltart, amíg a hullám ezt a távolságot megteszi.

1.1.10.1. A mechanikai hullámok fizikai jellemzői

Periódusidő:

Két, egymáshoz legközelebb eső azonos rezgési fázisú pont időbeli távolsága, vagy másképpen fogalmazva az a legrövidebb idő, amely alatt egy adott pont ugyanabba a rezgésállapotba kerül, a hullám T *periódusideje*. Ez szükségszerűen megegyezik a hullámforrás periódusidejével. SI-beli mértékegysége a szekundum, jele: s .

Frekvencia:

Az egységnyi idő alatt kialakuló hullámok száma a hullám f *frekvenciája*, amely számértékileg megegyezik a hullámot gerjesztő rezgés frekvenciájával. SI-beli mértékegysége az

$$\frac{1}{s} = \text{Hz (hertz)}.$$

Amplitúdó:

A rezgő pontok maximális kitérését A *amplitúdónak* nevezzük. SI-beli mértékegysége a méter: m .

Hullámhossz:

Két, egymáshoz legközelebb eső azonos rezgési fázisú pont térbeli távolsága, ami megegyezik a hullámfront által T idő alatt megtett úttal, a hullám λ *hullámhossza*. SI-beli mértékegysége a méter, jele: m .

Terjedési sebesség:

Mivel a hullámok adott homogén közegben állandó sebességgel mozognak, ezért a hullámokban a rezgés *terjedési sebessége* az előzőek alapján:

$$c = \frac{s}{t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f.$$

Az összefüggésből látható, hogy egy adott sebességű hullám frekvenciája és hullámhossza fordítottan arányosak egymással, tehát egyazon terjedési sebesség esetén nagy frekvenciához kis hullámhossz, kis frekvenciához pedig nagy hullámhossz tartozik. A terjedési sebesség SI-beli mértékegysége: $\frac{m}{s}$.

1.1.10.2. Közegek összehasonlítása hullámtanilag

Ha két közegben a hullámok terjedési sebessége megegyezik, a két közeget *hullámtanilag azonosnak*, ellenkező esetben *hullámtanilag különbözőnek* mondjuk. Ha például az 1-es közegben a terjedési sebesség nagyobb, mint a 2-es számúban ($c_1 > c_2$), akkor az 1-es számú közeg *hullámtanilag ritkább*, a 2-es pedig *hullámtanilag sűrűbb*. Lehet hullámtanilag azonos két különböző közeg is. Például ha a mechanikai hullám terjedési sebessége két különböző anyag esetében azonos, akkor ezek *hullámtanilag azonosak*. Lehet azonban hullámtanilag különböző két azonos anyagból készült közeg is, ha valamely fizikai jellemzőjük különbözik. Például a levegőben a hanghullám terjedési sebességét befolyásolja a levegő hőmérséklete.

Ilyenkor két különböző hőmérsékletű levegőréteg hullámtanilag különbözik. Ugyanilyen jelenség tapasztalható a vízfelületen terjedő hullámok esetében is. A vízhullám terjedése sebessége függ a víz mélységétől. Ilyenkor a mélyebb víz hullámtanilag különbözik a sekélyebbtől.

1.1.10.3. A mechanikai hullámok csoportosítása

1.1.10.3.1. A kitérés iránya szerint

- *Transzverzálisanak* nevezzük a hullámot, ha a kitérés merőleges a terjedés irányára.
- *Longitudinális* hullámról akkor beszélünk, ha a kitérés párhuzamos a terjedési iránnyal.

1.1.10.3.2. A közeg dimenziószáma szerint

- *Egydimenziós* (1D) hullámok, amelyek vonal mentén alakulnak ki. Jó közelítéssel ilyenek egy megfeszített gumikötélen keltett hullámok.
- *Kétdimenziós* (2D) hullámok, amelyek felületen alakulnak ki. Ilyenek például a vízfelület hullámjai.
- *Háromdimenziós* (3D) hullámok, amelyek térben alakulnak ki. Ilyen a hanghullám, vagy a földrengések lökéshullámjai.

1.1.10.4. Hullámegyenlet és hullámfüggvény

A rugalmas közegben létrejövő mechanikai hullámok kialakulását leíró egyenletet – matematikai bonyolultsága miatt – nem vezetjük le. A közegben y irányban az x terjedési irányra merőlegesen (transzverzálisan) keltett zavar mozgását leíró *hullámegyenlet* parciális differenciálegyenlet, amely:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

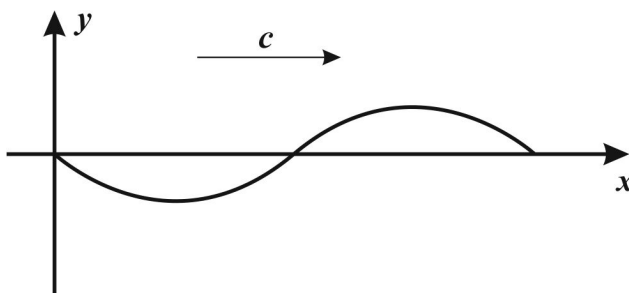
alakú, melyben c a hullám terjedési sebessége. Ennek az egyenletnek megoldása minden olyan függvény, amely teljesíti azt a feltételt, hogy az origóban keltett zavar az x koordinátájú helyre $\frac{x}{c}$ idővel később érkezzon. Matematikailag:

$$y(x, t) = y\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

Ez az *általános* matematikai *megoldás* a hullámegyenlet *fizikai megoldására* tág lehetőséget biztosít. Az olyan megoldások száma, ahol bármilyen alakú, bármilyen gerjesztő rezgés vagy impulzus által elindított hullámok alakulnak ki és c sebességgel haladnak az x tengely mentén, gyakorlatilag végtelen. A sokféle megoldás közül azonban tárgyalásunk szempontjából különösen fontosak az

$$y(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

alakú *harmonikus hullámfüggvények*. A vonal mentén terjedő hullám képét az origótól való indulás után számított t időpillanatban ábrázolja az 1.18. ábra:



1.18. ábra: Harmonikus gerjesztő rezgés által kialakított 1D hullám

Az origótól x távolságban lévő pont harmonikus rezgőmozgást végez, melynek *fázisa* $\frac{x}{c}$ idővel *késik* az origóban lévő hullámforrás gerjesztő rezgésének fázisához képest.

Megjegyzések:

1. A ∂ szimbólum a több változótól függő mennyiség egyetlen változója szerinti derivált, az ún. *parciális derivált* jelölésére szolgál.
2. A hullámegyenlet térbeli hullámok terjedése esetén $\psi(\vec{r}, t) = \psi(x, y, z, t)$ függvényre vizsgálva:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

alakú. A homogén, izotrop közegben terjedő *gömbhullám* megoldásaként származó hullámfüggvény:

$$\psi(r, t) = \frac{A_0}{r} \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right),$$

ahol A_0 a gömbhullám hosszúságnégyzet dimenziójú *felületi amplitúdója*, számértékileg megegyezik a hullámforrástól egységnyi távolságban a hullám amplitúdójával. A felületi amplitúdó tehát a távolság növekedésével fordított arányban csökken. Ez a hullámfüggvény a hullámforrás méretéhez képest sokkal nagyobb távolságban észlelt hullámjelenséget írja le jó közelítéssel.

1.1.10.5. A hullámok tulajdonságai

A hullámok 5 alapvető tulajdonsággal rendelkeznek, ezek a *visszaverődés*, a *törés*, az *elhajlás*, az *interferencia* és a *polarizáció*. Az első két tulajdonság, a visszaverődés és a törés akkor következik be, ha a hullám két olyan közeg határához ér, amelyek hullámtonilag különbözőek, vagyis $c_1 \neq c_2$. Ez a két tulajdonság geometriailag ábrázolható oly módon, hogy a hullámnak csak azt a tulajdonságát tekintjük, hogy homogén közegben egyenes vonalban terjed. Ilyenkor a hullámokat terjedési irányuk mentén egyenes vonallal szemléltetjük.

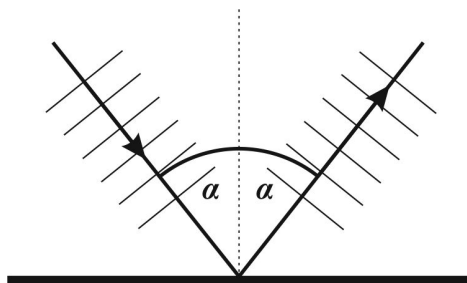
1.1.10.5.1. Visszaverődés (reflexió)

A köteghatárhoz érkező hullám *visszaverődik* a köteghatárról. A köteghatárra állított merőleges az ún. *beesési merőleges* (1.19. ábra). Tapasztalat szerint beeső hullám és a beesési merő-

leges által bezárt α beesési szög, valamint a visszavert hullám és a beesési merőleges által bezárt α' visszaverődési szög *megegyezik*:

$$\boxed{\alpha = \alpha'}$$

valamint a beeső hullám, a visszavert hullám és a beesési merőleges ugyanabban a síkban vannak ([3. Animáció: Visszaverődés](#)).



1.19. ábra: Visszaverődés

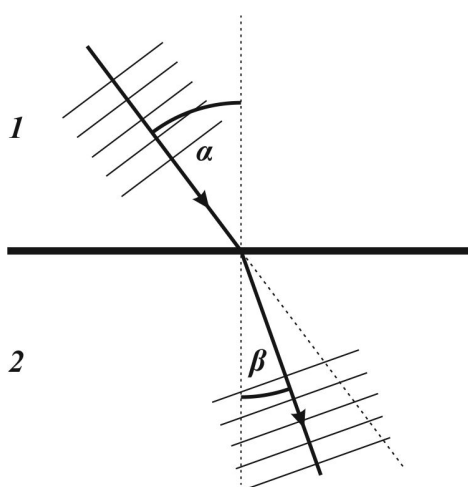
1.1.10.5.2. Törés (refrakció)

Amikor a közegethatárhoz érkező hullám átlép a közegethatáron és a két közeg hullámterjedési sebessége különbözik ($c_1 \neq c_2$), a hullám haladási iránya megtörik (1.20. ábra). A hullámok törésének tapasztalati törvénye a **Snellius–Descartes-törvény**, mely szerint:

„A beeső hullám beesési merőlegessel bezárt α beesési szögének szinusza úgy aránylik a továbbhaladó (megtörő) hullám beesési merőlegessel bezárt β törési szögének szinuszához, mint a két közegben mért terjedési sebesség.”

Azaz matematikailag:

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}}$$



1.20. ábra: Törés

Mivel homogén közegben c_1 és c_2 állandó, ezért a hányadosuk szintén állandó ([4. Animáció: Törés](#)). Ennek az állandónak a neve: a 2-es közegnek az 1-es közegre vonatkoztatott törésmutatója, röviden *törésmutató* (n_{21}), tehát

$$n_{21} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{n_{12}}$$

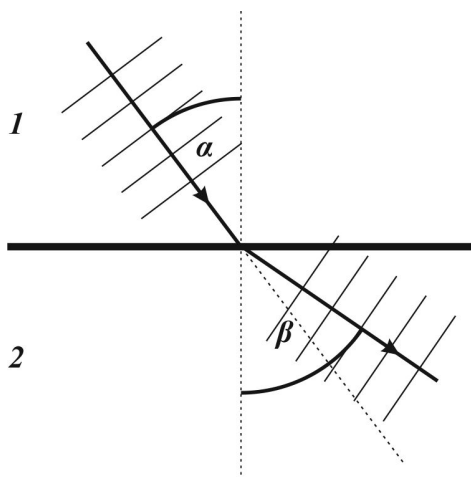
A hullámok törésének esetei a következők:

1. Hullámtanilag ritkább közegből hullámtanilag sűrűbb közegbe

Ha a hullám a hullámtanilag ritkább 1-es közegből a hullámtanilag sűrűbb 2-es közegbe lép át, vagyis $c_1 > c_2$, akkor az n_{21} törésmutató értéke 1-nél nagyobb, tehát a törési szög kisebb lesz a beesési szögnél. Erre azt mondjuk, hogy a hullám *a beesési merőlegeshez* törik (1.20. ábra).

2. Hullámtanilag sűrűbb közegből hullámtanilag ritkább közegbe

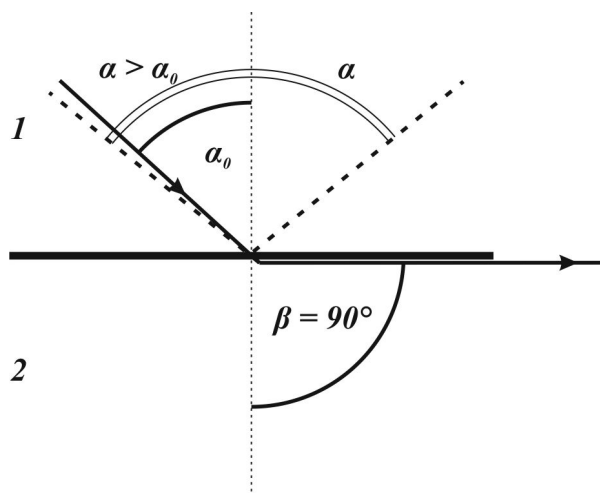
Ha a hullám a hullámtanilag sűrűbb 1-es közegből a hullámtanilag ritkább 2-es közegbe lép át, vagyis $c_1 < c_2$, akkor az n_{21} törésmutató értéke 1-nél kisebb, tehát a törési szög nagyobb lesz a beesési szögnél. Erre azt mondjuk, hogy a hullám *a beesési merőlegestől* törik (1.21. ábra).



1.21. ábra: Törés a beesési merőlegestől

3. Teljes visszaverődés határszöge

Az előbbi esetben létezik egy bizonyos szög, amelynél a törési szög pontosan 90° -os. Ezt a szöveget *a teljes visszaverődés α_0 határszögének* nevezzük. Ennél a szögnél még törés következik be, de ha a hullám ennél bármilyen kicsivel nagyobb a beesési szögben esik a határfelületre (az 1.22. ábrán szaggatott vonal), akkor már a visszaverődés törvénye érvényesül ([5. Animáció: Teljes visszaverődés határszöge](#)).



1.22. ábra: Teljes visszaverődés határszöge

Ekkor igaz a következő:

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha_0}{\sin 90^\circ} = \sin \alpha_0 = n .$$

4. Hullámtanilag azonos közegek

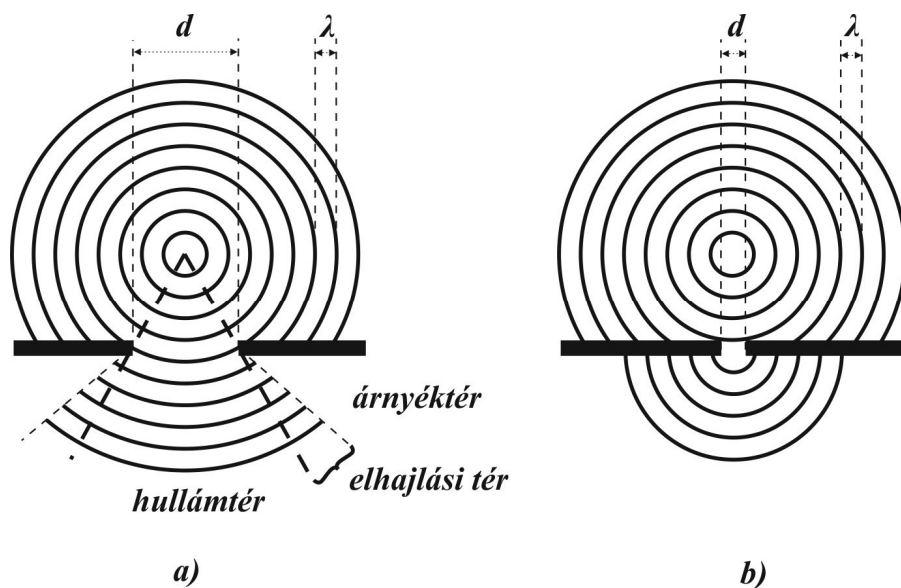
Ha $c_1 = c_2$ (a két közeg hullámtanilag azonos) akkor a beesési szög és a „törési” szög is megegyezik, azaz nem következnek be törés.

A hullámok további három tulajdonsága, az elhajlás, az interferencia és a polarizáció már nem magyarázható geometriailag, leírásuknál figyelembe kell venni a hullámok jellemzőit.

1.1.10.5.3. Elhajlás (diffrakció)

Elhajlás akkor következik be, ha a hullám útjába d szélességű rést vagy akadályt helyezünk. Tipikus hullám-elhajlási képet szemléltet az 1.23. ábra.

Ekkor azt várhatnánk, hogy a hullámforrás és a rés (vagy akadály) geometriailag meghatároznak egy árnyékteret, ahol a hullámfrontok nem jelenhetnének meg. A tapasztalat szerint azonban megjelennek itt is, vagyis elhajolnak az árnyéktér felé, és az elhajlás mértéke annál nagyobb, minél kisebb a rés (vagy az akadály) mérete (1.23. ábra). Végül, ha a rés (vagy akadály) d átmérője összemérhető a λ hullámhosszal, akkor az elhajlás a teljes árnyéktérre kiterjed (1.23. ábra), tehát a rés és az akadály *elemi hullámforrásként* viselkedik ([6. Animáció: Elhajlás](#)).



1.23. ábra: Hullámok elhajlása résen

Az elhajlás tapasztalati törvénye a **Huygens–Fresnel-elv** alapján értelmezhető:

„A hullámtér minden egyes pontja elemi hullámforrás. A dt idővel későbbi hullámképet a t pillanatban kiinduló elemi hullámok interferenciája adja.”

1.1.10.5.4. Interferencia

Két vagy több hullám találkozásakor a hullámok összeadódnak, amit *interferenciának* hívunk, az eredmény új hullámkép lesz. Az interferencia eredményeképpen létrejövő eredő hullámnak a találkozási pontban kialakuló kitérését úgy kaphatjuk meg, ha a két interferáló hullám adott pontban vett pillanatnyi kitérését vektoriálisan összeadjuk. Az így módon kialakuló interferencia speciális esetei az egyirányú rezgések összetételénél kapott eredmények szerint a következők ([1. Video: Hullámok kialakulása és interferenciája](#)):

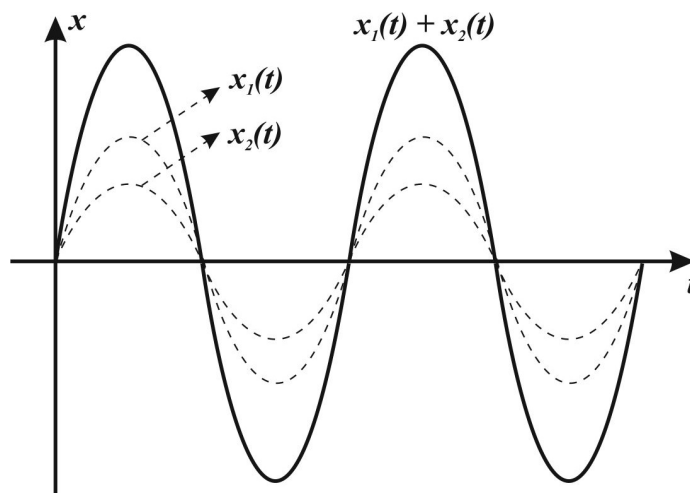
1. Erősítés

Erősítés akkor lép fel, ha a két találkozó hullám azonos frekvenciájú, és azonos fázisú:

$$f_1 = f_2$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (2n - 2)\pi,$$

ahol $n = 1, 2, \dots$, ilyenkor a fáziskülönbség $0, 2\pi, 4\pi$ stb. (1.24. ábra):



1.24. ábra: Erősítés

2. Gyengítés

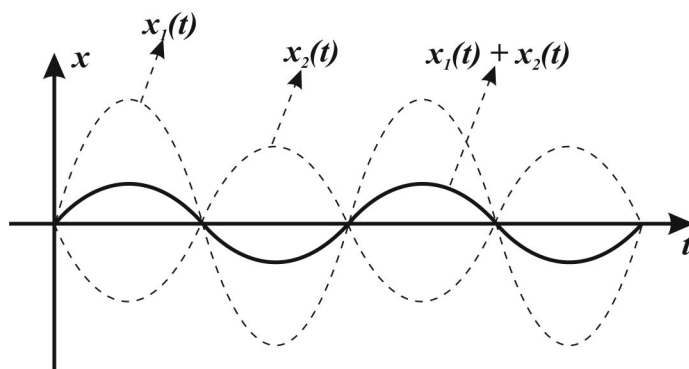
Gyengítés akkor következik be, ha a hullámok azonos frekvenciájúak, de ellentétes fázissal találkoznak, és amplitúdójuk nem azonos:

$$f_1 = f_2,$$

$$A_1 \neq A_2,$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (2n-1)\pi,$$

ahol $n = 1, 2, \dots$, ilyenkor a fáziskülönbség $\pi, 3\pi, 5\pi$ stb. (1.25. ábra):



1.25. ábra: Gyengítés

3. Kioltás

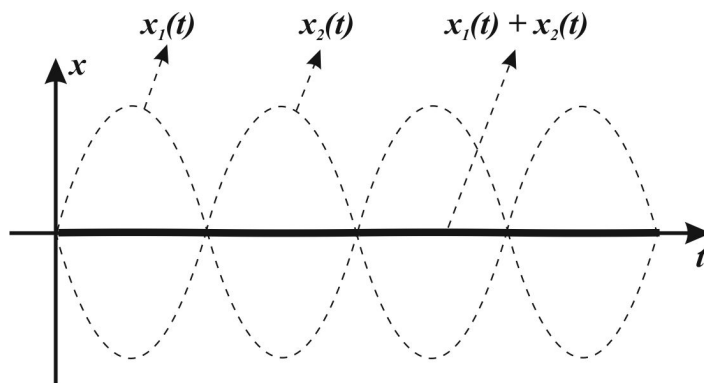
Kioltás akkor következik be, ha két azonos frekvenciájú, ellentétes fázisú, de azonos amplitúdójú hullám interferál:

$$f_1 = f_2,$$

$$A_1 = A_2,$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (2n-1)\pi,$$

ahol $n = 1, 2, \dots$, ilyenkor a fáziskülönbség $\pi, 3\pi, 5\pi$ stb. (1.26. ábra):



1.26. ábra: Kioltság

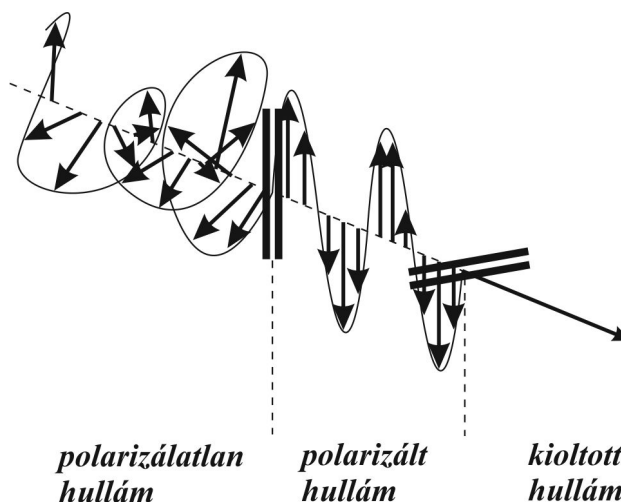
4. Lebegés

A *lebegés* az interferenciának az a speciális esete, amikor két, közel azonos frekvenciájú hullám találkozik ($f_1 \approx f_2$, vagy $\omega_1 \approx \omega_2$). Ekkor egy $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ körfrekvenciájú, hol nagyobb amplitúdójú, tehát maximálisan erősített, hol pedig kisebb amplitúdójú, tehát maximálisan gyengített hullám keletkezik, amelyben az erősítés és a gyengülés ritmusa: $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ (1.14. ábra).

1.1.10.5.5. Polarizáció

Vannak olyan hullámok, amelyekben nincs kitüntetett rezgési irány, ezek a *polarizálatlan* hullámok. Azokat a hullámokat, amelyek kitüntetett rezgési irányban rezegnek (pl. függőleges), *polarizált hullámoknak* nevezzük.

Polarizált hullám előállításához helyezünk a polarizálatlan hullám útjába például párhuzamos rést képező mozgáshatárolót, ún. *diafragmát*. (1.27. ábra) Ekkor a diafragma csak az olyan irányú rezgéseket ereszt át, amelyek vele párhuzamosak, minden más irányú rezgést kiszűr. Az eredmény olyan polarizált hullám lesz, melynek polarizációs síkja párhuzamos a diafragmával. Ha ezután a polarizált hullám útjába újabb, az előzőre (vagyis a polarizációs síkra) *merőleges diafragmát* helyezünk el, akkor az már nem engedi át a rá immár kizárólag merőleges rezgéseket, tehát a hullámot *kioltja*.



1.27. ábra: Polarizáció

A polarizáció fent tárgyalt módja a *síkbeli polarizáció*. Polarizációnak nevezünk azonban minden olyan esetet, amelynél a hullám rezgései valamilyen kitüntetett szimmetria szerint zajlanak le. Ilyen például a *cirkulárisan* vagy *elliptikusan polarizált hullám* is, amelyben az egymást követő pontok kitérés-vektorának csúcspontjai a haladási irányra merőleges síkra levetítve kör vagy ellipszis mentén helyezkednek el.

A polarizáció tulajdonságából következik, hogy *csak a transzverzális hullámok polarizálhatók*.

Ha egy jelenség rendelkezik a hullámok tulajdonságaival, akkor azt gondolhatjuk róla, hogy *hullámjelenségről* van szó. A mechanikai hullámokra ez a megállapítás igaz is, azonban mint látni fogjuk, az elektromágneses hullámok esetén felülbíráltra szorul.

1.1.10.6. A Fermat-elv

A visszaverődés és a törés törvénye elméleti úton, az ún. **Fermat-elvből** is levezethetők, mely szerint:

„A hullámok két pont között a legrövidebb ideig tartó úton haladnak.”

Ez az időminimum elve. Az ehhez tartozó $t'(x) = 0$ szélsőérték egyenletből mind a visszaverődés, mind a törés tapasztalati törvénye elméleti számítással származtatható.

1.2. Az anyagi pont dinamikája

A Dinamikát szokták *Erőtannak* is nevezni, mert alapfogalma az *erő*, mint a mozgások okozója. A dinamikában tehát a *mozgások okozóját*, ill. speciális esetben a *nyugalom feltételeit* tanulmányozzuk. Eszerint szoktunk *Kinetikáról* (mozgástanról) és *Statikáról* beszélni. A Statika a tartós nyugalom (egyensúly) erőtan feltételeit vizsgálja. Látni fogjuk, hogy a Kinematikában megismert fogalmakra fogunk támaszkodni és a Kinetikában új fogalmak, mennyiségek bevezetésére is szükségünk lesz.

1.2.1. Az anyagi pont Kinetikájának törvényei

1.2.1.1. Newton axiómái

1.2.1.1.1. Newton I. axiómája (Galileo GALILEI és Johannes KEPLER törvényei alapján)

A Kinetika fő feladata a *mozgás okainak vizsgálata*, azok ismeretében az $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ és $\vec{a}(t)$ mozgásegyenletek meghatározása. A tapasztalat szerint a magára hagyott test sebessége állandó. Ha a test sebessége megváltozik, akkor a környezetében mindig található olyan test, (vagy testek) amely okozója a sebesség változásának. Ezzel kapcsolatos **Newton I. axiómája**, a *tehetetlenség törvénye*:

„Minden test megtartja nyugalmi állapotát vagy egyenesvonalú egyenletes mozgását mindaddig, amíg annak megváltoztatására más test vagy mező nem kényszeríti.”

A törvény kimondja azt az általános érvényű megfigyelést, hogy a testek mozgásállapotát csak egy *külső hatás* képes megváltoztatni, önmagukban erre képtelenek, vagyis *tehetetlenek*. A tehetetlenség mértékére bevezetett fizikai mennyiség a *tömeg* (pontosabb nevén: *tehetetlen tömeg*), melynek jele m , SI-beli mértékegysége kg . Newton I. axiómája egyetemes (általános, univerzális) törvény.

Kérdés, hogy ez az axióma milyen vonatkoztatási rendszerben érvényes, mivel a sebesség függ a vonatkoztatási rendszer (koordináta-rendszer) megválasztásától. A tapasztalat szerint az axióma az állócsillagokhoz rögzített koordináta-rendszerben nagy pontossággal igaz. Az olyan vonatkoztatási rendszereket, amelyekben érvényes a tehetetlenség törvénye, *inercia-rendszereknek* (tehetetlenségi rendszereknek) nevezzük. Az inerciarendszerhez képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző koordináta-rendszer szintén inerciarendszer.

Az $R = 6,37 \cdot 10^6$ m sugarú és $T = 8,64 \cdot 10^4$ s forgásiidejű Föld azért tekinthető inerciarendszernek, mert a forgásából származó centripetális gyorsulása például az egyenlítőn:

$$a_{cp} = R\omega^2 = R \frac{4\pi^2}{T^2} = 0,034 \frac{m}{s^2},$$

amely elhanyagolhatóan kicsi.

NEWTONnak az a feltételezése, hogy a mozgások egy mindig egyforma, mozdulatlan és a testekkel kapcsolatban nem álló, ún. „abszolút térhez” viszonyíthatók, nem bizonyult helytállóknak.

1.2.1.1.2. Newton II. axiómája

Azt a fizikai hatást, amely a kölcsönhatásban lévő test mozgásállapotát megváltoztatja *erőhatásnak* nevezzük. Az *erő* az erőhatás mértékét kifejező vektormennyiség, jele: \vec{F} .

Megjegyzés:

Nem pontszerű test esetén a kölcsönhatás alakváltozásban is megnyilvánulhat, és az erőhatás mértékét ennek alapján is lehet definiálni.

A mozgásállapot-változás, vagyis a $\vec{v}(t)$ sebesség megváltozása az $\vec{a}(t)$ gyorsulással jellemezhető. Ennek alapján **Newton II. axiómája** azt mondja ki, hogy:

„A testre ható erő és a test gyorsulása egyenesen arányosak és egyirányúak.”

Azaz matematikailag:

$$\vec{F} \sim \vec{a}.$$

Az egyenes arányosságból következik, hogy az erő a gyorsulás konstansszorososa, azaz

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}},$$

ahol m a testre jellemző állandó, a test *tehetetlen tömege*.

A „tehetetlen tömeg” kifejezés azt jelenti, hogy a test milyen mértékű „ellenállást” fejt ki a mozgásállapotát megváltoztató erővel szemben. Más megfogalmazásban: az a test a tehetetlenebb, amelyik ugyanakkora erő hatására kevésbé gyorsul.

Megjegyzés:

Homogén testeknél a tömeg a térfogattal egyenesen arányos, azaz $\frac{m}{V} = \text{állandó}$. Ez az állandó a test sűrűsége,

jele: ρ , tehát: $\rho = \frac{m}{V}$, SI-beli mértékegysége: $\frac{kg}{m^3}$.

A gyorsulás és a tömeg egységének definiálása alapján az erő SI-beli mértékegysége származtatható: $kg \cdot \frac{m}{s^2} = N$ (newton), azaz 1 N akkora erő, amely 1 kg tömegű testet $1 \frac{m}{s^2}$ gyorsulással mozgat.

Megjegyzés:

A Föld a testeket $9,81 \frac{m}{s^2}$ gyorsulással mozgatja, tehát az 1 kg tömegű testre 9,81 N vonzóerőt fejt ki.

Az $\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$ egyenletben az \vec{F} általában a tömegpont és az arra hatással lévő test kölcsönös helyzetének, sebességének stb. valamilyen egyértelmű függvénye, ún. *erőtörvény*. A mozgásegyenletek kiszámítása a konkrét esetben ható erő erőtvényének ismeretében differenciálegyenlet megoldása révén lehetséges.

1.2.1.1.3. Newton III. axiómája

Newton III. axiómája kimondja, hogy:

„A kölcsönhatásban résztvevő testek (A és B) egymásra egyenlő nagyságú és ellentétes irányú erőt fejtenek ki.”

Vagyis matematikailag:

$$\boxed{\vec{F}_{A,B} = -\vec{F}_{B,A}}.$$

Ezt az axiómát *hatás-ellenhatás* (akció-reakció) *törvényének* is szokták nevezni. Az egyik erőhatás jellemzésére az *erő*, az ellenhatás jellemzésére az *ellenelő* fogalmakat használjuk. Fontos megjegyezni, hogy az egyik erő az egyik, míg a másik erő a másik testre hat.

Minden olyan erőnek van ellenereje, amely inerciarendszerben két test kölcsönhatásából származik. Nincs ellenereje azonban azoknak az erőknek, amelyek egy nem-inerciarendszer mozgásállapot-változása miatt csak az adott vonatkoztatási rendszerben észlelhetők. Ilyen például a forgó vonatkoztatási rendszerben lévő megfigyelőre ható centrifugális erő.

1.2.1.1.4. Newton IV. axiómája

A testre egyidejűleg több erő is hathat.

„Az erők vektorosan összegezhetőek és együttes hatásuk egyenértékű vektori eredőjük hatásával, vagyis a testre ható erők egyetlen eredő erővel helyettesíthetőek.”

Az eredő erő nagysága:

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n}.$$

Ezt szokták **Newton IV. axiómájának**, vagy az *erők független szuperpozíciójának* is nevezni.

1.2.1.2. A dinamika alapegyenlete

Newton II. és IV. axiómájának egyesítése a *dinamika alapegyenlete*, amely a testre ható erők nagyságának és/vagy erőtvényeinek ismeretében bármely test mozgásegyenleteinek kiszámítására szolgál oly módon, hogy közvetlenül a test mozgásállapot változását leíró $\vec{a}(t)$ gyorsulás-idő függvényt kapjuk meg, amelynek integrálásával a kezdeti feltételei figyelembe vétele mellett a $\vec{v}(t)$ sebesség-idő függvényt kapjuk. Ennek idő szerinti integrálása után jutunk a test $\vec{r}(t)$ helyvektor-idő függvényéhez. A dinamika alapegyenlete:

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}}.$$

1.2.1.3. Erők és erőtvények

Azokat az összefüggéseket, amelyek irány és nagyság szerint megadják az erőt a környezet és a test jellemzőinek függvényében, *erőtvényeknek* nevezzük. Az erőtvények és a Newton axiómáinak ismeretében a testek mozgása leírható.

1.2.1.3.1. Gravitációs erő, nehézségi erő és súlyerő

1. Az M tömegű Föld által a Föld tömegközéppontjától r távolságban lévő m tömegű testre az általános tömegvonzás ható szerint F_g gravitációs vonzóerő hat, amelynek nagysága:

$$F_g = G \frac{Mm}{r^2},$$

amelyben $G = 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$, az egyetemes gravitációs állandó, az erő iránya pedig a Föld tömegközéppontja felé mutat.

1.7. Példa: A nehézségi gyorsulás

Számítsuk ki a gravitációs erő hatására szabadon eső test gyorsulását a Föld felszínétől mért h magasság függvényében!

Megoldás:

Newton II. axiómája szerint a pontszerűnek tekintett M tömegű Föld felé szabadon eső test g gyorsulása kiszámítható a dinamika alaptörvényének felhasználásával:

$$\sum F = ma,$$

amelyre behelyettesítés után

$$G \frac{Mm}{r^2} = mg$$

adódik, ahonnan:

$$g = G \frac{M}{r^2}.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy a Föld R sugarú gömbbel modellezhető, akkor a Föld tömegközéppontjától mért $r = R + h$ távolságot behelyettesítve, ahol h a földfelszíntől mért magasság:

$$g = G \frac{M}{(R + h)^2},$$

az ún. *nehézségi gyorsulás*, amely függ a földfelszíntől mért h távolságtól. Átlagos értéke a Föld felszínén:

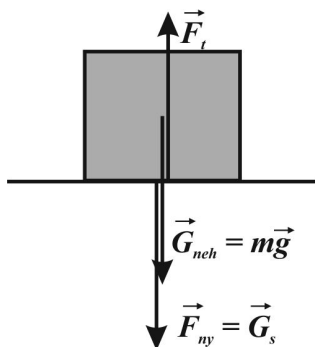
$$g = 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{5,978 \cdot 10^{24} kg}{6,37 \cdot 10^6 m} \approx 9,83 \frac{m}{s^2},$$

amely még nagyobb magasságban (pl. $h \approx 9$ km, a Mount Everest teteje) sem csökken jelentősen, azonban a földrajzi pozíció a Föld forgásából származó enyhe centrifugális hatás miatt befolyásolja. Magyarország földrajzi szélességén értéke hozzávetőleg $9,81 \frac{m}{s^2}$. ♣

2. A Föld felszínén és annak közelében a teste ható gravitációs erőt *nehézségi erőnek* nevezük, és itt értéke g viszonylagos állandósága miatt:

$$\vec{G}_{neh} = m\vec{g}.$$

3. A Földön, a hozzá képest nyugalomban lévő vízszintesen alátámasztott, vagy felfüggesztett testek F_{ny} nyomóerőt vagy F_h húzóerőt fejtenek ki az alátámasztásra vagy a felfüggesztésre. Az alátámasztás vagy felfüggesztés Newton III. axiómája szerint ezzel egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú F_t tartóerőt vagy F_k kötélrőt fejt ki a testre. A nyugalom dinamikai feltétele, hogy a testre ható erők kiegyenlítsék egymást, tehát az alátámasztás vagy felfüggesztés által kifejtett tartóerő vagy kötélrő egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú a testre ható nehézségi erővel (1.28. ábra).



1.28. ábra: Nehézségi erő és súlyerő

Ezek alapján az alátámasztott test példájából kiindulva tehát:

A nyugalom feltételéből:

$$\sum \vec{F} = 0,$$

vagyis

$$\vec{G}_{neh} = -\vec{F}_t,$$

és ezeknek a nagysága:

$$|\vec{G}_{neh}| = |\vec{F}_t| = mg,$$

Newton III. axiómájából:

$$\vec{F}_{ny} = -\vec{F}_t,$$

vagyis

$$|\vec{F}_{ny}| = |\vec{F}_t|.$$

A két egyenlőség összevetéséből következik, hogy az alátámasztott vagy felfüggesztett testek

$$\boxed{|\vec{F}_{ny}| = |\vec{G}_{neh}| = mg}$$

nagyságú erőt fejtenek ki az alátámasztásra vagy a felfüggesztésre. Az m tömegű test által a vízszintes alátámasztásra vagy felfüggesztésre kifejtett mg nagyságú F_{ny} nyomó- vagy F_h húzóerőt összefoglaló néven G_s *súlyerőnek* (röviden: súlynak) nevezzük, amelynek

támadáspontja az érintkező felületek geometriai középpontjában van, iránya a Föld tömegközéppontja felé mutat.

A szabadon eső testekre a kizárólag nehézségi erő hat. Alátámasztás hiányában a test nem fejt ki nyomóerőt semmire, vagyis súlya zérus (súlytalan).

1.2.1.3.2. Csúszási súrlódási erő

Tapasztalat szerint érintkező, egymáshoz képest elmozduló testek között F_s csúszási súrlódási erő lép fel, amely néhány $\frac{m}{s}$ -ig független a testek relatív sebességétől, és jó közelítéssel arányos a testeket összeszorító, az érintkező felületekre merőleges F_{ny} nyomóerővel:

$$F_s = \mu F_{ny},$$

ahol μ az érintkező testek anyagi minőségétől függ. Neve: csúszási súrlódási tényező, amely mértékegység nélküli arányszám. Az testre ható F_s súrlódási erő iránya a csúszó felület mozgásának irányával ellentétes.

Megjegyzés:

A súrlódási erő ellenereje a test által a talajra kifejtett ellentétes irányú hatás.

1.2.1.3.3. Tapadási súrlódási erő

Az egymással érintkező felületek között fellépő, a testek egymáshoz képest történő elmozdulását akadályozó hatás a tapadási súrlódás, amelynek mértéke a tapadási súrlódási erő. Maximális értéke:

$$F_{t, max} = \mu_0 F_{ny},$$

ahol μ_0 a tapadási súrlódási tényező, mértékegység nélküli arányszám.

Abban az esetben, amikor a testre ható húzóerő nagysága meghaladja a tapadási súrlódási erő maximumát, akkor a test mozgásba jön. A μ_0 értéke μ -nél nagyobb, pl. gumiabroncsra aszfalton $\mu_0 \approx 0,9$ és $\mu \approx 0,8$. A tapadási súrlódási erő miatt tudunk járni és tudnak a járművek mozogni a Földön.

1.2.1.3.4. Rugalmas erő

Ideálisan rugalmas rugóra helyezett testre az x hosszúsággal megnyújtott vagy összenyomott rugó F_r húzó- vagy nyomóerőt fejt ki, amelynek nagysága arányos az x megnyúlással vagy összenyomással, iránya mindig ellentétes azzal. Ez a **Hooke-törvény**, amely a rugalmasság határáig érvényes:

$$\vec{F}_r = -D\vec{x},$$

ahol D az ún. rugóállandó, amely megmutatja, hogy mekkora erő hatására lesz a rugónak egységnyi megnyúlása, mértékegysége: $\frac{N}{m}$.

1.2.1.3.5. Közegellenállási erő

Környezetünk (pl. levegő, víz) a hozzá képest mozgó testekre közegellenállási erőt fejt ki, amely akadályozza a test mozgását. A tapasztalat szerint az F_k közegellenállási erő nagysága függ a közeg sűrűségétől, a test alakjától és homlokfelületétől, valamint kis sebesség esetén a közeg és a test egymáshoz viszonyított $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ sebességétől, iránya a test mozgásirányával ellentétes:

$$\vec{F}_k = -k\dot{\vec{x}},$$

ahol k az ún. közegellenállási együttható, amely a közeg sűrűségétől, a test alakjától és homlokfelületétől függő állandó.

1.2.1.3.6. Nyomóerő és nyomás

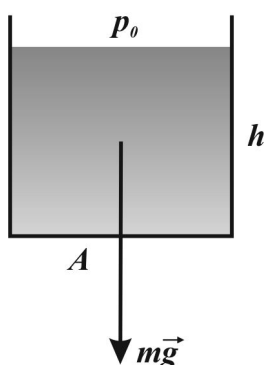
A testek az alátámasztási felületre nyomóerőt gyakorolnak. Definíció szerint a felületre merőleges F_{ny} nyomóerőnek (illetve a nyomóerő felületre merőleges komponensének) és a nyomott A felületnek a hányadosát *nyomásnak* nevezzük, jele: p . Kiszámítása:

$$p = \frac{F_{ny}}{A}.$$

A nyomás SI-beli mértékegysége a $\frac{N}{m^2} = Pa$ (pascal), jele: Pa . A normál légköri nyomás értéke: $101325 Pa \approx 10^5 Pa$.

1.2.1.3.7. Hidrosztatikai nyomóerő és nyomás

Legyen az A alapterületű edényben h magasságú, ρ_f sűrűségű folyadék. A folyadék az edény aljára nyomóerőt fejt ki, amely a folyadék súlyával egyenlő (1.29. ábra).



1.29. ábra: Hidrosztatikai nyomás

A nyomóerőből származó, a folyadék által az edény aljára kifejtett nyomás az ún. *hidrosztatikai nyomás*, amely a nyomás definíciója alapján:

$$p = \frac{F_{ny}}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\rho_f Vg}{A} = \frac{\rho_f Ahg}{A} = \rho_f gh.$$

A **Pascal-törvény** értelmében:

„A folyadékokra kifejtett külső nyomás a folyadékban – összenyomhatatlansága folytán – minden irányban gyengítetlenül továbbterjed.”

Ha a folyadék felszínére p_0 külső nyomás hat (pl. a levegő nyomása), akkor a felszíntől számított h mélységben a nyomás minden irányban:

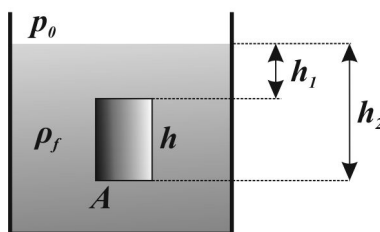
$$p = p_0 + \rho_f g h.$$

1.2.1.3.8. Felhajtóerő

ARKHIMÉDÉSZ felismerte, hogy:

„A folyadékokba merülő testekre felhajtóerő hat, amelynek nagysága egyenlő a test által kiszorított folyadék súlyával.”

Az **Arkhimédész-törvény** egyike a tudomány legrégebbi törvényeinek.



1.30. ábra: Felhajtóerő származtatása

A 1.30. ábra alapján a folyadékba merített hasáb alakú test oldalfalaira ható erők eredője zérus, az alsó és a felső lapjaira ható erők eredője pedig:

$$F_f = F_2 - F_1 = p_2 A - p_1 A.$$

Behelyettesítve a hidrosztatikai nyomásra fent kapott kifejezést:

$$F_f = (p_0 + \rho_f g h_2) A - (p_0 + \rho_f g h_1) A = \rho_f g (h_2 - h_1) A$$

Mivel $(h_2 - h_1) A = V_t$ a test térfogata, amely megegyezik a test által kiszorított folyadék térfogatával, látható, hogy a testre valóban az általa kiszorított folyadék súlyával megegyező nagyságú, felfelé irányuló, a folyadék által a testre kifejtett hidrosztatikai nyomásából származó eredő erő, az ún. *felhajtóerő* hat, melynek nagysága:

$$F_f = \rho_f V_t g,$$

és valóban a kiszorított folyadék $\rho_f V_t g = m_f g$ súlyával egyezik meg.

(2. Video: [Hidrosztatikai kísérletek](#))

1.2.1.4. Példák különböző erők okozta mozgásokra

1.8. Példa: A nehézségi erő okozta mozgás

Határozzuk meg a nehézségi erő (mg) által létrehozott mozgás egyenletét a dinamika alaptörvénye szerint!

Megoldás:

A dinamika alapegyenletéből az m tömegű test mozgására igaz, hogy

$$m\ddot{\mathbf{r}} = mg ,$$

azaz a mozgásegyenlete a gyorsulásra:

$$\ddot{\mathbf{r}} = g ,$$

ahol m kiesése miatt látható, hogy minden test – tömegétől függetlenül – ugyanakkora nagyságú nehézségi gyorsulással esik szabadon, ha a közegellenállástól eltekinthetünk.

Ha a mozgás a Földhöz viszonyítva kis térrészben zajlik le, akkor $g = \text{állandó}$ (helytől független). A differenciálegyenlet-rendszer Descartes-koodinátákkal:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g .$$

Ezek a differenciálegyenletek közvetlenül integrálhatók, amely a sebesség és a gyorsulás fogalmából következik:

$$\int \ddot{x}(t) dt = \dot{x}(t) = v_{x0} = 0 ,$$

$$\int \ddot{y}(t) dt = \dot{y}(t) = v_{y0} = 0 ,$$

$$\int \ddot{z}(t) dt = \dot{z}(t) = v_z(t) = -g \cdot t .$$

A hely meghatározása a sebesség integrálásával történik:

$$\int \dot{x}(t) dt = x(t) = 0 ,$$

$$\int \dot{y}(t) dt = y(t) = 0 ,$$

$$\int \dot{z}(t) dt = z(t) = h - \frac{g}{2} t^2 .$$

Az integrálási konstansok az ún. kezdeti feltételekből lettek meghatározva. Pl.: $t = 0$ s esetén legyen a test a $P(0;0;h)$ pontban és $v_{x0} = v_{y0} = v_{z0} = 0$. Ekkor éppen a szabadesés egyenleteit kapjuk. Hasonló megfontolással, a kezdeti értékek célszerű megválasztásával a függőleges és a vízszintes hajítás mozgásegyenletei is levezethetők. ♣

1.9. Példa: Harmonikus rezgőmozgás

Határozzuk meg a rugalmas erő hatására mozgó test mozgásának egyenleteit!

Megoldás:

Ideális rugó esetén a rugalmas erő: $\vec{F} = -D\vec{x}$, tehát a mozgásegyenlet a dinamika alapegyenletéből:

$$m\ddot{x}(t) = -Dx(t),$$

ahonnan a gyorsulás időfüggését leíró differenciálegyenlet:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{D}{m}x(t),$$

amiből $\omega^2 = \frac{D}{m}$ bevezetésével

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$$

adódik. Ez egy ún. hiányos másodrendű, állandó együttható homogén differenciálegyenlet, amelynek megoldása a matematikai levezetés mellőzéseivel:

$$x(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t .$$

Ez a megoldás a konstansok célszerű megválasztásával

$$x(t) = A \sin \omega t$$

alakúra hozható, ahonnan

$$v(t) = \dot{x}(t) = A\omega \cos \omega t ,$$

és

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin \omega t ,$$

összhangban a harmonikus rezgőmozgásról kinematikában tanultakkal. A rugalmas erő hatására mozgó m tömegű test tehát *harmonikus rezgőmozgást* végez. Az $\omega^2 = \frac{D}{m}$ összefüggésből a T rezgésidő kiszámítható:

$$\frac{D}{m} = \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 ,$$

ezért:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{D}{m}} ,$$

vagyis a rezgésidő csak a rezgést végző test m tömegéből és a rugó D rugóállandójától függ, de független az A amplitúdótól.♣

1.10. Példa: Csillapított rezgőmozgás

Határozzuk meg a közegellenállási és rugalmas erő együttes hatására mozgó tömegpont mozgásegyenleteit!

Megoldás:

Csillapított rezgőmozgás lép fel abban az esetben, ha a mozgást fékező erő is fellép (pl. közegellenállási erő, vagy tudatosan alkalmazott csillapító test). Ez a csillapító erő alacsony sebességnél a test $v(t) = \dot{x}(t)$ sebességével arányos. Ebben az esetben a test mozgásegyenlete a dinamika alaptörvényéből:

$$m\ddot{x}(t) = -Dx(t) - k\dot{x}(t),$$

amiből

$$\ddot{x}(t) = -\frac{D}{m}x(t) - \frac{k}{m}\dot{x}(t)$$

Matematikailag célszerű az $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ és $2\beta = \frac{k}{m}$ jelölések bevezetése, amelyekkel

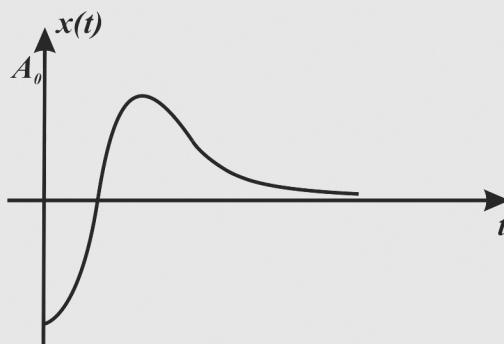
$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = 0$$

másodrendű állandó együtthatós homogén differenciálegyenlet adódik, amelyben β a csillapítást jellemző mennyiség. Kis csillapítás esetén ($\beta < \omega_0$) a megoldás:

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \sin(\omega_s t + \varphi_0),$$

ahol $\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, a rezgés sajátfrekvenciája. Ez egy exponenciálisan *csillapodó rezgést* ír le. A sebességnek és a gyorsulásnak a hely deriválásával történő levezetésétől itt eltekintünk.

Erős csillapítás esetén nem is alakul ki rezgőmozgás, amit a 1.31. ábra szemléltet.♣



1.31. ábra: Csillapodó rezgés

1.11. Példa: Kényszerrezgés

Határozzuk meg a közegellenállási, rugalmas és harmonikus külső gerjesztő erő együttes hatására kialakuló mozgás egyenletét!

Megoldás:

Mint láttuk, a rezgésbe hozott, magára hagyott rendszer általában csillapodó rezgést végez meghatározott frekvenciával. Külső hatásra ez a rezgés

- tovább csillapítható,
- állandósítható,
- felerősíthető.

Ha a külső hatás egy periodikus erő (munkavégzésre képes gerjesztő rezgés), akkor a kialakuló rezgést *kényszerrezgésnek* nevezzük. Másként fogalmazva: egy rezgésre képes rendszer külső periodikus gerjesztéssel összetett mozgásra kényszerül, ami általában már nem periodikus. Alapvető fontosságú az a körülmény, hogy itt két körfrekvencia szerepel:

- a rezgésre képes rendszer ω_s saját körfrekvenciája és
- a gerjesztő (külső) rezgés ω_0 körfrekvenciája, ahol az előzőek szerint:

$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Az F_g külső gerjesztő erő hatására kialakult rezgés mozgásegyenlete a dinamika alap-egyenletéből:

$$m\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F_g,$$

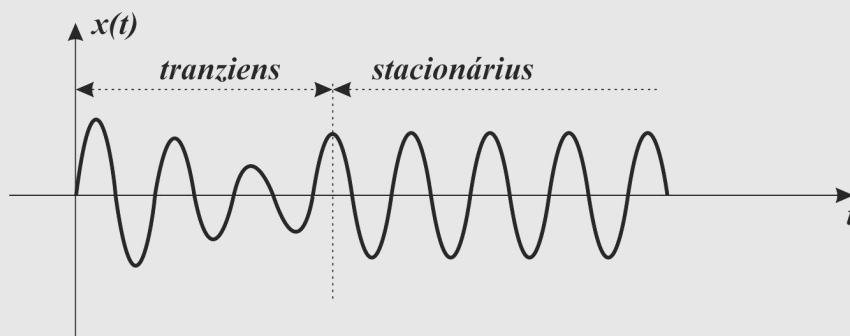
ami már inhomogén differenciálegyenlet.

Ha a gerjesztő rezgés $F_g = F_0 \sin \omega t$ alakú, akkor a differenciálegyenlet megoldása matematikailag:

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi_1) + B e^{-\beta t} \sin(\omega_s t + \varphi_2).$$

Ez egy nagyon összetett mozgást takar, az idő függvényében nehezen követhető. Az első tag egy csillapítatlan ω körfrekvenciájú rezgésre, a második tag pedig egy exponenciálisan csillapodó ω_s körfrekvenciájú rezgésre utal.

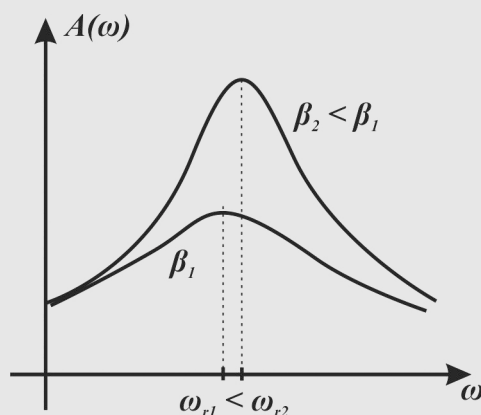
Kis t értékek esetén $\lim_{t \rightarrow 0} e^{-\beta t} = 1$, így mozgás csak közelítően periodikus (tranzienst vagy átmeneti szakaszt). Nagy t értékek esetén $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\beta t} = 0$, a mozgás ω körfrekvenciájú harmonikus rezgésbe megy át (stacionárius szakaszt), 1.32. ábra.



1.32. ábra: Kényszerrezgés

A kényszerrezgés legszemléletesebben a körfrekvencia függvényében vizsgálható, amikor a gerjesztett rezgés amplitúdóját a gerjesztő rezgés körfrekvenciájának függvényében ábrázoljuk. Levezethető, hogy a kényszerrezgést végző test A amplitúdója a gerjesztő rezgés ω körfrekvenciájának függvényében:

$$A(\omega) = \frac{F_g}{m\sqrt{(\omega_s^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$



1.33. ábra: Rezonanciagörbe

Az 1.33. ábrán látható, hogy csökkenő csillapítás esetén a maximum egyre élesebb. A szélsőérték hely $A'(\omega) = 0$ egyenletből meghatározható. A megoldás:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_s^2 - 2\beta^2},$$

ahol ω_r neve: *rezonancia-körfrekvencia*. Ekkor a kényszerrezgés amplitúdója maximális, a jelenséget amplitúdó-rezonanciának nevezzük. Csillapítás hiányában, $\beta = 0$ esetben $\omega_r = \omega_s$. ♣

1.12. Példa: Egyenletes körmozgás

Számítsuk ki azt a sebességet, amely a Föld körüli körpályán való mozgáshoz szükséges!

Megoldás:

Az egyenletes körmozgásnál láttuk, hogy a centripetális gyorsulás mindig a kör középpontja felé mutat:

$$\vec{a}_{cp} = -\vec{r}\omega^2,$$

így az m tömegű tömegpontra:

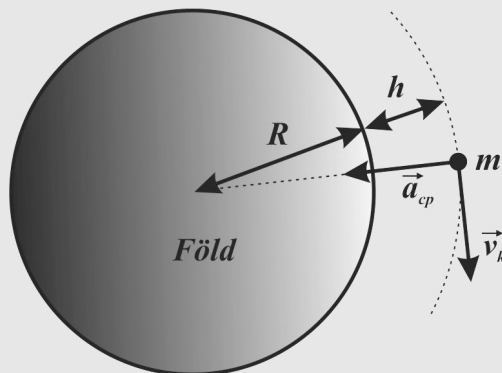
$$\vec{F}_{cp} = -m\vec{r}\omega^2$$

nagyságú *centripetális erő* hat. Nagysága átalakítás után felírható a következő alakban is:

$$F_{cp} = m r \omega^2 = m \frac{v_k^2}{r},$$

ahol v_k az r sugarú pályán mozgó test *kerületi sebessége*. Innen:

Az $M = 5,978 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ tömegű, $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ sugarú Föld körül h magasságban v_k kerületi sebességgel keringő műholdra ható centripetális erőt a Föld által kifejtett F_g gravitációs erő biztosítja (1.34. ábra).



1.34. ábra: Föld körüli körpálya

A dinamika alapegyenletét alkalmazva:

$$\frac{mv_k^2}{R+h} = G \frac{Mm}{(R+h)^2},$$

ahonnan a földfelszíntől mért h magasság függvényében a Föld körüli körpályára álláshoz szükséges ún. első kozmikus sebesség:

$$v_k = v_I = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}.$$

Ez $h \ll R$ esetben

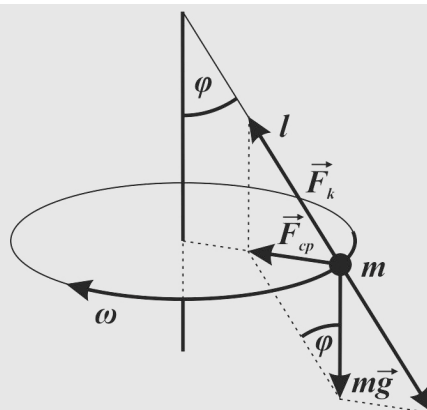
$$v_I \approx \sqrt{\frac{GM}{R}} \approx \sqrt{\frac{6,67428 \cdot 10^{-11} \cdot 5,978 \cdot 10^{24} \text{ m}}{6,37 \cdot 10^6}} \approx 8 \frac{\text{km}}{\text{s}}. \clubsuit$$

1.13. Példa: Kúpinga mozgása

Számítsuk ki az l hosszúságú fonálon ω szögsebességgel mozgó kúpinga alkotójának függőlegessel bezárt φ szögét!

Megoldás:

Az m tömegű anyagi pont körmozgásához szükséges $F_{cp} = m r \omega^2 = m \omega^2 l \sin \varphi$ centripetális erőt a tömegpontra ható mg nehézségi erő és az F_k kötélereő eredője szolgáltatja, melynek nagysága $mg \operatorname{tg} \varphi$ (1.35. ábra).



1.35. ábra: Kúpinga mozgása

Innen:

$$mg \operatorname{tg} \varphi = m\omega^2 l \sin \varphi.$$

Ebből:

$$\cos \varphi = \frac{g}{l\omega^2},$$

vagy

$$\varphi = \arccos\left(\frac{g}{l\omega^2}\right),$$

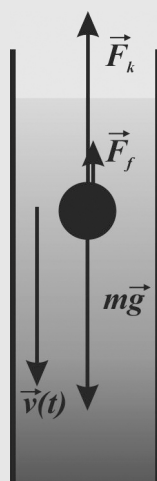
amely független az m tömegtől és növekvő ω értékre növekvő.♣

1.14. Példa: Esés ellenálló közegben

Határozzuk meg a folyadékban szabadon eső r sugarú és m tömegű golyó sebességét és gyorsulását az idő függvényében!

Megoldás:

Ha egy r sugarú és m tömegű golyó folyadékban esik, akkor az mg nehézségi erőn kívül az $F_f = \rho_f V_t g$ felhajtóerő és a sebességgel arányos $F_k = k\dot{x} = kv$ közegellenállási erő is hat rá (7. Animáció: [Esés ellenálló közegben](#)). Ez utóbbi két erő ellentétes irányú a nehézségi erővel (1.36. ábra).



1.36. ábra: Esés ellenálló közegben

Az esésre vonatkozó mozgásegyenlet a dinamika alapegyenletéből:

$$mg - F_f - F_k = m\ddot{z}(t).$$

Ebben $mg - F_f = \text{konstans}$ és mg^* -gal jelöljük, ahol $g^* < g$ és $F_k = kv = mk'v$, ahol k' a közegellenállási erőtvényben szereplő k közegellenállási együtthatóból az m tömeg kiemelése utáni arányossági együttható. Ezekkel a jelölésekkel:

$$mg^* - mk'\dot{z}(t) = m\ddot{z}(t),$$

amelyben $\dot{z}(t) = v(t)$, valamint m -mel történő egyszerűsítés után:

$$g^* - k'v(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv(t)}{dt},$$

ami szétválasztható differenciálegyenlet, amely a változók szeparálása után:

$$\frac{dv(t)}{g^* - k'v(t)} = dt.$$

Ennek integrálja:

$$t = \int_0^v \frac{dv}{g^* - k'v} = -\frac{1}{k'} \left[\ln(g^* - k'v) \right]_0^v = -\frac{1}{k'} \ln \frac{g^* - k'v}{g^*}.$$

Ebből az esési sebesség:

$$v(t) = \frac{g^*}{k'} (1 - e^{-k't}),$$

a tömegpont gyorsulása pedig:

$$a(t) = \dot{v}(t) = g^* e^{-k't}$$

A kezdeti gyorsulási (tranziens) szakasz után, amikor $t \rightarrow \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{g^*}{k'} = \text{állandó}$,

valamint $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$, tehát a mozgás az idő múlásával egyre inkább egyenletessé válik. ♣

A példákban látható, hogy a dinamika alapegyenletének megoldása milyen összetett matematikai apparátust igényel még speciális mozgások (síkmozgás, egyenes mentén történő mozgás stb.) esetén is. Láttuk továbbá, hogy a koordináta-rendszer megválasztása és a kezdeti feltételek megadása milyen fontos szerepet játszanak egy-egy konkrét probléma megoldásánál.

1.2.1.5. Impulzus (lendület, mozgásmennyiség)

Egy test m tömegének és \vec{v} sebességének szorzatát *impulzusnak* (lendületnek vagy mozgásmennyiségnek) nevezzük és I -vel jelöljük:

$$\boxed{\vec{I} = m\vec{v}}.$$

Az impulzus vektormennyiség, iránya megegyezik a sebesség irányával. SI-beli mértékegysége: $kg \cdot \frac{m}{s}$.

Newton a II. axiómát ennek a mennyiségnek a felhasználásával fogalmazta meg, miszerint

$$\vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt} = \dot{\vec{I}},$$

vagy:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt},$$

amit *impulzustételnek* nevezünk. Ha m állandó (a klasszikus mechanika szerint), akkor:

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}.$$

Látható, hogy az impulzusváltozás:

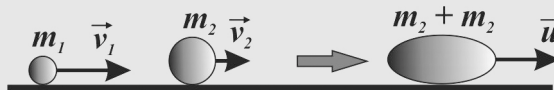
$$d\vec{I} = \vec{F} dt,$$

amit „*erőlökésnek*” is szoktak nevezni. Ha $F = 0$, akkor $dI = 0$, azaz ha a tömegpontra nem hat erő (vagy ha az erők eredője zérus), akkor a test impulzusa nem változik meg, állandó. Ezt az **impulzusmegmaradás törvényének** nevezzük:

„*Külső erők hiányában a zárt rendszer impulzusa állandó.*”

1.15. Példa: Tökéletesen rugalmatlan ütközés

Számítsuk ki, hogy az m_1 tömegű, v_1 sebességű és az m_2 tömegű, v_2 sebességű pontszerű testek 1.37. ábra szerinti tökéletesen rugalmatlan ütközése után mekkora lesz a közös u sebességük!



1.37. ábra: Két test rugalmatlan ütközése

Megoldás:

Az impulzusmegmaradás törvénye szerint az ütközés előtti I_1 és I_2 impulzusok összegének meg kell egyeznie az ütközés utáni I impulzussal:

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 = \vec{I}.$$

A vektoriális jelölés az egyirányú ütközés miatt elhagyható:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u.$$

Ebből az ütközés utáni közös sebesség ([8. Animáció: Rugalmatlan ütközés](#)):

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} . \clubsuit$$

1.16. Példa: Elhajított test impulzusváltozása

Egy m tömegű golyót v_0 kezdősebességgel vízszintesen elhajítunk. Mekkora az impulzusváltozása mozgása során dt idő elteltével, és mekkora a golyóra ható erő?

Megoldás:

Mivel a golyó sebessége dt idő múlva:

$$\vec{v}(dt) = \vec{v}(t) + \vec{g}dt ,$$

ezért:

$$d\vec{v} = \vec{v}(dt) - \vec{v}(t) = \vec{g}dt ,$$

és:

$$d\vec{I} = m d\vec{v} = m\vec{g}dt .$$

Innen:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{m\vec{g}dt}{dt} = m\vec{g} ,$$

azaz a golyóra ható erő a nehézségi erő, amely az impulzusváltozással egyirányú. ♣

1.2.1.6. A Forgatónyomaték

A tengellyel rögzített testek erő hatására forgásba jöhetnek, ha az erő hatásvonala nem esik egybe a forgástengellyel. Nem mindegy, hogy az erő hatásvonala milyen messze esik a forgástengelytől és szintén különböző forgató hatást fejt ki, ha az iránya más. Az erő forgató hatásának jellemzésére bevezetjük a *forgatónyomaték* fogalmát. Az \vec{F} erőnek az O ponttal jellemzett forgástengelyre vonatkozó forgatónyomatékát az

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

vektorral definiáljuk, ahol \vec{r} az O pontból az \vec{F} erő támadáspontjába mutató vektor. A forgatónyomaték nagysága:

$$M = rF \sin \alpha ,$$

ahol $r \sin \alpha$ az erő hatásvonalának az O ponttól való távolsága, röviden: *k erőkar*. Ezzel a forgatónyomaték nagysága:

$$M = kF ,$$

az erő és az erőkar szorzata, SI-beli mértékegysége a newtonméter, jele: Nm .

1.2.1.7. Az impulzusmomentum (perdület)

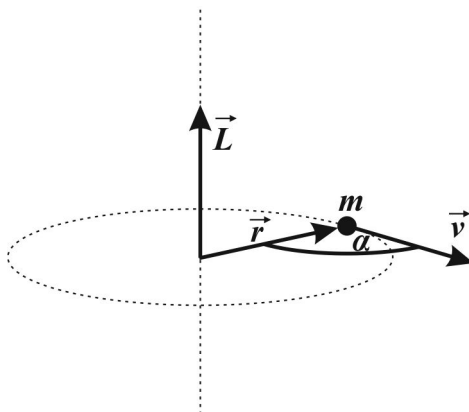
Egy nem egyenesvonalú mozgást végző m tömegű test $\vec{I} = m\vec{v}$ pillanatnyi impulzus-vektorának és a pálya pillanatnyi \vec{r} sugarának vektoriális szorzata alatt a test *impulzusmomentumát* (perdületét) értjük, amelynek jele: \vec{L} , kiszámítása:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{I},$$

irányát a jobbkézsabály adja meg. Nagysága:

$$L = rI \sin \alpha = rmv \sin \alpha,$$

ahol α a \vec{v} sebesség és az \vec{r} sugár által bezárt szög (1.38. ábra):



1.38. ábra: Impulzusmomentum

Megmutatható, hogy az impulzusmomentum és a testre ható forgatónyomaték között az erő és az impulzus között fennállóhoz hasonló kapcsolat van:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}}.$$

„Ha a testre ható erők forgatónyomatékainak összege zérus, akkor ebből az következik, hogy a test impulzusmomentumának változása is zérus, vagyis az impulzusmomentum állandó – megmaradó mennyiség.”

Ezt az **impulzusmomentum-megmaradás törvényének** nevezzük.

1.3. A munka és az energia

1.3.1. Az energia

A kölcsönhatásokban résztvevő testek képesek a másik test valamely fizikai jellemzőjének megváltoztatására. Ezen tulajdonságukat *változtatóképességnek* nevezzük. A változtatóképesség jellemzésére bevezetett fizikai mennyiség az *energia*. Az energia az anyagi rendszereket jellemző skaláris mennyiség.

„Környezetétől elszigetelt, ún. zárt rendszer esetén az energia értéke időben állandó marad.”

Ez az **energiamegmaradás törvénye**. A törvényt számos tudós fogalmazta meg speciális esetekre tekintve, az elv általános modern elfogadása Hermann von HELMHOLTZ német fizikus 1847-es publikációjából ered.

1.3.2. A munka

Ha a test energiaváltozása rendezett mozgással, impulzusátadással (és -átvétellel) történik, akkor *munkavégzésről* beszélünk, a munkavégzéssel átadott (átvett) energiát pedig *munkának* nevezzük, jele: W .

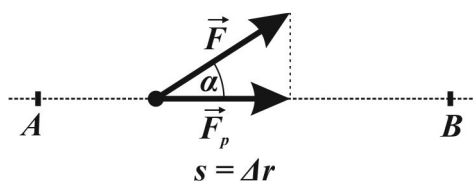
A mechanika **munkatétele** ezek alapján:

$$W = \Delta E,$$

azaz:

„Egy a környezetétől termikusan szigetelt testen végzett W munka a test energiájának megváltozására fordítódik.”

A Fizikában munkavégzésről akkor beszélünk, ha a testre ható erőnek (ill. az erők eredőjének) van a test elmozdulásának irányába erő komponense (1.39. ábra).



1.39. ábra: Munkavégzés egyenes úton

Állandó nagyságú és irányú erő és egyenes pályán történő elmozdulás esetén a munka az \vec{F} erő $\Delta \vec{r}$ elmozdulás irányába eső komponensének és az elmozdulásnak a szorzata, ami matematikailag az \vec{F} erő és hatására bekövetkező $\Delta \vec{r}$ elmozdulás vektorok *skalárszorzata*:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

A munka SI-beli egysége: $N \cdot m = J$ (joule), skaláris fizikai mennyiség, csak nagysága van, iránya nincs. Definíció szerint általános esetben, ha az \vec{r} helyvektorral jellemzett pontban ható $\vec{F}(\vec{r})$ erő hatására a test $d\vec{r}$ elmozdulást szenved, akkor a végzett elemi munka:

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r},$$

a teljes munka \vec{r}_1 helyvektorral jellemzett ponttól \vec{r}_2 helyvektorral jellemzett pontig pedig:

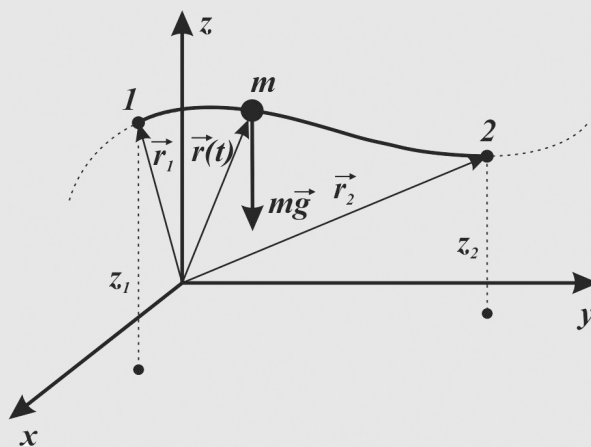
$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}.$$

Az \vec{F} erőnek az elmozdulás szerinti úgynevezett *vonaltintegrálját* általában nagyon nehéz kiszámítani, viszont speciális esetekben megoldható.

1.3.3. Példák speciális munkákra

1.17. Példa: A nehézségi erő munkája és a potenciális energia

A Föld felszínén, továbbá nem túl nagy térrészben és magasságban az m tömegű testre $m\vec{g}$ nehézségi erő hat. Számítsuk ki hogy mekkora a nehézségi erő munkája, ha a test tetszőleges görbe mentén $\vec{r}_1(t)$ helyről $\vec{r}_2(t)$ helyre mozdult el.



1.40. ábra: Munkavégzés görbe vonalú pályán

Megoldás:

Ha az $x - y$ sík a föld felszínén van, akkor $\vec{F}(F_x; F_y; F_z) = \vec{F}(0; 0; -mg)$, a helyvektorok koordinátái pedig $\vec{r}_1(x_1; y_1; z_1)$ és $\vec{r}_2(x_2; y_2; z_2)$. Elemi $d\vec{r}$ elmozdulás esetén az elemi munka:

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -mg dz.$$

A nehézségi erő munkája pedig z_1 és z_2 magassági pontok között:

$$W_{neh} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{z_1}^{z_2} -mg dz = -mg [z]_{z_1}^{z_2} = mg(z_1 - z_2) = mgh.$$

Ez az eredmény meglepő, hiszen a végzett munka teljesen független az $\vec{r}(t)$ pályagörbétől, azaz közömbös, hogy milyen pályán jutott a test A-ból B-be (\vec{r}_1 helyről \vec{r}_2 helyre). Az ilyen erőt *konzervatív erőnek* nevezzük.

Abban az esetben, ha a test a Föld felé mozog ($z_1 > z_2$), W értéke pozitív, ekkor nehézségi erő végzi a munkát.

Ha a testet a gravitációs mező ellenében, azzal ellenkező irányú, $F_{em} = mg$ nagyságú emelő erő h magasságba mozgatja, a nehézségi erő által végzett W munka negatív, míg az emelő erő által végzett $W = mgh$ munka pozitív.

A munkatétel szerint ez egyenlő a test energiájának ΔE megváltozásával. Legyen a $h = 0$ magasság a Föld felszínén. Ekkor az

$$E_p = mgh$$

mennyiséget a test nehézségi erővel és Földfelszín feletti helyzetével (magasságával) kapcsolatos *potenciális (helyzeti, magassági) energiájának* nevezzük, értéke a Föld felszínén zérus, a Föld felszíne alatt negatív.♣

Megjegyzés:

A fenti megállapítás nem annyira szigorú. Mivel a fizikai folyamatokban csak az energia változása játszik szerepet, nem pedig maga az energia, ezért a magasságot bárhol lehet mérni.

1.18. Példa: A gyorsító erő munkája és a kinetikus energia

A testek gyorsításához erő szükséges. Számítsuk ki az állandó nagyságú és irányú F erő által gyorsított m tömegű testen, annak vízszintesen, súrlódásmentesen, egyenes vonalú pályán álló helyzetből v sebességre való gyorsításakor végzett munkát!

Megoldás:

A munka általános definíciója szerint:

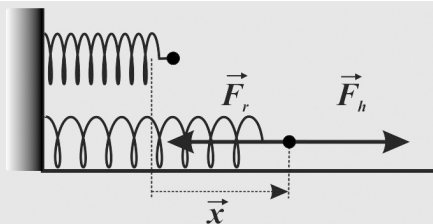
$$W_{gy} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = Fs = ma \frac{a}{2} t^2 = \frac{1}{2} mv^2.$$

A munkatétel szerint ez egyenlő a test energiájának ΔE megváltozásával, ami a zérus kezdősebesség miatt az m tömegű, sebességű test mozgásával kapcsolatos energiája, az ún. *kinetikus (mozgási) energia*.

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 \quad \clubsuit$$

1.19. Példa: A rugalmas erő munkája

Számítsuk ki egy rugót lassan (állandó sebességgel) megnyújtó, az x_1 hosszúságról x_2 hosszúságra megnyújtott rúgó által kifejtett $\vec{F}_r = -D\vec{x}$ rugóerővel szemben ható $\vec{F}_h = D\vec{x}$ nagyságú húzóerő és a rugalmas erő munkáját (1.41. ábra)! ([9. Animáció: Rugó megnyúlása](#))



1.41. ábra: Rugalmas erő munkája

Megoldás:

A munka általános definíciója szerint:

$$W_h = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} Dxdx = D \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2} D(x_2^2 - x_1^2).$$

A munkatétel szerint ez egyenlő a test energiájának ΔE megváltozásával, ami $x_1=0$ kezdeti megnyúlás esetén az x megnyúlású rugóban tárolt *rugalmas energiával* egyenlő:

$$E_r = \frac{1}{2} Dx^2.$$

Ugyanekkor az F_h húzóerővel ellentétes irányú rugalmas erő munkája:

$$W_r = -W_h = -\frac{1}{2} D(x_2^2 - x_1^2).$$

Ha $x_2 > x_1$ (a rugót megnyújtjuk), W_h pozitív (a nyújtóerő végez munkát), míg W_r negatív (a rugalmas erő ellenében végeznek munkát).

Ha $x_1 > x_2$ (a rugó összehúzódik), W_h negatív (a nyújtóerő ellenében végez munkát a rugóerő), míg W_r pozitív (a rugalmas erő végez munkát).♣

1.20. Példa: A csúszási súrlódási erő munkája

Számítsuk ki a valamely felületen csúszó test mozgásának irányával ellentétes irányú $F_s = \mu F_{ny}$ csúszási súrlódási erő munkáját s úton!

Megoldás:

A munka általános definíciója szerint:

$$W_{ny} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \vec{F}_s \cdot \vec{s} = F_s s \cos 180^\circ = -\mu F_{ny} s. \clubsuit$$

1.21. Példa: Kényszererő munkája

Számítsuk ki egy testre ható, sebességének irányára minden pillanatban merőleges irányú F_k erő, ún. kényszererő munkáját s úton!

Megoldás:

A munka általános definíciója szerint:

$$W_{ny} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \vec{F}_k \cdot \vec{s} = F_k s \cos 90^\circ = 0,$$

tehát a test pillanatnyi mozgásirányára merőleges irányú erő a testen nem végez munkát.♣

1.22. Példa: Harmonikus oszcillátor energiája

Számítsuk ki a D rugóállandójú rugóra erősített, harmonikus rezgőmozgást (oszcillációt) végző m tömegű testből és rugalmas rugóból álló rendszer összes energiáját!

Megoldás:

Az oszcillátor (rezgő rendszer) része a rezgő test és a rezgést fenntartó erőt biztosító rugalmas test (rugó). Ha nincs csillapítás, akkor a rezgő rendszer összes energiája állandó és megegyezik a rezgésbe hozáshoz szükséges munkával. A rugóban tárolt rugalmas energia x megnyúlásnál (kitérésnél):

$$E_r = \frac{1}{2} D x^2.$$

Ebben a helyzetben a v sebességgel rezgő kinetikus energiája:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2.$$

A rezgés összes energiája pedig:

$$E_{\ddot{o}} = E_k + E_r = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} D x^2.$$

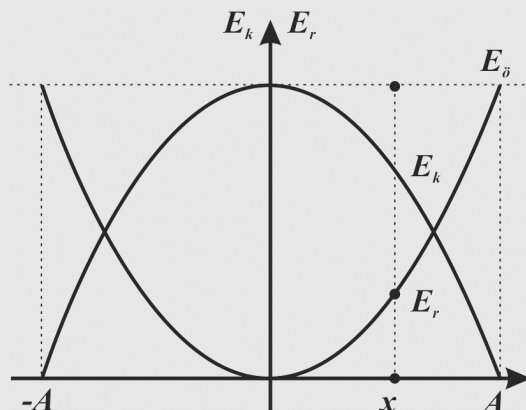
Behelyettesítve az x kitérésre és a v sebességre a harmonikus rezgőmozgásnál kapott összefüggéseket:

$$E_{\ddot{o}} = \frac{1}{2} \left[D A^2 \sin^2(\omega t) + m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) \right] = \frac{1}{2} A^2 \left[D \sin^2(\omega t) + m \omega^2 \cos^2(\omega t) \right].$$

Mivel $m \omega^2 = D$, ezért:

$$E_{\ddot{o}} = \frac{1}{2} A^2 \left[D \sin^2(\omega t) + D \cos^2(\omega t) \right] = \frac{1}{2} D A^2 = \text{állandó},$$

ami valóban a munkatételnek felel meg, és az energiamegmaradás törvényét tükrözi: a rendszer összes energiája időben állandó. Az energiaviszonyokat az 1.42. ábra szemlélteti:♣



1.42. ábra: Harmonikus oszcillátor energiája

1.3.4. A teljesítmény

A *teljesítmény* számértékileg megadja az időegység alatt végzett munkát, jele: P . Ha t idő alatt W munkát végzünk, akkor a

$$\langle P \rangle = \frac{W}{t}$$

hányados az *átlagteljesítményt* adja meg. SI-beli egysége a $\frac{J}{s} = W$ (watt). A $W = Pt$ szorzat alapján a munka gyakran használatos egysége még: Wh ($1 Wh = 3,6 \cdot 10^3 J$), és ennek többszörösei (kWh , MWh).

Ha a munkavégzés az időben nem egyenletesen történik, akkor a *pillanatnyi teljesítmény*:

$$P(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W(t)}{\Delta t} = \frac{dW(t)}{dt} = \dot{W}(t).$$

Ha $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, akkor:

$$P(t) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}(t)$$

A teljesítmény, ugyanúgy, mint a munka, skaláris mennyiség.

1.3.5. Hatásfok

A testek kölcsönhatása során a befektetett összes munkának csak egy része hasznosul. A maradék – a munkavégzés szempontjából meddő – része *irreverzibilisen* más energiaátadásra fordítódik, pl. súrlódás révén hő keletkezik, kisugárzódik stb.

A kölcsönhatás során végzett W_h hasznos munka és a W_δ összes befektetett munka aránya a *hatásfok*, jele: η . Kiszámítása:

$$\eta = \frac{W_h}{W_\delta},$$

ami egy mértékegység nélküli arányszám, és számértéke megmutatja, hogy a befektetett munka hányad része tekinthető hasznosnak. A munka és a teljesítmény egyenes arányossága miatt:

$$\eta = \frac{P_h}{P_\delta}.$$

Az energiamegmaradás törvénye szerint a hasznos munka nem lehet nagyobb, mint a befektetett összes munka, ezért elméletileg $\eta \leq 1$. Az $\eta = 1$ esetben a befektetett munka teljes egészében hasznosulna. Az ilyen gépet *perpetuum mobile*-nek (örökmozgónak) nevezzük, mert a hasznosult energiát ismét teljes egészében vissza lehetne nyerni és be lehetne fektetni, ami ismét teljes egészében hasznosulna stb. A Hőtan szerint azonban *perpetuum mobile* (lásd később) nem létezik, ezért gyakorlatilag mindig: $\eta < 1$ (100%).

1.4. Megoldandó feladatok

- Milyen messze lesznek egymástól indulás után 15 perc múlva a $20 \frac{m}{s}$ állandó sebességgel, és a vele ellentétes irányban $0,1 \frac{m}{s^2}$ állandó gyorsulással álló helyzetből, ugyanonnan induló testek?
- Indulás után hány perc múlva lesz egymástól 500 m távolságra az azonos helyről induló, a $20 \frac{m}{s}$ állandó sebességgel Észak felé, és a $25 \frac{m}{s}$ állandó sebességgel Kelet felé haladó autók?
- Milyen magasra emelkedik a $35 \frac{m}{s}$ kezdősebességgel függőlegesen felfelé hajított test?
- Milyen magasan tartózkodik a 25 m magasból zérus kezdősebességgel szabadon ejtett test, amikor pillanatnyi sebessége megegyezik Földet érésig tartó esése átlagsebességével?
- Milyen messze lesz kiindulási helyétől indulás után 3 s múlva a $10 \frac{m}{s}$ kezdősebességgel vízszintesen elhajított test?
- Mennyi idő alatt halad el egy $80 \frac{km}{h}$ sebességgel haladó mozdony vezetője mellett a párhuzamos sínpáron szembejövő, $70 \frac{km}{h}$ sebességgel haladó, 200 m hosszú tehervonat?
- Egy gépkocsi álló helyzetből indulva, $1 \frac{m}{s^2}$ gyorsulással egyenletesen gyorsul 50 m úton. Mennyi ideig tart ez és mekkora sebességet ér el?
- Határozzuk meg az $s(t) = 3t^3 - 2t^3 + 1$ mozgásegyenletű test pillanatnyi sebességét, és pillanatnyi gyorsulását az indulás után 5 s múlva!
- Határozzuk meg az $a(t) = 3t - 1$ pillanatnyi gyorsulással mozgó test pillanatnyi sebességét és helyét az indulás után 4 s múlva, ha az origóból álló helyzetből indult!
- Kiindulási helyétől milyen messze ér partot a $2 \frac{m}{s}$ állandó sebességgel, a folyásirányra merőlegesen haladó csónak az $5 \frac{m}{s}$ sebességű és 50 m szélességű folyón áthaladva?
- A merőlegeshez képest hány fokos szögben kell haladnia az $1 \frac{m}{s}$ állandó sebességre képes úszónak a $0,5 \frac{m}{s}$ sebességű folyó átúszásakor, ha mindvégig merőlegesen akar haladni?
- Hol érjen partot a vízben $1 \frac{m}{s}$ sebességgel úszni, és a parton $10 \frac{m}{s}$ sebességgel futni képes ember, hogy a víz szélétől befelé 15 m-rel lévő A pontból elindulva minimális idő alatt érjen az A ponttól számítva, a parttal párhuzamosan 50 m-re, a partra merőlegesen 15 m-rel kifelé lévő B pontba?
- Egy kutya 40 m távolságra van a gazdájától. Ha egymással szembe haladnak, akkor 10 s múlva találkoznak, ha azonos irányba mozognak, akkor a kutya 20 s múlva éri utol a gazdát. Határozzuk meg a kutya és a gazda sebességét!

14. Egy toronyból vízszintesen $20 \frac{m}{s}$ kezdősebességgel eldobunk egy testet, ami a torony lábától $40 m$ -re ér talajt. Mennyi ideig mozog a test? Milyen magas a torony? Mekkora sebességgel csapódik a test a talajba? A talajba csapódó test sebessége mekkora szöveget zár be a függőlegessel?
15. Mekkora az óra kismutatójának periódusideje, fordulatszáma és szögsebessége?
16. Mekkora kerületi sebességgel mozog a $33 \frac{1}{min}$ fordulatszámmal forgó, $30 cm$ átmérőjű hanglemez széle?
17. Mekkora a $24 h$ forgásidejű, $6370 km$ sugarú Föld egyenlítőn lévő pontjának kerületi sebessége?
18. Mekkora a Földtől átlagosan 380 millió km távolságban keringő, 29 nap keringési idejű Hold kerületi sebessége és szögsebessége?
19. Mekkora a 145 millió km sugarú, közelítően kör alakú pályán mozgó 365 nap keringési idejű Föld centripetális gyorsulása?
20. Mekkora a $30 cm$ sugarú körön $40 \frac{m}{s^2}$ centripetális gyorsulással mozgó test mozgásának periódusideje?
21. Egy $1,5 m$ sugarú körpályán mozgó test $5 s$ alatt 20 fordulatot tesz meg. Mekkora a fordulatszáma és a periódusideje? Mekkora a kerületi sebessége?
22. Egy kerékpár kereke 20 fordulatot tesz meg $10 s$ alatt. A kerékpár a kerék egy körülfordulása alatt $2,1 m$ -t tesz meg. Mekkora kerék legfelső pontjának kerületi sebessége és centripetális gyorsulása?
23. Mosógép $25 cm$ sugarú centrifugája $1000 \frac{1}{min}$ fordulatszámmal, forog. Mekkora a kerületi sebessége és centripetális gyorsulása? Hányszorosa ez a nehézségi gyorsulásnak?
24. Harmonikus rezgőmozgást végző test kitérése az idő függvényében: $x(t) = 0,3 \sin 4\pi t$. Mekkora a rezgés amplitúdója, körfrekvenciája, frekvenciája és periódusideje?
25. Harmonikus rezgőmozgást végző test amplitúdója $5 cm$, frekvenciája pedig $4 Hz$. Határozzuk meg a kitérés-idő függvényt, ha a test maximális kitérésű helyről indul. Mekkora a test sebessége az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor és azt követően $0,01 s$ -mal?
26. Harmonikus rezgőmozgást végző test kitérése az idő függvényében: $x(t) = 10 \sin \frac{2}{3} \pi t$. Mekkora a test legnagyobb sebessége, legnagyobb gyorsulása és átlagos sebességnagysága egy teljes rezgés alatt.
27. $5 \frac{N}{m}$ rugóállandójú rugóra $15 g$ tömegű testet erősítünk, és a rugót $5 cm$ -rel megnyújtva elengedjük. Mekkora lesz a kialakuló rezgés frekvenciája? Írjuk fel a rezgést leíró kitérés-idő, sebesség-idő és gyorsulás-idő függvényt!
28. A rugó végére függesztett testet úgy hozzuk rezgésbe, hogy a testet nyugalmi helyzetéből függőlegesen egyenes mentén lefelé $5 cm$ -rel kitérítve, magára hagyjuk. Az időt ettől a pillanattól mérjük. Mekkora a rezgés kezdőfázisa? Mekkora a test kitérése az elengedéstől számított $0,5 s$ múlva, ha a periódusidő $1,2 s$?
29. Harmonikus rezgőmozgást végző test legnagyobb sebessége $50 \frac{m}{s}$, legnagyobb gyorsulása $120 \frac{m}{s^2}$. Mekkora a mozgás amplitúdója, periódusideje és frekvenciája? Mekkora sebességgel mozog az egyensúlyi helyzetből való indulás után $2 s$ múlva?
30. Az asztallapon rugók által mozgatott kiskocsi $10 cm$ -es amplitúdójú, $2 s$ periódusidejű harmonikus rezgést végez nulla kezdőfázissal. Mekkora a sebessége és a gyorsulása az egyensúlyi helyzettől $2 cm$ távolságban? Mennyi idő alatt jut ebből a pontból az egyensúlyi helyzet másik oldalán ugyanilyen távolságra lévő pontba?
31. Mennyi idő alatt ér a rezgőmozgást végző test az egyensúlyi helyzetből $\frac{A}{2}$ távolságra, ha a rezgésideje $1,5 s$?

32. Harmonikus rezgőmozgást végző test a rezgésidő hányad része alatt teszi meg a középső helyzettől a szélső helyzetig az egész utat, az út első és az út második felét?
33. Egy 6 cm amplitúdójú szinuszos rezgést végző tömegpont az első fél periódusban $0,001\text{ s}$ alatt veszi fel kétszer egymás után a 3 cm -es kitérést. Mekkora a rezgés frekvenciája?
34. Mennyi idő telik el addig, amíg 54 Hz frekvenciájú, 8 cm amplitúdójú, szinuszos rezgés kitérése 3 cm -ről 7 cm -re növekszik?
35. Harmonikus rezgőmozgást végző test amplitúdója 10 cm , rezgésideje $1,57\text{ s}$. Mekkora kitérése mellett egyezik meg a gyorsulás és a sebesség számértéke?
36. Rugóra ráhelyezett test rezgésének amplitúdója 2 cm . Mekkora lehet a rezgésidő, hogy a test a mozgás során végig a rugón maradjon?
37. Egy teherautó tömege 5000 kg . A rugózás miatt függőleges irányban rezgéseket végezhet, melynek frekvenciája terheletlen kocsi esetén 2 Hz . Mennyivel változik a frekvencia, ha a kocsi 2000 kg tömegű rakományt szállít?
38. Rugón függő $0,2\text{ kg}$ tömegű test másodpercenként 6 rezgést végez. Mekkora tömegű test végez ugyanazon a rugón 8 s alatt 100 teljes rezgést?
39. 50 g tömegű testet rugóra akasztunk, majd rezgésbe hozunk. A test 18 Hz frekvenciával rezeg. Ha erre a rugóra még egy ismeretlen tömegű testet akasztunk, 8 s alatt 50 teljes rezgést mérünk. Határozzuk meg a test tömegét!
40. Határozzuk meg a sebesség, és a gyorsulás időfüggvényét abban az esetben, ha a kitérés időfüggvénye a következő:
- $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$,
 - $x(t) = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$,
 - $x(t) = A \cos \omega t$
41. A nyugalmi helyzetből v_0 sebességgel indított rezgő test sebessége $0,2\text{ s}$ múlva a felére csökken. Mekkora a rezgésidő és a frekvencia? Az indítás után mennyi idő múlva lesz a gyorsulás nagysága a maximális gyorsulás fele?
42. Egy 15 s rezgésidőjű és 10 cm -es amplitúdójú szinuszos rezgés kitérése 1 s alatt kétszereződik meg. Mekkora a kérdéses kitérés?
43. Két azonos amplitúdójú harmonikusan rezgő test frekvenciája 50 Hz , ill. 60 Hz . Attól a pillanattól számítva, amikor egyszerre haladnak át az egyensúlyi helyzeten, mennyi idő múlva lesz először egyenlő a kitérésük?
44. Mi a feltétele annak, hogy a harmonikus rezgőmozgást végző test maximális sebességének számértéke az amplitúdó értékének kétszerese legyen?
45. 5 kg tömegű puskából $0,02\text{ kg}$ tömegű lövedéket lövünk ki. Mekkora a puska hátramozgásának a sebessége, ha a lövedék a csövet $500\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel hagyja el?
46. Egy egyenes mentén egymás felé haladó gyurmagolyók frontálisan ütköznek. A golyók tömege 50 g valamint 250 g , sebességeik ütközés előtt $6\frac{\text{m}}{\text{s}}$ valamint $2\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ilyen irányba és mekkora sebességgel mozognak a golyók rugalmatlan ütközésük után?
47. Egy 20 kg -os lövedék vízszintes irányba repül $72\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Egy adott pillanatban két részre hasad. A 12 kg -os darabja ugyanabba az irányba repül tovább $25\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel. Merre és mekkora sebességgel repül tovább a második darab?

48. A 25 kg-os homokzsák kötél segítségével fel van függesztve. A zsákba vízszintes irányból egy 10 g-os lövedéket lőnek $400 \frac{m}{s}$ sebességgel. A lövedék belefűrődik a zsákba és megáll benne. A zsák kilengésekor milyen magasra emelkedik a homokzsák súlypontja?
49. Vízszintes, súrlódásmentes felületen két kiskocsi egymás felé közeledik egy egyenes mentén. Az egyik kocsi tömege 100 g sebessége $2 \frac{m}{s}$, a másik kocsi tömege 300 g, sebessége $4 \frac{m}{s}$. Ütközésük után az első kiskocsi eredeti mozgásirányával ellentétesen mozog $7 \frac{m}{s}$ sebességgel. Merre és mekkora sebességgel mozog ütközés után a második kocsi?
50. Vízszintes asztalon 200 g és 500 g tömegű golyók egymás felé mozognak $5 \frac{m}{s}$ és $1 \frac{m}{s}$ sebességekkel. Ütközésük következtében a golyók szét pattannak, ellenkező irányba mozognak. Mekkora a nehezebb golyó sebessége, ha a könnyebb golyó sebessége $3 \frac{m}{s}$?
51. Két, egyenként 10 kg tömegű kiskocsi áll egymással szemben egy egyenes, vízszintes úton, mindegyikben egy 60 kg tömegű ember ül. Az egyik kiskocsiban egy 5 kg-os medicinlabda is található, melyet a kocsiban lévő ember átdob a másik embernek. A labda vízszintes irányú sebessége $8,4 \frac{m}{s}$ a földhöz képest. Mekkora sebességgel mozog a földhöz képest az első kiskocsi azután, hogy utasa eldobta a labdát, és mekkorával a másik, miután utasa elkapta azt?
52. Mennyi a sebességváltozása 200 N erő által gyorsított 1500 kg tömegű kerékpárnak, ha a gyorsítás ideje 30 s?
53. Mekkora a gyorsító erő hat az 1000 kg tömegű, 250 m-es úton 20 s-ig egyenletesen gyorsuló gépkocsira?
54. Mekkora erő hat az 50 kg tömegű testre, ha sebességét 8 s alatt zérusról $10 \frac{m}{s}$ -ra növeli?
55. Mennyivel nyúlik meg a $40 \frac{N}{m}$ rugóállandójú rugó a liftben, ha arra 400 g tömegű testet függesztünk, és a lift:
- $5 \frac{m}{s^2}$ gyorsulással indul lefelé;
 - egyenletesen mozog lefelé;
 - $6 \frac{m}{s^2}$ gyorsulással mozog felfelé;
 - szabadon esik?
56. 5 dkg tömegű követ kötéllel 30 cm sugarú körpályán mozgatunk körbe másodpercenként 4 s alatt, majd vízszintesen elengedjük. Mekkora erővel kell tartani a kötelet? Mekkora lesz a kő sebessége, amikor elhagyja a parittyát?
57. Egy 20 g tömegű $700 \frac{m}{s}$ sebességű lövedék 35 cm mélyen fűrődött a fába. Ha a mozgást egyenletesen lassúnak gondoljuk, akkor mennyi idő alatt állt meg a fában? Mekkora volt a gyorsulása, mekkora erő fékezte a mozgását?
58. Egy 100 kg tömegű ejtőernyős állandó sebességgel egyenletesen süllyed. Mekkora a rá ható közegellenállási erő? Mekkora a rá ható erők eredője?
59. Egy lift $1,5 \frac{m}{s^2}$ gyorsulással mozog lefelé. Mekkora a súlya a benne álló 70 kg tömegű személynek?

60. Egy $72 \frac{km}{h}$ sebességgel haladó gépkocsi kerekei és az út között a tapadási súrlódási tényező 0,8. Mennyi idő alatt tud megállni megcsúszás nélkül? Mennyi utat tesz meg ez alatt?
61. Mekkora erővel kell húzni a $35 kg$ tömegű testet vízszintes felületen vízszintes irányban, hogy állandó sebességgel mozogjon, ha a csúszási súrlódási tényező értéke 0,4?
62. Mekkora utat tesz meg $5 s$ alatt az a $15 kg$ tömegű test, amelyet a vízszintessel 30° -os szöget bezárva $55 N$ nagyságú állandó erővel húzunk, ha a csúszási súrlódási tényező értéke 0,05?
63. Két, fonállal összekötött $5 kg$ és $8 kg$ tömegű testet húzunk $80 N$ nagyságú vízszintes irányú erővel. Mekkora lesz a rendszer gyorsulása? Mekkora erő feszíti a kötelet?
64. Két, fonállal összekötött $5 kg$ és $8 kg$ testet egy csigán átvett kötélre erősített $6 kg$ tömegű test húz. A fonál tömege elhanyagolható és a súrlódástól is eltekintünk. Mekkora a rendszer gyorsulása? Mekkora erő feszíti a köteleket?
65. Csigán átvett kötélén $20 g$ és $40 g$ tömegű testek lógnak, melyeket egymással összekötve $30 \frac{N}{m}$ rugóállandójú rugó tart egyensúlyban. Mekkora a rugóban ébredő erő, mekkora a rugó megnyúlása?
66. $10 kg$ és $20 kg$ tömegű testeket kötél tart össze, melyeket vízszintesen $45 N$ nagyságú erővel húzzuk. Mekkora a utat tesz meg a rendszer $5 s$ alatt, ha a könnyebbik test és a talaj közötti csúszási súrlódási tényező nagysága 0,2, a nehezebbik és a talaj közötti pedig 0,1? Mekkora erő feszíti a kötelet?
67. Vízszintes felületen $15 kg$ tömegű testet húzunk egy $50 \frac{N}{m}$ rugóállandójú rugóra kifejtett, vízszintes irányú, $100 N$ nagyságú erővel. Mekkora a rugó megnyúlása, és a rendszer gyorsulása, ha a láda és a felület közötti csúszási súrlódási tényező értéke 0,2?
68. Mekkora felhajtóerő hat a víz alá, olaj alá és higany alá lenyomott $2 cm^3$ térfogatú kockára?
69. Milyen magas része látszik ki a vízben úszó, $20 cm$ magas fahasábnak, ha sűrűsége $750 \frac{kg}{m^3}$?
70. $750 \frac{kg}{m^3}$ sűrűségű, $5 dm^2$ felületű, és $5 cm$ magas fahasáb vízben úszik. Mekkora része látszik ki a vízből, ha egy $50 g$ tömegű testet helyezünk rá? Legfeljebb mekkora tömegű testet tehetünk rá, hogy éppen ne merüljön el?
71. $750 \frac{kg}{m^3}$ sűrűségű, $5 dm^2$ felületű, és $5 cm$ magas fahasábból $0,5 cm$ látszik ki a vízből úgy, hogy fonállal az edény aljához erősítettük. Mekkora erő feszíti a kötelet?
72. $750 \frac{kg}{m^3}$ sűrűségű, $5 dm^2$ felületű, és $5 cm$ magas, vízben úszó fahasábra alulról $15 g$ tömegű vasgolyót lógatunk úgy, hogy alja nem ér az edény aljához. Mennyi látszik ki a fahasábból? Mekkora erő feszíti a rögzítő kötelet?
73. Vízre $2 cm$ vastagon $800 \frac{kg}{m^3}$ sűrűségű olajat rétegezzük, és egy $5 dm^3$ térfogatú, $900 \frac{kg}{m^3}$ sűrűségű jégkockát helyezünk bele. Mekkora rész látszik ki a jégből?
74. Hányszorosára növekszik annak a testnek a mozgási energiája, amelynek a sebességét kétszeresére növeltük?
75. $100 N$ erővel 1 órán keresztül $4 \frac{km}{h}$ sebességgel toljuk a fűnyírót. Mekkora munkát végeztünk?
76. Mekkora munkát kell végezni egy $1200 kg$ tömegű autó sebességének álló helyzetből $100 \frac{km}{h}$ -ra való növelésekor?

77. Mekkora munkát kell végezni egy $10\ t$ tömegű kamion $90\ \frac{km}{h}$ -ról $100\ \frac{km}{h}$ sebességre való gyorsításakor?
78. Mekkora sebességgel ér földet a $10\ m$ magasból szabadon ejtett test?
79. Mennyi munkát végez egy mozdony, mialatt a $350\ t$ össztömegű szerelvényt $2\ km$ -es úton $54\ \frac{km}{h}$ -ról $72\ \frac{km}{h}$ -ra növeli, ha a súrlódási tényező $0,008$?
80. $20\ \frac{m}{s}$ kezdősebességgel függőlegesen felfelé hajítunk egy testet. Mekkora a sebessége, amikor $10\ m$ magasan van?
81. $10\ m$ mély gödör szélén $15\ \frac{m}{s}$ kezdősebességgel függőlegesen felfelé hajítunk egy testet. Mekkora lesz a sebessége, amikor $5\ m$ -rel a gödör alja felett van?
82. $1\ m$ sugarú, félkör alakú pálya felső pontján egy test indul zérus kezdősebességgel. Hány fokos szögelfordulással rendelkezik, amikor a sebessége $0,5\ \frac{m}{s}$? Mekkora a sebessége a félkör alján?
83. Lankás tejtőn lecsúszó szánkó $15\ m$ magasról indul $2\ \frac{m}{s}$ kezdősebességgel. Milyen magasan van, amikor a sebessége $4\ \frac{m}{s}$?
84. Vízszintes asztallapon $10\ \frac{N}{m}$ rugóállandójú rugóra $10\ g$ tömegű testet rögzítünk, $3\ cm$ -re megnyújtjuk, majd szabadon engedjük. Mekkora a test kitérése, amikor sebessége $0,5\ \frac{m}{s}$?
85. Az előző feladatban a testet $1\ \frac{m}{s}$ nagyságú, a megnyúlással azonos irányú sebességgel engedjük el. Hány cm -t tett meg, amikor a sebessége a harmadára csökkent?
86. Vízszintes asztallapon $20\ \frac{N}{m}$ rugóállandójú rugóra rögzített $5\ g$ tömegű test $0,1$ nagyságú súrlódási tényezővel mozoghat. Mekkora lesz a sebessége, ha a rugót $10\ cm$ -rel megnyújtjuk, majd elengedjük?
87. Egy $3\ kg$ tömegű testet egyenletes mozgással $2\ m$ magasra emelünk $4\ s$ alatt. Mekkora az emelőerő teljesítménye?
88. Mennyi idő alatt emel fel egy $30\ kW$ teljesítményű gép $16\ m$ mélyről $6\ t$ terhet?
89. Egy szivattyú mennyi vizet tud óránként felszivattyúzni egy $400\ m$ mélyen fekvő bányából, ha a hasznos teljesítménye $40\ kW$?
90. Mekkora átlagteljesítménnyel lehet egy $1000\ kg$ tömegű személyautót $10\ s$ alatt álló helyzetből $100\ \frac{km}{h}$ sebességre gyorsítani?
91. Egy szánkót vízszintesen $50\ W$ teljesítménnyel húzva $14,4\ \frac{km}{h}$ sebességgel halad. Mekkora a húzóerő és a súrlódási együttható? A szánkó tömege $25\ kg$.
92. Egy mozdony állandó $0,45\ MW$ teljesítménnyel egy $450\ t$ tömegű szerelvényt egyenletes mozgással vontat. Mennyi idő alatt tesz meg nyílt pályán $20\ km$ -es utat, ha a súrlódási tényező a sín és a kerekek között $0,009$?

2. Hőtan

Az előző részben a Klasszikus mechanika néhány fejezetét vázlatosan tekintettük át. Ez a tudományterület olyan sikereket ért el a XVII. századtól, hogy más fizikai jelenségeket, folyamatokat – így a hőtaniakat is – igyekeztek a mechanikai jelenségekre visszavezetni, azokkal leírni. A nehézség az, hogy a hőjelenségekben igen nagyszámú *részecske* (atom, molekula, ion) vesz részt, azokra egyedileg mozgásegyenletet felírni lehetetlen. Például a szobában jelen lévő levegőt alkotó gázok részecskéire a kezdeti feltéteket meghatározni (megmérni), a mozgásegyenleteket felírni és megoldani „véges idő” alatt nem lehet, ez csak elvileg lehetséges.

A *Hőtan* a fizika egyik tudományterülete, amelynek kialakult a saját vizsgálati módszere és matematikai nyelve. A vizsgálati módszer szerint fel lehet osztani termodinamikára és molekuláris fizikára.

A *Termodinamika* tapasztalatokra alapoz, tényekre és mérhető fizikai mennyiségekre támaszkodik, azokból igyekszik általános érvényű törvényeket megfogalmazni és matematikai nyelvezettel leírni.

A *Molekuláris fizika* anyagszerkezeti ismeretek alapján értelmezi a hőjelenségeket.

A *Kinetikus gázelmélet* a molekulák mechanikai mozgására vonatkozó modellszerű feltevések alapján értelmezi a hőtani fogalmakat és a termikus folyamatokat. Az elmélet figyelembe veszi, hogy nagyszámú részecske hatásáról lévén szó, az értelmezés csak statisztikai jellegű lehet. Ennek kidolgozói a XIX. sz. második felében és a XX. sz. elején főként James Clerk MAXWELL, Ludwig Eduard BOLTZMANN és Josiah Willard GIBBS voltak. Max PLANCK nevéhez fűződik továbbá az elmélet pontosítása a Kvantummechanika irányába. A Rudolf CLAUSIUS által bevezetett entrópia pedig alkalmazást nyert az Információelméletben és a Kozmológia területén is.

2.1. A hőmérséklet és a hőtágulás

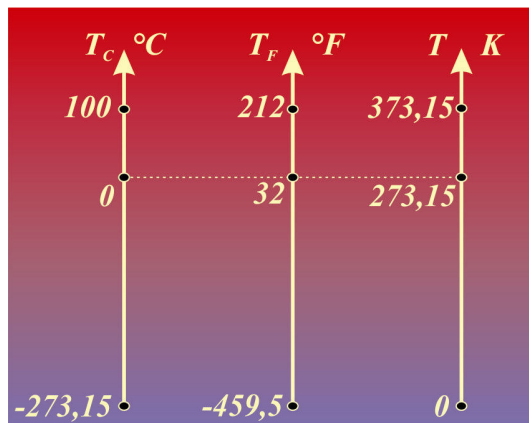
2.1.1. A hőmérséklet

A *hőmérséklet* fogalma a meleg, hideg, langyos szavak szubjektív érzékeléséből alakult ki, és a testek hőállapotát kifejező fizikai mennyiség. Ez a fizikai mennyiség az előző részben használt három alaplammennyiségből (hosszúság, tömeg, idő) nem vezethető le, tehát nem származtatott mennyiség.

Három – az érzékszerveinktől független – tapasztalat lehetőséget ad a hőmérséklet értelmezésére és mérésére:

1. Ha két különböző hőállapotú anyag egymással közvetlenül érintkezik, akkor a melegebb lehűl, a hidegebb felmelegszik, míg be nem áll a termikus egyensúly, a közös hőmérséklet. Ezt szokás **a termodinamika nulladik főtételének** is nevezni.
2. Hőmérsékletváltozaskor megváltozik az anyagok fizikai tulajdonságait jellemző legtöbb mennyiség (pl.: térfogat, nyomás, elektromos ellenállás stb.)
3. Előállíthatók jól reprodukálható (újra előállítható) hőállapotok, hőmérsékletek, például adott nyomáson a jég olvadáspontja, vagy a forrásban lévő víz gőzének hőmérséklete.

Ezek alapján készíthetők hőmérsékletmérő eszközök és empirikus hőmérsékleti skálák. Ezzel szemben az anyag minőségétől független az ún. termodinamikai hőmérsékleti skála (régábbi neve: abszolút hőmérsékleti skála), amelynek alappontja az a hőmérséklet, ahol a molekulák hőmozgása elvileg megszűnik. A gyakorlatban három hőmérsékleti skálát szoktuk használni (2.1. ábra): a *Celsius*-, a *Fahrenheit*- és a *Kelvin*-féle hőmérsékleti skálát.



2.1. ábra: Hőmérsékleti skálák

A köztük fennálló összefüggések:

$$T_F = \left(\frac{9}{5} T_C + 32 \right) ^\circ F, \quad T_C = \frac{5}{9} (T_F - 32) ^\circ C, \quad T = (T_C + 273,15) K.$$

2.1.2. Homogén és izotróp szilárd testek hőtágulása

*Izotróp*nak nevezzük azokat a szilárd testeket, amelyeknek fizikai jellemzői bármely irányban azonosak. Megkülönböztetünk vonalas (lineáris), felületi és térfogati (köbös) hőtágulást.

*Vonalas*nak (lineárisnak) nevezzük a hőtágulást, ha a test keresztmetszete elhanyagolható a hosszához képest. A tapasztalat szerint a test Δl hosszváltozása arányos az eredeti hosszal és a hőmérséklet-változással:

$$\Delta l \sim l_0 \Delta t.$$

Az ezt kifejező vonalas hőtágulási törvény:

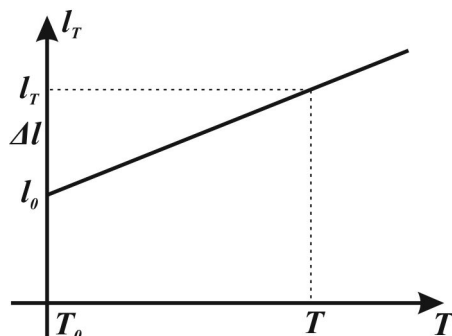
$$\Delta l = \alpha l_0 \Delta t,$$

ahol l_0 a kezdeti T_0 hőmérsékletre tartozó hossz, α pedig a test anyagi minőségét jellemző vonalas (lineáris) hőtágulási együttható, melynek SI-beli mértékegysége: $\frac{1}{K}$. Mivel a hőmérséklet megváltozása a Celsius-féle és a Kelvin-féle hőmérsékleti skálán egyenlő, ezért használható még az $\frac{1}{^\circ C}$ mértékegység is. Nagysága fémek esetén általában igen kicsi (10^{-4} , 10^{-5} nagyságrendű) érték.

A vonalas hőtágulási törvény $\Delta l = l - l_0$ figyelembe vételével:

$$l_T = l_0 (1 + \alpha \Delta T) = l_0 \left[1 + \alpha (T - T_0) \right]$$

alakban is felírható, amely matematikailag az $l - T$ diagramon egy egyenes egyenlete (2.2. ábra):



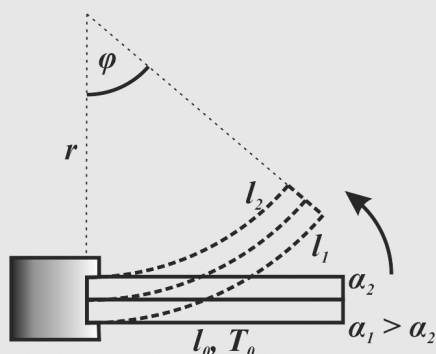
2.2. ábra: Lineáris hőtágulás függvénye

Megjegyzés:

Az α általában csak hőmérsékleti intervallumonként tekinthető állandónak.

2.1. Példa: Bimetall görbülése

A különböző anyagok (elsősorban fémek) eltérő hőtágulását használják ki az ún. bimetal eszközökben (pl. kapcsolókban, hőmérőkben stb.). Számítsuk ki az α_1 és α_2 lineáris hőtágulási együtthatóval rendelkező fémhuzalokból készített bimetal φ középponti szögét, és r közepes sugarát kis ΔT hőmérséklet-változás hatására!



2.3. ábra: Bimetall görbülése

Megoldás:

A 2.3. ábra szerinti elrendezésben a φ középponti szög, r pedig a közepes sugár. A vonalas hőtágulási törvény alapján:

$$l_1 = l_0(1 + \alpha_1 \Delta T), \text{ és } l_2 = l_0(1 + \alpha_2 \Delta T),$$

az ábra alapján pedig geometriailag:

$$l_1 = r\varphi \text{ és } l_2 = (r - 2d)\varphi.$$

Ezekből:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{1 + \alpha_1 \Delta T}{1 + \alpha_2 \Delta T} = \frac{r \varphi}{(r - 2d) \varphi} = \frac{r}{r - 2d},$$

ahonnan a görbületi sugár:

$$r = \frac{2d(1 + \alpha_1 \Delta T)}{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T}.$$

Mivel α_1 és ΔT is kicsi, ezért $\alpha_1 \Delta T \ll 1$, azaz:

$$r \approx \frac{2d}{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T}, \text{ és } \varphi = \frac{l_1}{r} \approx \frac{l_0}{r}. \clubsuit$$

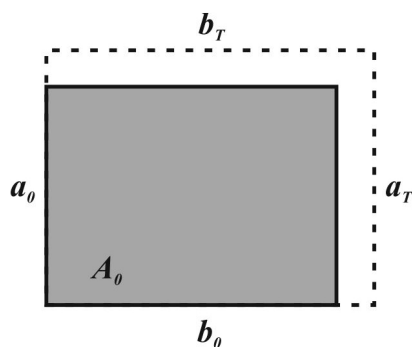
2.1.3. Szilárd testek felületi hőtágulása

Ha T_0 kezdeti hőmérsékletű, a_0 és b_0 kezdeti oldalhosszúságú téglalap területe $A_0 = a_0 b_0$, T hőmérsékleten pedig $A_T = a_T b_T$ (ábra), akkor a – hőtágulási törvény felhasználásával – a *felületi hőtágulási törvény*:

$$A_T = a_T b_T = a_0 (1 + \alpha \Delta T) b_0 (1 + \alpha \Delta T) = a_0 b_0 (1 + \alpha \Delta T)^2 = a_0 b_0 (1 + 2\alpha \Delta T + \alpha^2 \Delta T^2).$$

Mivel α nagyon kicsi, ezért az α^2 -et tartalmazó tag csak elhanyagolhatóan kis mértékben járul hozzá az eredményhez. Ennek a tagnak az elhagyásával a felületi hőtágulási törvény:

$$A_T = A_0 (1 + 2\alpha \Delta T).$$



2.4. ábra: Felületi hőtágulás

2.1.4. Szilárd testek és folyadékok térfogati (köbös) hőtágulása

Fentiek mintájára pl. téglatest esetén $V_0 = a_0 b_0 c_0$ és ezért:

$$V_T = a_T b_T c_T = a_0 b_0 c_0 (1 + \alpha \Delta T)^3 \approx V_0 (1 + 3\alpha \Delta T),$$

ahol $3\alpha = \alpha_V$ (régábban β), a térfogati (köbös) hőtágulási együttható ([3. Video: Szilárd testek hőtágulása](#)).

Folyadékok hőtágulása a térfogatra vonatkozóan megegyező alakú a szilárd testek *térfogati hőtágulására* levezetett összefüggéssel:

$$V_T = V_0 (1 + \alpha_V \Delta T),$$

ahol α_V a folyadék térfogati hőtágulási együtthatója.

Gyakori eset, hogy a kiterjedt szilárd test, de még inkább a folyadék sűrűségére vagyunk kíváncsiak a hőmérséklet-változás hatására. A táguló anyag tömegét (ami nem változik) osztva a $V_T = V_0 (1 + \alpha_V \Delta T)$ összefüggéssel:

$$\frac{m}{V_T} = \frac{m}{V_0 (1 + \alpha_V \Delta T)},$$

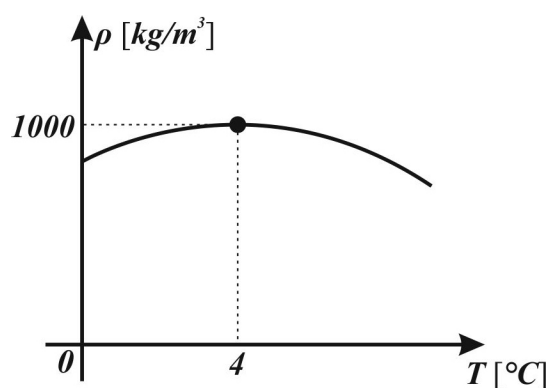
amiből a sűrűség t hőmérsékleten:

$$\rho_T = \frac{\rho_0}{1 + \alpha_V \Delta T}.$$

Ha $\alpha_V \Delta T \ll 1$, akkor az $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$ matematikai közelítés felhasználásával a T hőmérsékleten mérhető sűrűségre:

$$\rho_T \approx \rho_0 (1 - \alpha_V \Delta T)$$

adódik. A víz sajátosságosan viselkedik, ugyanis 0°C és 4°C között melegítés hatására összehúzódik, 4°C felett kitágul. Ezért a víz sűrűségének 4°C -nál maximuma van (2.5. ábra).



2.5. ábra: A víz sűrűségének változása a hőmérséklet függvényében

2.2. Az ideális gázok termikus állapotegyenlete

Ideálisnak (tökéletesnek) mondjuk a gázt akkor, ha a részecskéi, egymással és az edény falával mozgásuk során rugalmasan ütköznek, de ezen kívül egymásra vonzó vagy taszítóerőt nem fejtenek ki, két ütközés között egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek, térfogatuk pedig elhanyagolhatóan kicsi a rendelkezésükre álló edény térfogatához képest.

Az adott mennyiségű és minőségű *ideális gáz* állapotát hőtani szempontból jellemző mennyiségek az *állapotjelzők*. Az állapotjelzők a p nyomás, a V térfogat, a T hőmérséklet és az n anyagmennyiség. Ez utóbbi a gáz m tömegének és M moláris tömegének (SI-beli mértékegysége: $\frac{\text{kg}}{\text{mol}}$) hányadosa, vagyis $n = \frac{m}{M}$. Az ezek közötti függvénykapcsolat az állapotfüggvény, amelyet az ideális gázok tapasztalat szerinti termikus állapotegyenlete ír le:

$$pV = nRT,$$

ahol T a kelvin egységben megadott termodinamikai hőmérséklet, R pedig a moláris gázállandó (régábbi neve: egyetemes gázállandó).

Az **Avogadro-törvény** szerint:

„A különböző gázok megegyező térfogata azonos nyomás és hőmérséklet mellett azonos számú részecskét tartalmaz.”

Az R moláris gázállandó kiszámítható azon tapasztalat alapján, hogy az $n=1$ mol anyagmennyiségű, $p=p_0=101325$ Pa nyomású és $T=T_0=273,15$ K hőmérsékletű, vagyis *normál állapotú* ideális gáz térfogata $V=V_0=22,41 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ (normál móltérfogat). Ekkor a termikus állapotegyenlet alapján:

$$R = \frac{p_0 V_0}{n T_0} = \frac{101325 \text{ Pa} \cdot 22,41 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{1 \text{ mol} \cdot 273,15 \text{ K}} = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}.$$

Gyakran használjuk még az R moláris gázállandó és az N_A Avogadro-állandó

$\left(= 6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}\right)$ hányadosát, a

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}}{6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Boltzmann-állandót is: Ennek bevezetésével az ideális gázok termikus állapotegyenlete

$$pV = nRT = nkN_A T = NkT,$$

alakban is felírható, ahol $N = nN_A$, a gáz részecskéinek száma.

2.3. Az ideális gázok állapotváltozásai

Ha egy adott n anyagmennyiségű ideális gáz két különböző termikus egyensúlyban lévő állapotának (p_1, V_1, T_1, n és p_2, V_2, T_2, n) viszonyát hasonlítjuk össze, akkor mindkét állapotra alkalmazva a termikus állapotegyenletet:

$$p_1 V_1 = nRT_1,$$

illetve

$$p_2 V_2 = nRT_2.$$

Ezek hányadosa:

$$\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{T_1}{T_2},$$

ahonnan:

$$\boxed{\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}}$$

az ún. *egyesített gáztörvény*, amely kifejezi az ugyanazon ideális gáz két termikus egyensúlyi állapota közötti kapcsolatot, előnye, hogy nem kell számolni benne az R moláris gázállandóval, sem a k Boltzmann-állandóval.

Attól függően, hogy $n = \text{állandó}$ mellett melyik állapothatározó nem változik, háromféle speciális, tapasztalati is igazolható állapotváltozást különböztetünk meg: az *izobár*, *izochor* és *izotermikus* állapotváltozást.

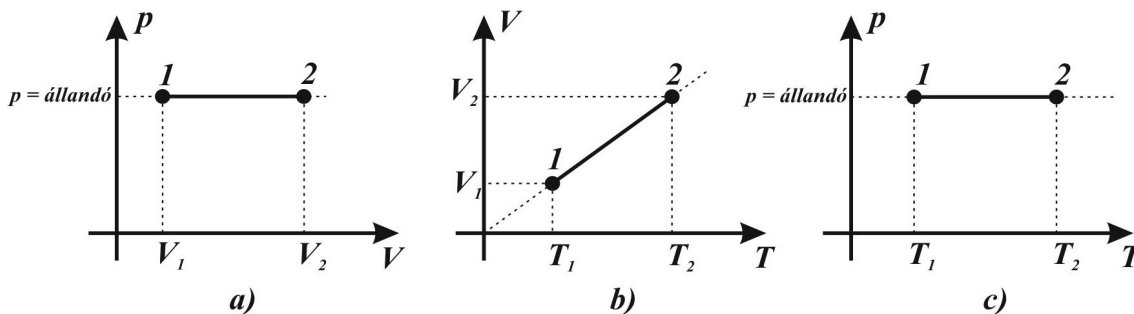
2.3.1. Izobár állapotváltozás

Izobárnak nevezzük az ideális gáz állapotváltozását, ha nyomása a folyamat során nem változik ($p_1 = p_2$). Ha az ideális gáz p nyomása és n anyagmennyisége állandó, akkor termikus egyensúlyban az egyesített gáztörvényből:

$$\boxed{\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}}.$$

Ezt a törvényt **Gay-Lussac I. törvényének** nevezzük.

Az izobár állapotváltozást $p - V$ diagramon, $V - T$ diagramon és $p - T$ diagramon a 2.6. ábra (a-c) szemlélteti.



2.6. ábra: Izobár állapotváltozás a) $p - V$ diagram b) $V - T$ diagram c) $p - T$ diagram

2.2. Példa: Állandó nyomáson táguló gáz munkája

Számítsuk ki az izobár állapotváltozást ($p = \text{állandó}$) szenvedő, A felületű dugattyúval elzárt hengerben lévő, kezdetben h hosszúságú gázoszlop által, annak T_1 -ről T_2 hőmérsékletűre történő emelésekor végzett munkát!

Megoldás:

Gay-Lussac I. törvénye szerint az ideális gáz térfogatváltozása:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

ahonnan:

$$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1}$$

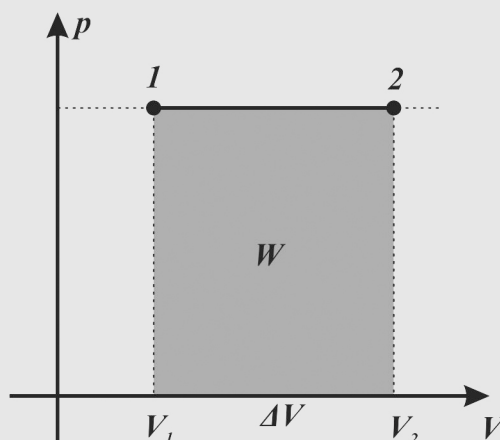
és

$$\Delta V = V_2 - V_1 = V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right).$$

Az ideális gáz $F = pA = \text{állandó}$ nagyságú esővel s úton tolja a dugattyút kifelé, miközben térfogata V_1 -ről V_2 -re nő, térfogati munkája:

$$W = -Fs = -pAs = -p\Delta V = -pV_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right),$$

amely megállapodás szerint negatív érték, ha a gáz végez munkát a dugattyún (tágul), illetve pozitív, ha valamely külső erő végez munkát a dugattyúval elzárt gázon (összenyomódik), és szemléletesen a $p - V$ diagramon ábrázolt állapotváltozás 1-es kezdeti és 2-es végállapothoz tartozó egyenes (izobára) alatti területtel egyenlő (2.7. ábra).♣



2.7. ábra: Izobár állapotváltozáskor végzett munka

Általánosan is igaz, hogy az ideális gáz által állapotváltozásakor végzett W munka számértéke a $p - V$ diagramon ábrázolt változás 1-es kezdeti és 2-es végpontja által határolt ív alatti területtel egyenlő.

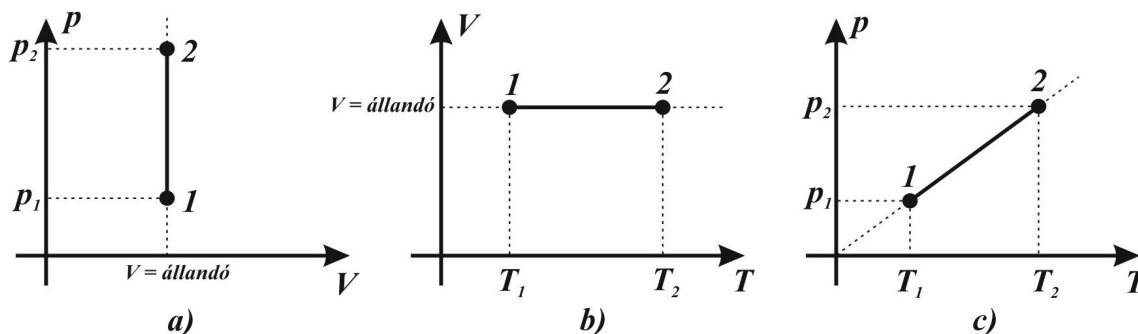
2.3.2. Izochor állapotváltozás

Az ideális gázok állandó térfogaton ($V_1 = V_2$) végbemenő, ún. *izochor* állapotváltozásának termikus egyensúlyban érvényes törvénye szintén következik az egyesített gáztörvényből és **Gay-Lussac II. törvényének** nevezzük:

$$\boxed{\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}},$$

ha V és n állandó.

Az izochor állapotváltozást a $p - V$ diagramon, $V - T$ diagramon és $p - T$ diagramon a 2.8. ábra (a-c) szemlélteti:



2.8. ábra: Izochor állapotváltozás a) $p - V$ diagram b) $V - T$ diagram c) $p - T$ diagram

Izochor állapotváltozásakor $V = \text{állandó}$, $\Delta V = 0$, és ebből kifolyólag a W térfogati munka is zérus:

$$W = 0.$$

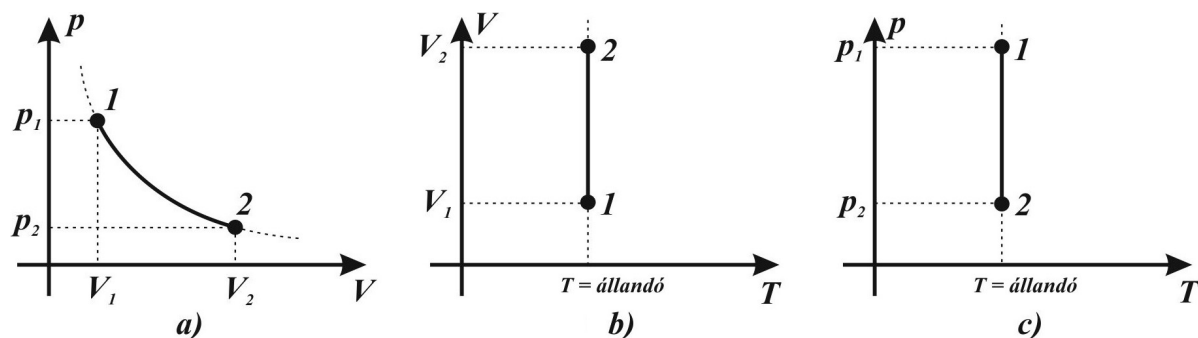
2.3.3. Izotermikus állapotváltozás

Az ideális gázok állandó hőmérsékleten ($T_1 = T_2$) végbemenő állapotváltozása az *izotermikus* állapotváltozás. Ha a T hőmérséklet és az n anyagmennyiség állandó, akkor két különböző termikus egyensúlyi állapotban az egyesített gáztörvényből:

$$\boxed{p_1 V_1 = p_2 V_2}.$$

Ezt a törvényt **Boyle–Mariotte-törvénynek** nevezzük.

Az izotermikus állapotváltozást $p - V$ diagramon, $V - T$ diagramon és $p - T$ diagramon az 2.9. ábra (a-c) szemlélteti.



2.9. ábra: Izotermikus állapotváltozás a) $p - V$ diagram b) $V - T$ diagram c) $p - T$ diagram

2.3. Példa: Állandó hőmérsékleten táguló gáz munkája

Számítsuk ki az állandó T hőmérsékleten V_1 térfogatról V_2 térfogatra táguló gáz által végzett munkát!

Megoldás:

Láttuk, hogy a táguló gáz W munkáját a $p - V$ diagramon ábrázolt állapotváltozást reprezentáló görbe 1-es kezdeti és 2-es végpontjához tartozó ív alatti terület adja meg (2.9. ábra), értéke a gáz tágulásakor negatív, ezért:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV .$$

A $pV = nRT$ állapotegyenlet felhasználásával a térfogati munka:

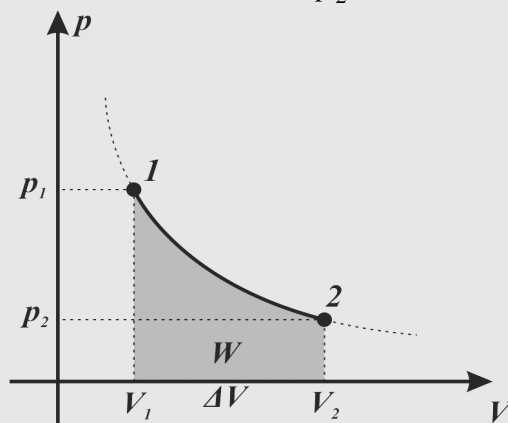
$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV .$$

Állandó T hőmérsékleten az integrálás elvégzése után:

$$W = -nRT \left[\ln V \right]_{V_1}^{V_2} = -nRT \ln \frac{V_2}{V_1} ,$$

illetve a $p_1 V_1 = p_2 V_2$ Boyle–Mariotte-törvény felhasználásával

$$W = -nRT \ln \frac{p_1}{p_2} . \clubsuit$$



2.10. ábra: Izotermikusan táguló gáz által végzett munka

2.4. Az ideális gázok energetikai jellemzői

2.4.1. Belső energia

Tapasztalat szerint a dugattyúval ellátott hengerben lévő ideális gáz melegítés hatására tágul, maga előtt tolja a súrlódásmentesen mozgó dugattyút és a külső környezet ellenében munkát végez. A táguló gáz azonban munkát csak akkor végezhet, ha változtatóképessége (munkavégző képessége), vagyis energiája van.

Bármely m tömegű makroszkopikus (szabad szemmel vagy más érzékszervünkkel közvetlenül észlelhető, ill. érzékelhető) anyag E energiája két részből tevődik össze: csak haladó mozgás esetén az $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ kinetikus energia és az $E_p = mgh$ potenciális energia összegeként felírható $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$ makroszkopikus energiából és az U belső energiából, azaz

$$E = E_m + U.$$

A hőtanban belső energián a rendszer részecskéinek a T termodinamikai hőmérséklettel arányos haladási, forgási és rezgési energiájának összegét értjük.

A részecskék egymástól független mozgásainak száma az ún. *szabadsági fok* (lásd később). Az n anyagmennyiségű, f szabadsági fokú és T termodinamikai hőmérsékletű ideális gáz belső energiája:

$$U = \frac{f}{2}nRT,$$

vagy a termikus állapotegyenlet felhasználásával

$$U = \frac{f}{2}NkT = \frac{f}{2}pV.$$

A belső energia fontos tulajdonsága, hogy változását az ideális gáz kezdő és végállapota (p , V , T és n) egyértelműen meghatározza. Ezt úgy mondjuk, hogy a belső energia *állapotfüggvény*.

Megjegyzés:

A belső energia kiszámítását leíró összefüggést a Molekuláris fizika elemei c. fejezetben vezetjük le.

2.4.2. Hőmennyiség

A rendezetlen hőmozgást végző gázcseppből álló makroszkopikus ideális gáz U belső energiájának ΔU változása egyenesen arányos a ΔT termodinamikai hőmérséklet-változással. Ezt a munkavégzés (és impulzus-átadás és -átvétel) nélküli, rendezetlen hőmozgással kapcsolatos energiaátadást (-átvételt) *hőközlésnek*, a hőközlés során átadott (átvett) belső energiát *hőmennyiségnek* (röviden: *hőnek*) nevezzük, jele: Q , SI-beli mértékegysége a joule (J), tehát:

$$\Delta U = Q.$$

A hőmennyiség a termikus módon történő energiacsere mértéke, és csak a termikus kölcsönhatás ideje alatt beszélhetünk róla. A termikus kölcsönhatás lezajlása után csak belső energiáról beszélhetünk, a belső energia termikus kölcsönhatás következtében történő megváltozása a hőmennyiség.

2.4.3. Fajhő és hőkapacitás

A tapasztalat szerint a termikus energiacsere során leadott vagy felvett Q hőmennyiség egyenesen arányos test ΔT hőmérséklet-változásával:

$$Q = C \Delta T,$$

ahol a C arányossági együttható az anyagra jellemző mennyiség, a *hőkapacitás*, SI-beli egysége a $\frac{J}{K}$ vagy $\frac{J}{^\circ C}$.

Az egységnyi tömegű anyag hőkapacitását *fajhőnek* vagy *fajlagos hőkapacitásnak* nevezzük, jele: c , azaz:

$$c = \frac{C}{m},$$

SI-beli mértékegysége: $\frac{J}{kg \cdot K}$ vagy $\frac{J}{kg \cdot ^\circ C}$. Meghatározása: $1 \frac{J}{kg \cdot K} = 1 \frac{J}{kg \cdot ^\circ C}$ a fajhője az 1kg tömegű anyagnak, ha $\Delta T = 1 K = 1^\circ C$ hőmérséklet-változásához $Q = 1 J$ hő szükséges.

A víz fajhője pl.: $c_{v\acute{z}} \approx 4200 \frac{J}{kg \cdot K}$.

Gázok esetében kétféle fajhőről beszélünk attól függően, hogy az adott gázt állandó térfogaton (c_V), vagy állandó nyomáson (c_p) tesszük ki hőcserének. Fennáll a $c_p > c_V$ reláció és a kettő aránya:

$$\frac{c_p}{c_V} = \kappa,$$

ahol κ az ún. *adiabatikus állandó*, értéke egyatomos gázokra (mint a hélium és argon) 1,66 körüli, kétatomos molekulájukéra (mint a nitrogén, oxigén és hidrogén) 1,4 körüli, három vagy többatomos gázokra (mint a szén-dioxid és acetilén) 1,3 körül van.

A **Robert Mayer-egyenlet** szintén az ideális gázok c_p állandó nyomáson és c_V állandó térfogaton mért fajhője között teremt kapcsolatot:

$$c_p - c_V = \frac{R}{M},$$

ahol M a gáz moláris tömege.

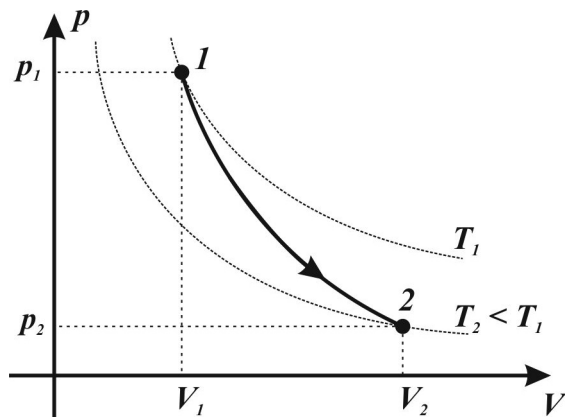
A már ismert állapotváltozások mellett megemlítjük az *adiabatikus állapotváltozást* is. Adiabaticus állapotváltozásnak nevezzük a gáz állapotváltozását akkor, ha az állapotváltozás során a gáz és a környezete közözt nincs hőcsere, azaz $\Delta Q = 0$ (pl.: a gázt gyorsan nyomjuk össze, hogy ne legyen idő a hőcserére, azaz a hőmérséklet-kiegyenlítésére). Ebben az esetben

$$pV^\kappa = \text{állandó},$$

azaz két egyensúlyi állapotra alkalmazva:

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa .$$

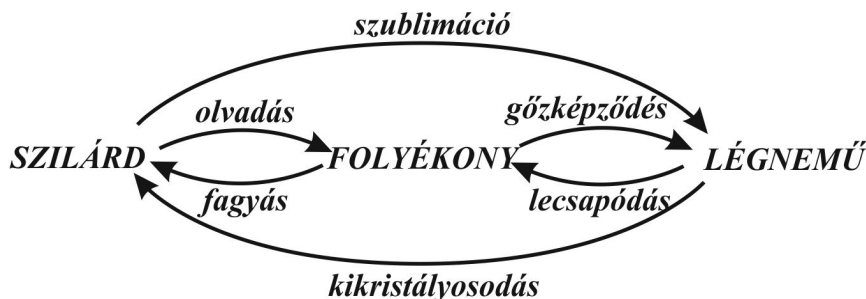
Az adiabatikus állapotváltozás szemléltetése a $p - V$ diagramon adiabata görbével történik. Mivel $\kappa > 1$, ezért az adiabata az izotermánál meredekebben eső görbe (2.11. ábra):



2.11. ábra: Adiabatikus állapotváltozás $p - V$ diagramja

2.5. Halmazállapot-változások és fázisátalakulások

A testek *halmazállapota* hőközlés (hőelvonás) hatására megváltozik. Így beszélhetünk olvadásról (fordítottja a fagyás) és párolgásról (fordítottja a lecsapódás). A szilárd testek párolgását szublimációnak (fordítottja a kikristályosodás) nevezzük.



2.12. ábra: Halmazállapot változások

Ha egy anyag hőmérsékletét folyamatosan változtatva az anyag valamely fizikai jellemzőjében egy jól meghatározott hőmérsékleten, az ún. átalakulási hőmérsékleten ugrásszerű változás (pl. térfogatváltozás) következik be, akkor *fázisátalakulásról* beszélünk. A legegyszerűbb fázisátalakulásra jellemző, hogy az átalakulási hőmérsékleten az anyag V térfogata és U belső energiája *ugrásszerűen változik*, továbbá hőt vesz fel (pl. olvadáskor), vagy hőt ad le (pl. fagyáskor). Az ilyen átalakulást akkor nevezük halmazállapot-változásnak, ha a folyamatban részt vevő anyag egykomponensű, vagyis azonos atomokból (pl. réz, alumínium), vagy azonos molekulákból (pl. víz, szén-dioxid) épül fel. A halmazállapot-változás lehet olvadás, fagyás, gőzképződés (párolgás, forrás), lecsapódás, szublimáció és kikristályosodás (2.12. ábra).

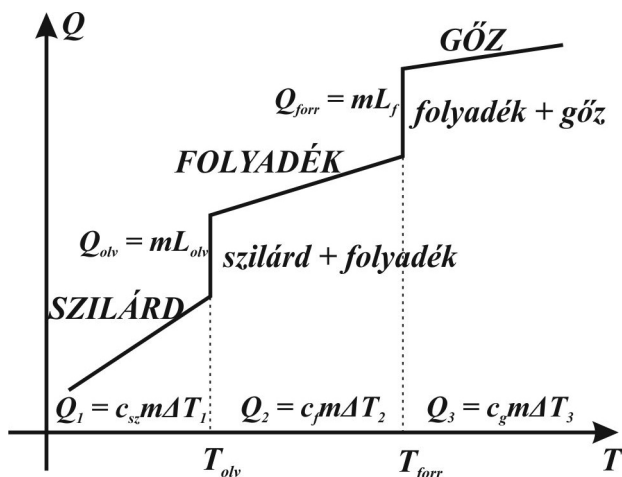
A normál légköri nyomáshoz ($p = 101325 \text{ Pa}$) tartozó normál átalakulási hőmérsékleten (normál olvadásponton, normál fagyásponton, normál forrásponton) felvett vagy leadott, a teljes anyag átalakulásához szükséges Q hőnek és a halmazállapot változásban részt vevő

anyag m tömegének $L = \frac{Q}{m}$ hányadosát *fajlagos átalakulási hőnek* nevezzük. SI-beli mértékegysége: $\frac{\text{J}}{\text{kg}}$. Számértéke megmutatja, hogy mekkora Q hőt kell közölni (endoterm fo-

lyamat), vagy elvonni (exoterm folyamat) az egységnyi tömegű anyag fázisátalakulásához. A különböző halmazállapot-változásokhoz tartozó fajlagos átalakulási hők:

- fajlagos olvadáshő
- fajlagos fagyáshő
- fajlagos párolgáshő
- fajlagos forráshő
- fajlagos lecsapódási hő
- fajlagos szublimációs hő
- fajlagos kikristályosodási hő

Ha bármely adott halmazállapotú anyaggal hőt közlünk, hőmérséklete emelkedik, halmazállapot-változáskor azonban a hőmérséklete nem változik mindaddig, amíg az anyag átalakulása végbe nem ment (2.13. ábra):

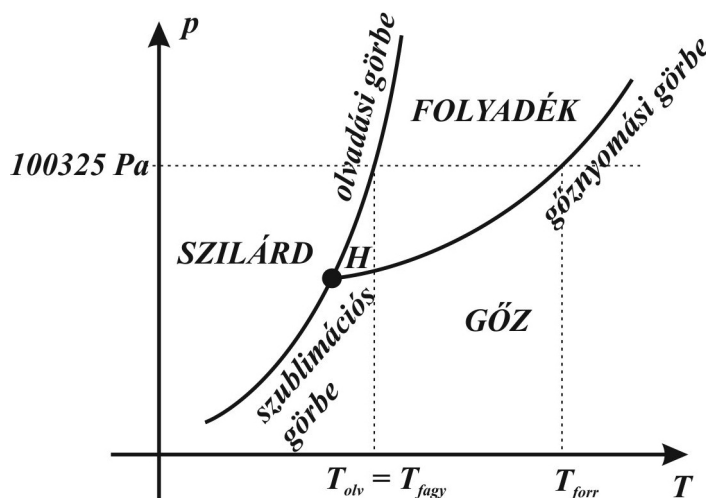


2.13. ábra: Hőfelvétel halmazállapot-változások során

Olvasásnál és fagyásnál a hő úgy változtatja meg a belső energiát, hogy közben a hőmérséklet nem változik, a mechanikai munka pedig elhanyagolható. Párolgásnál és forrásnál viszont a külső légnyomás ellen végzett munka már számottevő (a térfogatváltozás nem elhanyagolható).

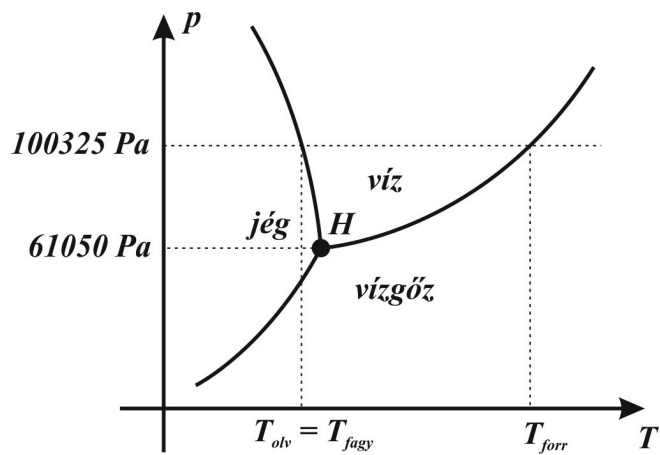
A kémiaiailag homogén („tiszta anyag”), azaz egykomponensű rendszerben egyidejűleg egy vagy több fázis lehetséges. Meghatározott hőmérsékleten és nyomáson két fázis egyensúlyban is lehet. Ez alatt azt is értjük, hogy valamilyen zárt térfogatban a két fázis tömegének aránya időben változatlan, dinamikus egyensúly áll fenn, azaz egységnyi idő alatt ugyanannyi részecske megy át egyik fázisból a másikba, mint fordítva. A kétfázisú állapotok száma háromféle; gőz-folyadék, gőz-szilárd és folyadék-szilárd.

Fázisegyensúlyban az összetartozó nyomás-hőmérséklet pontokat összekötő ún. fázisgörbéket szokás a $p - T$ fázisdiagramon szemléltetni. A különböző $p - T$ fázispárokat összekötő fázisgörbék egy pontban, az ún. H hármaspontban metszik egymást (2.14. ábra):



2.14. ábra: Fázisdiagram

Felhívjuk a figyelmet, hogy a jég-víz-vízgőz rendszer hármasponti hőmérséklete $0,01\text{ }^\circ\text{C} = 273,16\text{ K}$ nem azonos a víz normál $0\text{ }^\circ\text{C} = 273,15\text{ K}$ fagyáspontjával, amelyen a jég és a víz van egymással egyensúlyban normál légköri nyomás mellett (2.15. ábra):



2.15. ábra: A víz fázisdiagramja

2.6. A termodinamika főtételei

2.6.1. A termodinamika I. főtétele

A **termodinamika I. főtétele** az *energiamegmaradás* elvének termodinamikai folyamatokra történő kiterjesztése. Kimondja, hogy:

„A testek belső energiáját termikus úton (hőcserével) és/vagy mechanikai munkavégzéssel változtathatjuk meg.”

Így az energiamegmaradást kifejező egyenlet:

$$\Delta U = Q + W .$$

Megjegyzés:

- Q pozitív, ha a test (rendszer) hőt vesz fel a környezetéből.
- Q negatív, ha a rendszer hőt ad le a környezetének
- W pozitív, ha a környezet végez munkát a rendszerben
- W negatív, ha a rendszer végez munkát a környezet ellenében
- ΔU pozitív, ha a folyamat során a rendszer belső energiája nő
- ΔU negatív ha a folyamat során a rendszer belső energiája csökken

Amennyiben a rendszer csak térfogati munkát végez, akkor a rendszer által végzett térfogati munka:

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV ,$$

így az I. főtétel:

$$\Delta U = Q - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV .$$

Állandó térfogaton $W = 0$, így $\Delta U = Q$, azaz a rendszer belsőenergia-változása egyenlő a leadott vagy felvett hővel.

Az I. főtétel a tapasztalattal egyező és más törvényekből nem vezethető le, ezért természeti alaptörvény. Az I. főtételt szokták úgy is megfogalmazni, hogy:

„Nem létezik olyan periodikusan működő termodinamikai gép ($\Delta U = 0$), az ún. örökmozgó (elsőfajú perpetuum mobile), amely hőfelvétel nélkül képes lenne munkát végezni.”

2.6.2. A termodinamika II. főtétele

Láttuk, hogy a hőfelvétellel vagy hőleadással járó folyamatok az energiamegmaradás törvényének megfelelően zajlanak le. Az I. főtétel azonban nem ad számot a természeti folyamatok

időbeli lefolyásának *irányáról*. Például egy leeső test kinetikus energiája becsapódáskor hővé alakulva melegíti a leeső testet és a környezetét. Ennek ellenkezője azonban nem megy végbe: a test és a talaj belső energiájának rovására a test nem emelkedik fel, bár ezt az I. főtétel megengedné. Ennek megfelelően a **termodinamika II. főtétele** kimondja, hogy:

„A termikus kölcsönhatás során létrejött valóságos folyamatok mindig irreverzibilisek (megfordíthatatlanok).”

A II. főtételnek fizikai tartalom szempontjából több egyenértékű megfogalmazása ismert:

„A hő magától nem kerülhet alacsonyabb hőmérsékletű helyről magasabb hőmérsékletű helyre.”

„Nem lehet olyan periodikusan működő hőerőgépet készíteni, amely egy hőtartályból (pl.: tengervízből, levegőből, talajból) hőt elvonva azt képes lenne teljes egészében mechanikai munkává alakítani.”

„Nem készíthető olyan másodfajú perpetuum mobile, amely a befektetett hőt körfolyamatokkal folyamatosan munkavégzésre tudná fordítani.”

A II. főtétel azt határozza meg, hogy egy folyamat önmagától milyen irányban zajlik le. Nevezetesen: önmaguktól csak olyan irányú folyamatok játszódhatnak le, amelyek a rendszer tömegtől és térfogattól független, ún. *intenzív* állapotjelzőit (p és T) az egyensúlyi állapothoz közelebb viszik, azaz az intenzív állapotjelzőinek kiegyenlítődsét eredményezik.

Egy adott anyagi rendszer (pl. gáz) részecskéinek *rendezetlenségére* (mozgásállapotára, energiaelosztására) jellemző mennyiség a Rudolf Julius Emanuel CLAUSIUS által bevezetett *entrópia*, amely az U belső energiához hasonlóan állapotfüggvény, jele S . Ennek a változása az 1 kezdőállapot és a 2 végállapot között definíció szerint:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Értéke jellemzi a hőfolyamatok lehetséges irányát. Az entrópia SI-beli mértékegysége: $\frac{J}{K}$.

Pozitív entrópiaváltozás a rendszer intenzív állapotjelzőinek kiegyenlítődsé felé tartó folyamatot jelent, ebben az esetben a rendszert alkotó részecskék rendezetlensége nő. A termodinamika II. főtétele ezért így is megfogalmazható:

„Zárt rendszer entrópiája mindig nő, egyensúlyi állapotban maximális értéket vesz fel.”

Azaz matematikailag:

$$\boxed{\Delta S \geq 0}.$$

2.4. Példa: Olvadó jég entrópiaváltozása

Mennyi az entrópiaváltozása 2 kg tömegű 0 °C hőmérsékletű jégnek, míg teljesen megolvad?

Megoldás:

Mivel $T = 273 \text{ K}$ az olvadás során nem változik, és $L_{olv,jég} = 334 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$, ezért:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_1^2 dQ = \frac{Q}{T} = \frac{L_{olv,jég}}{T} = 244 \frac{\text{J}}{\text{K}} \clubsuit$$

A tapasztalat szerint a valóságos folyamatokban bizonyos mennyiségű munka vagy hő mindig kárbavész. Ennek következtében az irreverzibilis körfolyamatok hatásfoka:

$$\eta = \frac{W_h}{W_{\ddot{o}}} = \frac{|W|_h}{Q_{fel}} = \frac{Q_{fel} - |Q|_{le}}{Q_{fel}} < 1$$

A termodinamika II. főtétele alapján működnek a hőerőgépek, a hűtőgépek és a hőszivattyúk.

A hőerőgépek termikus energiát alakítanak át mechanikai energiává, és felépítésük szerint lehetnek gőzgépek (dugattyús gőzgépek, gőzturbinák), vagy gázgépek (gázturbinák, belső égésű motorok: benzin- és dízelmotorok). Működésük során Q_{fel} hőt vesznek fel a hőforrásból és Q_{le} hőt adnak le a környezetüknek, miközben $|W|_h = Q_{fel} - |Q|_{le}$ munkát végeznek.

A hűtőgépek hőt vonnak el a belső terükből, és külső (általában elektromos) munkával hőt juttatnak a magasabb hőmérsékletű környezetbe.

A hőszivattyúk a hűtőgépek működési elvén alapuló fűtőgépek. Télen úgy fűtik az épületet, hogy külső munkával hőt vonnak el a hidegebb hőtartályból (talajból, tavakból, folyókból) és hőt szállítanak a magasabb hőmérsékletű épületbe.

2.6.3. A termodinamika III. főtétele

A termodinamika III. főtétele azt a tapasztalati tényt rögzíti, hogy:

„A $T = 0 \text{ K}$ hőmérsékletet véges számú lépésben egyetlen anyagi rendszer sem érheti el.”

0 K-hez közeledve a kémiaiilag homogén szilárd és cseppfolyós anyagok entrópiája nulla felé tart, azaz:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0.$$

Ugyancsak $T \rightarrow 0 \text{ K}$ esetén a fajhő nulla felé közeledik, és ebből kifolyólag kis hőmennyiség is tetemes hőmérséklet-változást okoz. A Termodinamika III. főtételének más megfogalmazása ezért:

„Nem lehet készíteni olyan periodikusan dolgozó gépet, ún. harmadfajú perpetuum mobilét, amely elő tudna állítani 0 K hőmérsékletet.”

Mivel pedig a testek a környezetüktől tökéletesen nem szigetelhetők el, így azok 0 K-re nem hűthetők, de a 0 K jól megközelíthető. Laboratóriumban mért legalacsonyabb hőmérséklet: $4,5 \cdot 10^{-10} \text{ K}$.

2.7. A molekuláris fizika elemei

Mint már jeleztük, a makroszkopikus anyagokat (testeket) felépítő nagyszámú (10^{24} darab nagyságrendű) részecske mozgásának egyenkénti leírása a klasszikus mechanika eszközeivel gyakorlatilag lehetetlen. Sok részecske együttes hatása határozza meg a *makroszkopikus* jellemzőket, amelyek már megfigyelhetők, mérhetők. Ezért a rendszert az egyes részecskék mozgásának pontos követése helyett a részecskék *átlagos* mozgásával jellemezzük. A megismert fizikai törvények mellett tehát új megközelítésre, a matematikai statisztikára és a valószínűség-számításra is szükség van.

2.7.1. Az ideális gáz nyomása és hőmérséklete

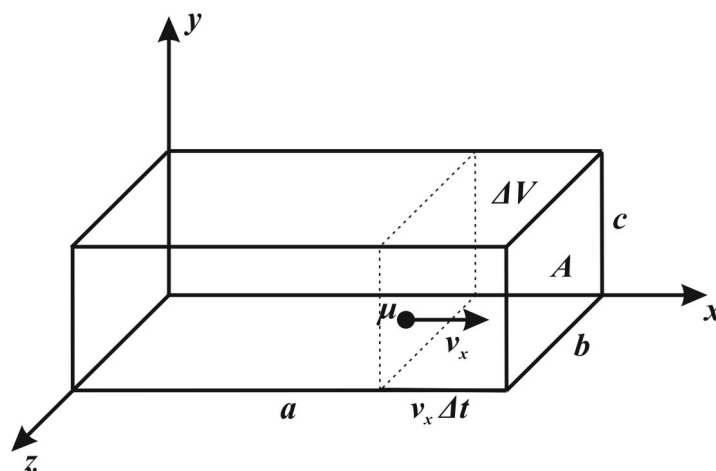
A tapasztalat szerint a különböző gázok fizikai tulajdonságai nagymértékben hasonlóak. Ez teszi lehetővé, hogy a gázok tulajdonságait egyetlen szerkezeti modellel – az *ideális gázmodellel* – egységesen értelmezzük.

A gázelmélet alapvető feltevései a következők:

1. A gárrészecskék (atomok, molekulák) rendszertelen mozgást végző kicsiny gömbök, amelyek egymással és az edény falával *rugalmasan* ütköznek.
2. A rugalmas ütközéskor fellépő kölcsönhatáson kívül *egyéb kölcsönhatás nincs*.
3. A gárrészecskék *össztérfogata* elhanyagolhatóan *kicsi* a gáz által elfoglalt térfogathoz képest.

2.7.2. Az ideális gázok nyomása

Legyen a V térfogatú téglatest alakú edényben m tömegű ideális gáz. Határozzuk meg a gáz által az edény A felületére kifejtett $p = \frac{F}{A}$ nyomást!



2.16. ábra: Az ideális gáz nyomása a részecskék fallal való ütközéséből származik

A $V = abc$ térfogatú edényben legyen N számú és egyenként μ tömegű, haladó mozgást végző részecske. Δt idő alatt azok a részecskék ütköznek az edény A oldallapjába, amelyeknek a faltól való távolsága $v_x \Delta t$ (2.16. ábra) és ebből következően a

$$V = Av_x \Delta t$$

térrészben található. Ha a részecskék koncentrációja $c = \frac{N}{V}$, akkor a ΔV térfogatban

$$\Delta N = c \Delta V$$

darab részecske található. Ezen részecskék fele mozog az x tengely pozitív irányába (a másik fele ellentétes irányba), azaz:

$$\Delta N = \frac{1}{2} c \Delta V = \frac{1}{2} c A v_x \Delta t.$$

Egy μ tömegű v_x sebességű részecske I impulzusának ΔI megváltozása a fallal történt rugalmas ütközés után:

$$\Delta I = \mu v_x - (-\mu v_x) = 2\mu v_x.$$

Az A felületű falnak ütköző összes részecske impulzusának x komponensének a megváltozása ezért:

$$\Delta I_x = \Delta N \Delta I_i = \frac{1}{2} c A v_x \Delta t 2\mu v_x = c \mu A v_x^2 \Delta t.$$

A falnak Δt idő alatt ütköző részecskék által a falra kifejtett F nyomóerő az előbbieket felhasználásával:

$$F = \frac{\Delta I_x}{\Delta t} = c \mu A v_x^2,$$

a falra ható p nyomás pedig

$$p = \frac{F_x}{A} = c \mu v_x^2.$$

Pontos számítás esetén figyelembe kell venni, hogy a gáZRészecskék sebessége különböző (v_x nem állandó), ezért v_x^2 helyett az x irányú sebességek négyzetének $\langle v_x^2 \rangle$ átlagát kell számításba venni, azaz a nyomás:

$$p = c \mu \langle v_x^2 \rangle.$$

A véletlenszerű mozgás következménye, hogy

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3}.$$

Ezt figyelembe véve

$$p = c \mu \frac{\langle v^2 \rangle}{3},$$

ahonnan az ideális gáz nyomása a hányados 2-vel történt bővítése után:

$$p = c\mu \frac{\langle v^2 \rangle}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{V} \left(\frac{1}{2} \mu \langle v^2 \rangle \right),$$

ahol $\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{1}{2} \mu \langle v^2 \rangle$ egyetlen részecske átlagos mozgási energiája.

Ebből V -vel való szorzás után:

$$pV = \frac{2}{3} N \langle \varepsilon_k \rangle$$

adódik, amelyet a következő pontban fel fogunk használni.

2.7.2.1. Az ideális gázok hőmérséklete

Ha az előbbi eredményt összevetjük ideális gázok termikus állapotegyenletének $pV = NkT$ alakjával, akkor

$$NkT = \frac{2}{3} N \langle \varepsilon_k \rangle.$$

Ebből az ideális gáz hőmérséklete:

$$T = \frac{2}{3k} \langle \varepsilon_k \rangle.$$

Egyetlen részecske

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{3}{2} kT$$

átlagos kinetikus energiája pedig kizárólag a hőmérséklet függvénye.

Ha az ideális gáz $N = nN_A$ darab részecskéből áll, akkor az ideális gáz részecskéinek átlagos összes mozgási energiája

$$\langle E_k \rangle = N \langle \varepsilon_k \rangle = N \frac{3}{2} kT = nN_A \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} nRT.$$

2.7.3. Az ekvipartíció-tétel

A $\langle v \rangle$ átlagsebességgel haladó mozgást végző, μ tömegű, pontszerűnek tekinthető egyatomos gáZRészecske (He , Ne , Ar , Kr , Xe , Rn) $\langle \varepsilon_k \rangle$ átlagos kinetikus energiája az előzőek szerint:

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{1}{2} \mu \langle v_x^2 \rangle + \frac{1}{2} \mu \langle v_y^2 \rangle + \frac{1}{2} \mu \langle v_z^2 \rangle = \frac{3}{2} kT = 3 \frac{1}{2} kT,$$

ahol $\langle v_x^2 \rangle$, $\langle v_y^2 \rangle$ és $\langle v_z^2 \rangle$ a sebességkomponens-négyzetek átlaga és számuk a kizárólag haladó mozgást végző egyatomos részecskék esetén: 3. Megállapodás szerint az energia-kifejezésben szereplő, egymástól független négyzetes tagok számát a részecske *szabadsági fokainak* számának nevezzük, jele: f . A csak haladó mozgást végző egyatomos gárrészecskék tehát $f = 3$ szabadsági fokkal rendelkeznek, és így átlagos mozgási energiájuk:

$$\langle E_k \rangle = N \varepsilon_k = N 3 \frac{1}{2} kT .$$

A kétatomos gázmolekulák x , y , és z irányú haladó mozgást, valamint tengelyükre merőleges kétirányú forgómozgást képesek végezni, Ezekből $f = 3 + 2 = 5$ szabadsági fok adódik, átlagos mozgási energiájuk:

$$\langle E_k \rangle = N 5 \frac{1}{2} kT .$$

Végső következtetés:

„Egyetlen részecske 1 szabadsági fokára $\frac{1}{2} kT$, f szabadsági fokára $f \frac{1}{2} kT$ energia jut. Az N részecskéből álló rendszer $\langle E_k \rangle = N f \frac{1}{2} kT$ átlagos energiája pedig egyenletesen oszlik szét az egyes szabadsági fokok között.”

Ezt az energia egyenletes eloszlásának tételét, az ún. **ekvipartíció-tételt** Maxwell és Boltzmann ismerte fel (1860).

Az N részecskéből álló ideális gáz részecskéinek haladó-, forgó- és rezgőmozgásával kapcsolatos T hőmérséklettől függő $\langle E \rangle$ átlagos energiáját az ideális gáz U *belső energiájának* nevezzük:

$$U = N f \frac{1}{2} kT = f \frac{1}{2} nRT .$$

2.7.4. Az entrópia statisztikus értelmezése

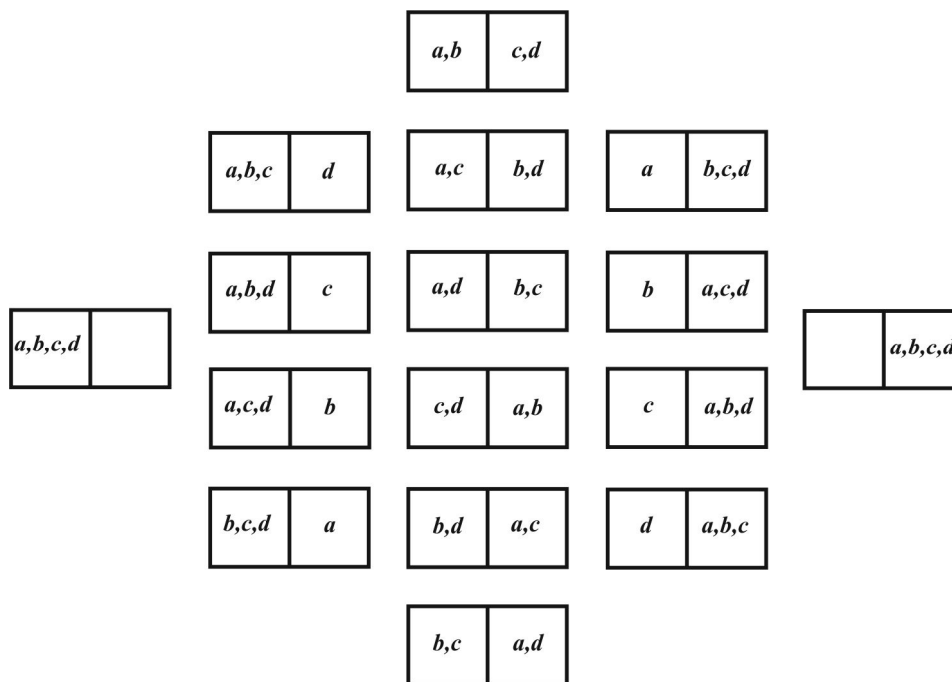
Állapítsuk meg példaként, hogy $N = 4$, egymástól elvileg megkülönböztethető részecske hányféleképpen helyezkedhet el egy edény két ($g = 2$) egyenlő térfogatú térrészben (2.17. ábra).

Az $N = 4$ darab részecske a két térrészben ötféleképpen helyezkedhet el, azt mondjuk, hogy a rendszernek 5 *makroállapota* van (2.1. táblázat). A megkülönböztethetőség érdekében a részecskéket jelöljük a , b , c , d betűvel. Ennek figyelembevételével az ún. Y *mikroállapotok* számáról beszélhetünk, amely megmutatja, hogy egy adott makroállapotot hány mikroállapot valósíthat meg. A mikroállapotoknak azt az Y számát, amely megmutatja, hogy például a jobb oldali térrészben hányféleképpen tartózkodhatnak a gárrészecskék, matematikailag az

n db elem (részecske) k -ad osztályú *kombinációjával* (ennyi részecske lehet a pl. jobb oldalon) lehet kiszámolni:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k},$$

olvasd: n alatt a k .



2.17. ábra: Négy részecske mikroeloszlásai két egyenlő térrészben

Esetünkben $n = N = 4$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ pedig az egyes makroállapotokban a jobb oldalon található részecskék száma, azaz:

$$Y_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!} = \binom{N}{k}.$$

Ha megszámloljuk, hogy egy adott makroállapotot hány Y mikroállapot valósíthat meg, akkor kiszámítható az adott makroállapot megvalósulásának P matematikai valószínűsége: a kedvező esetek Y számának és az $N_{\text{összes}} = g^N$ összes esetek számának hányadosa:

$$P = \frac{N_{\text{kedvező}}}{N_{\text{összes}}} = \frac{Y}{g^N}$$

Ennek megfelelően az $N = 4$ db, egymástól megkülönböztethető (a, b, c és d) részecske két egyenlő térrészben ($g = 2$) való elhelyezkedésének lehetséges makroállapotait (a pl. jobb oldali térrészben található részecskék k számát), az egyes makroállapotokhoz tartozó lehetséges mikroállapotok Y számát, valamint az adott makroállapot megvalósulásának P matematikai valószínűségét az alábbi táblázat mutatja be:

2.1. táblázat: A részecskék eloszlása két térrészben

Makro- állapotok	Részecskék száma a jobb oldali térrészben k	Mikroállapotok száma $Y = \binom{4}{k}$	A mikroállapot megvalósulásának valószínűsége $P = \frac{Y}{g^N} = \frac{Y}{2^4} = \frac{Y}{16}$
1.	4: $abcd$	1	$\frac{1}{16} = 0,0625 \rightarrow 6,25\%$
2.	3: abc, bcd, abd, acd	4	$\frac{4}{16} = 0,25 \rightarrow 25\%$
3.	2: ab, bc, cd, ad, bd, ac	6	$\frac{6}{16} = 0,375 \rightarrow 37,5\%$
4.	1: a, b, c, d	4	$\frac{4}{16} = 0,25 \rightarrow 25\%$
5.	0: –	1	$\frac{1}{16} = 0,0625 \rightarrow 6,25\%$
		Összesen: $16 = g^N = 2^4$	100 %

Az egy makroállapothoz tartozó mikroállapotok számát *termodinamikai valószínűségnek* (statisztikai súlynak) nevezzük. Ha $N = N_1 + N_2 + \dots + N_n$ számú részecske g db cellában úgy helyezkedik el, hogy az i -edik cellában N_i db részecske található, akkor megmutatható, hogy az adott makroállapotot megvalósító mikroállapotok száma:

$$Y = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_n!}$$

N részecskeszám és g cellaszám esetén a rendszer összes mikroállapotainak száma: g^N . Egy adott makroállapothoz tartozó mikroállapotok Y számának és a rendszer összes lehetséges mikroállapotainak g^N számának hányadosa az ún. *megtalálási valószínűség*:

$$P = \frac{Y}{g^N},$$

amely megmutatja annak a matematikai valószínűségét, hogy a rendszer az adott makroállapotban található.

A termodinamikai és a matematikai valószínűség nem azonos egymással, de két makroállapothoz tartozó arányuk megegyezik. Az a makroállapot a legvalószínűbb, amelyet a legtöbb mikroállapot valósíthat meg (példákban a 3.). A gázok azért töltik ki egyenletesen a rendelkezésükre álló teret, mert ehhez tartozik a legtöbb mikroállapot, ennek a bekövetkezése a legvalószínűbb.

2.7.5. A Boltzmann-képlet

Annak a megtalálási valószínűsége, hogy egy részecske a V térfogatú tartály $V_1 < V$ térfogat-résében van:

$$P_1 = \frac{Y_1}{g^N} = \frac{V_1}{V},$$

annak pedig, hogy a $V_2 < V$ térfogatrészben található:

$$P_2 = \frac{Y_2}{g^N} = \frac{V_2}{V}.$$

Ekkor:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{Y_1}{Y_2},$$

valamint az N számú, egymástól függetlenül mozgó részecske megtalálási valószínűsége ugyanezen térrészekben matematikailag az egyes részecskék megtalálási valószínűségeinek szorzata, ezért:

$$\frac{Y_2}{Y_1} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^N,$$

amiből

$$\ln \frac{Y_2}{Y_1} = N \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Ha mindkét oldalt megszorozzuk a k Boltzmann-állandóval, akkor:

$$k \ln \frac{Y_2}{Y_1} = kN \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

A differenciális entrópiaváltozás izotermikus folyamatokban:

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

Alkalmazva a termodinamika I. főtételét izotermikus folyamatra:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{-W}{T} = \frac{pdV}{T},$$

valamint a termikus állapotegyenlet felhasználásával:

$$dS = \frac{pdV}{T} = \frac{NkT}{V} \frac{dV}{T} = \frac{Nk}{V} dV.$$

Véges folyamatban pedig az entrópiaváltozás:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{V_1}^{V_2} \frac{Nk}{V} dV = Nk \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Mivel a két egyenlet jobb oldala megegyezik, ezért izotermikus folyamatban a rendszer entrópiaváltozása:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln \frac{Y_2}{Y_1},$$

vagyis a rendszer ΔS entrópiaváltozása egyenesen arányos az Y_1 és Y_2 termodinamikai valószínűségek hányadosának logaritmusával.

A kapott eredmény általánosítható: a termodinamikai rendszer entrópiája a rendszer termodinamikai valószínűségének természetes logaritmusával arányos:

$$S = k \ln Y,$$

amit **Boltzmann-összefüggésnek** nevezünk.

A fenti következtetések azt is jelentik, hogy a Boltzmann-összefüggés statisztikus jellegű, tehát az irreverzibilis folyamatok megfordítottja nem lehetetlen, hanem nagyon valószínűtlen.

Megjegyzés:

Az entrópiát felfoghatjuk az *információhiány* mértékének is, miszerint a magára hagyott rendszerben nő a részecskék helyére és sebességére vonatkozó információhiány. Ha megtudjuk egy részecskéből álló rendszer egyes elemeinek állapotát leíró mennyiségeket, akkor egy későbbi rátekintés során az új kinyerhető információ mennyisége csökken, vagyis nő a kinyerhető információ hiánya. Az információ mértékegysége a *bit*, amely akkora információt jelent, amely az egyforma valószínűséggel bekövetkező, két állapottal jellemezhető lehetőségeket leíró információt 50%-kal növeli (*igen vagy nem* válasz).

2.7.6. A Boltzmann-eloszlás és a Maxwell-féle sebességeloszlás

1. A Boltzmann-összefüggés alapján meg lehet határozni a termodinamikai rendszer egyensúlyi állapotának feltételét, azaz $S = k \ln Y$ maximumát. Ennek az ún. **Boltzmann-féle részecskeeloszlás** felel meg. Az i -edik cellában található részecskék száma a levezetést mérve:

$$N_i = N_0 e^{-\frac{\varepsilon_p}{kT}},$$

ahol N_0 az $\varepsilon_p = 0$ potenciális energiájú részecskék száma.

Gravitációs mezőben a részecskeszám-sűrűség (= részecskeszám per térfogat) a magasság növekedésével csökken, és csak azok a μ tömegű részecskék érik el a h magasságot, amelyeknek függőleges irányú v sebességükkel kapcsolatos $\frac{1}{2}\mu v^2$ kinetikus energiájuk legalább akkora, mint a h magasságban μgh potenciális energiájuk:

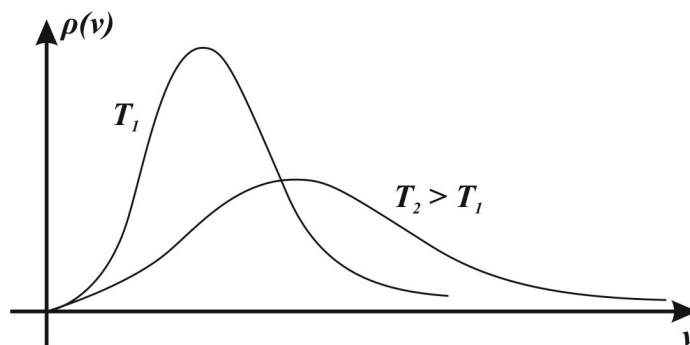
$\frac{1}{2}\mu v^2 = \mu gh$. Ezt figyelembe véve:

$$N_i = N_0 e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}}.$$

2. Ebből levezethető az ideális gázok **Maxwell-féle sebességeloszlási** függvénye:

$$\rho(v) = 4\pi n_0 v^2 \cdot \frac{\mu}{2\pi kT} \cdot e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}},$$

ahol n_0 a $v = 0$ -hoz tartozó részecskeszám sűrűség. A $\rho(v)$ - v sebességeloszlási görbe alakja függ a termodinamikai hőmérséklettől és a gázrészecskék tömegétől (2.18. ábra):



2.18. ábra: Maxwell-féle sebességeloszlás görbéi

Maxwell-féle sebességeloszlás esetén kiszámítható

– a legvalószínűbb sebesség:

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{\mu}},$$

– az átlagsebesség:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}},$$

– a négyzetes középsebesség:

$$\langle v_k \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{\mu}}.$$

A számított sebességek között fennáll a $v_m : \langle v \rangle : \langle v_k \rangle = 1 : 1,128 : 1,225$ arány.

2.8. A hő terjedése

Az eddig tárgyalt fejezetekben alapvető szerepet játszott az a tapasztalat, hogy a különböző hőmérsékletű anyagok között hőmérséklet-kiegyenlítődés jön létre, ha ezek termikus kölcsönhatásba kerülnek egymással. A termodinamika II. főtétele szerint a hőmérséklet-változás iránya olyan, hogy a hő magától mindig a magasabb hőmérsékletű helyről az alacsonyabb hőmérsékletű felé halad.

Ebben a pontban azt vizsgáljuk meg, hogy milyen módon juthat el a hő egyik helyről a másikra. Ennek alapvetően három formája van; a *hővezetés*, a *hőáramlás* és a *hősugárzás*.

2.8.1. A hővezetés

Hővezetés akkor következik be, ha a nagyobb sebességű részecskék a rendezetlen hőmozgásából származó ütközések során adják át mozgási energiájuk egy részét a kisebb sebességű részecskének. Itt tehát részecskeáramlás nincs, a hővezetés szilárd testekre jellemző. Speciálisan fémekben a hővezetés (és az elektromos vezetés is) az ún. szabadelektronok rendezett mozgásával kapcsolatos, és ez az összefüggés nem véletlen.

A gyakorlatban háromféle hővezetést különböztetünk meg: a *belső hővezetést*, a *külső hővezetést* és a *hőátvitelt*.

2.8.1.1. A belső hővezetés

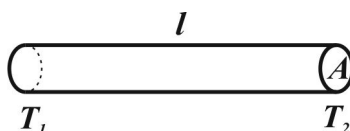
Ha az l hosszúságú, A keresztmetszetű fémrúd végei között $\Delta T = T_1 - T_2$ állandó hőmérsékletkülönbség áll fenn (2.19. ábra), akkor Δt idő alatt a rúd bármely keresztmetszetén áthaladó ΔQ hőmennyiséggel kapcsolatos

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

hőáramerősség arányos a test A keresztmetszetével, a $T_1 - T_2$ hőmérsékletkülönbséggel és a rúd l hosszával:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\lambda A \frac{T_1 - T_2}{l},$$

ahol a negatív előjel arra utal, hogy a hő mindig az alacsonyabb hőmérsékletű hely felé halad, λ pedig a hőt vezető anyag minőségétől függő belső hővezető képesség (belső hővezetési együttható), SI-beli mértékegysége: $\frac{J}{m \cdot s \cdot K} = \frac{W}{m \cdot K}$.



2.19. ábra: Belső hővezetés

A fenti belső hővezetési törvény csak stacionárius (időben állandó) belső hővezetésre érvényes. Általánosabb esetben:

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda A \frac{dT}{dx},$$

amely nem stacionárius esetre is érvényes.

2.8.1.2. A külső hővezetés



2.20. ábra: Külső hővezetés

Ha két anyag (pl. téglá és levegő) A felületen közvetlenül érintkezik egymással (2.20. ábra) és az érintkező felületek T_1 és T_2 hőmérsékletűek, akkor a határfelületen áthaladó hőáram erőssége:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\alpha A (T_1 - T_2),$$

ahol α a két anyagra jellemző kőátadási együttható, SI-beli mértékegysége: $\frac{J}{m^2 \cdot s \cdot K} = \frac{W}{m^2 \cdot K}$.

2.8.1.3. A hőátvitel



2.21. ábra: Hőátvitel

A többretegű közegen (2.21. ábra) át bocsátott, a belső és a külső hővezetéssel kapcsolatos a hőátvitel, melynek hőáramerőssége:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -kA (T_1 - T_2),$$

ahol k a többretegű közeg hőátviteli együtthatója, SI-beli mértékegysége: $\frac{J}{m^2 \cdot s \cdot K} = \frac{W}{m^2 \cdot K}$. Értékét az egyes rétegek vastagsága, belső hővezető képessége és hőátadási együtthatója határozza meg. Például kettős szigetelésű műanyag nyílászárókon $k \approx 1,4 \frac{W}{m^2 \cdot K}$.

2.5. Példa: A testek lehülése

Mindennapi tapasztalat, hogy a melegebb testek a nagy hőkapacitású környezetben (pl.: nagy kiterjedésű, nem zárt térben) lehűlnek a környezet hőmérsékletére. Határozzuk meg egy elvileg végtelennek tekinthető hőkapacitású környezetben lévő T_0 kezdeti hőmérsékletű, α külső hővezetési együtthatójú test hőmérsékletének változását az idő függvényében!

Megoldás:

Egy C_1 hőkapacitású, T_0 kezdeti hőmérsékletű A felületű test a $C_2 \gg C_1$ hőkapacitású, ennél fogva $T_k = \text{állandó}$ hőmérsékletű környezetének dt idő alatt

$$dQ = C_1 dT$$

hőt ad le. A külső hővezetési törvény alkalmazásával:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{C_1 dT}{dt} = -\alpha A (T - T_k).$$

A differenciálegyenletet a változók szerint szétválasztva

$$\frac{dT}{T - T_k} = -\frac{\alpha A}{C_1} dt$$

adódik, majd mindkét oldal integrálása után

$$\ln(T - T_k) = -\frac{\alpha A}{C_1} t + \ln K,$$

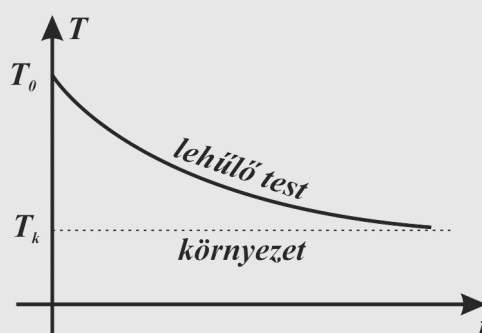
ahol $\ln K$ célszerűen választott integrációs konstans. Exponenciális alakban:

$$T - T_k = K \cdot e^{-\frac{\alpha A}{C_1} t}.$$

Ha $t=0$ -nál a test hőmérséklete $T=T_0$, akkor $K=T_0 - T_k$, és így

$$T = T_k + (T_0 - T_k) \cdot e^{-\frac{\alpha A}{C_1} t},$$

vagyis a test hőmérséklete exponenciálisan csökken, míg végtelenül meg nem közelíti a környezet T_k hőmérsékletét (Newton féle lehülési törvény), a lehülés sebességét pedig a kitevőben szereplő $\frac{\alpha A}{C_1}$ hányados határozza meg.



2.22. ábra: Newton-féle lehülési törvény grafikonja.♣

2.8.2. A hőáramlás

A *hőáramlás* során az anyagi részecskék tényleges haladó mozgása szállítja a hőt a magasabb hőmérsékletű helyről az alacsonyabb hőmérsékletű hely felé. A hőáramlás $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ hőáramerőssége arányos a közeg áramlására merőleges A keresztmetszetével és a ΔT hőmérsékletkülönbséggel:

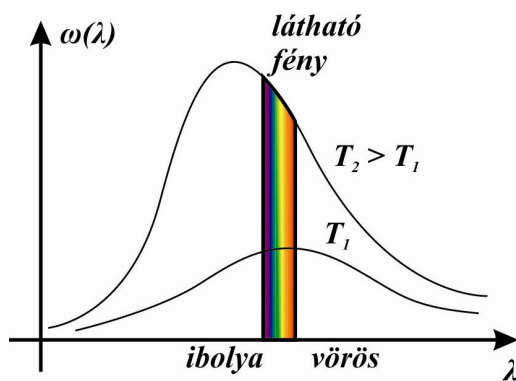
$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\alpha A \Delta T,$$

ahol α a hőáramlási együttható, SI-beli mértékegysége: $\frac{W}{m^2 \cdot K}$.

2.8.3. A hőszugárzás

A *hőszugárzás* a hő terjedésének az a módja, amikor a hő az egyik testből a másikra úgy terjed, hogy a közbeeső közeget nem melegíti fel, sőt közvetítő közegre nincs is szükség (*l.* Nap-Föld). A tapasztalat szerint minden test – a környezet hőmérsékletétől függetlenül – sugároz. Például: a 36°C hőmérsékletű ember hőt sugároz a 25°C hőmérsékletű levegőbe. Hogy nem hűl le, azt a táplálék elégetésével felszabaduló hő biztosítja. 600 K alatti hőmérsékleten a testek infravörös (hő-) sugarakat bocsátanak ki. Ezt meghaladó hőmérsékleten már látható fényt, sőt ultraibolya fényt is kibocsátanak.

A sugárzás spektrális energiaeloszlását, az adott hullámhosszhoz tartozó $\omega(\lambda)$ energiasűrűséget a λ hullámhossz függvényében (lásd: Atomfizika c. rész) a 2.23. ábra szemlélteti.



2.23. ábra: Hőszugárzás $\omega(\lambda)$ energiasűrűségének hullámhossz szerinti eloszlása

A görbe alatti terület a kisugárzott energia teljes mennyiségének számértékét adja meg. A hőmérsékleti sugárzásra érvényes a **Stefan–Boltzmann-törvény**, miszerint:

„Az A felületű test által kibocsátott hő $\frac{1}{A} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ felületi hőáramsűrűsége arányos a felületi hőmérséklet negyedik hatványával.”

Azaz matematikailag:

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \varepsilon \sigma T^4,$$

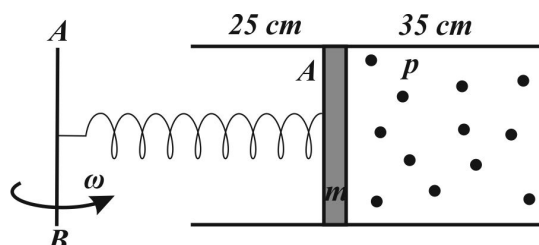
ahol $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$ és $0 \leq \varepsilon \leq 1$ a sugárzó testre – annak felületi minőségére – jellemző emissziós tényező, melynek értéke függ a felület simaságától és sötéttségétől.

([4. Video: A fénymalom](#))

2.9. Megoldandó feladatok

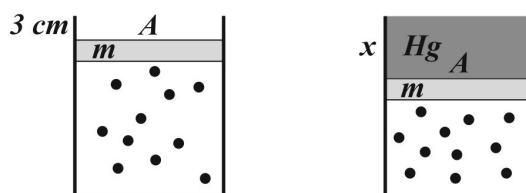
1. Egy 400 cm^3 -es lombikot megtöltöttek egy folyadékkal, és felmelegítették 50 fokkal. Mekkora a folyadék hőtágulási együtthatója, ha 2 cm^3 folyadék folyt ki?
2. Autónk 42 l -es üzemanyagtartályát teletankoltuk 18°C -os benzinnel. Mennyi benzin folyik ki 40°C -os hőmérsékleten? A benzin hőtágulási együtthatója $0,001 \frac{1}{\text{K}}$.
3. Egy 60 l -es tartályt teleöntöttünk 8°C -os metil-alkohollal. 33°C hőmérsékleten kifolyt a tartályból $1,8 \text{ l}$ metil-alkohol. Mekkora a metil-alkohol hőtágulási együtthatója?
4. Nyári 30°C -os melegben az egymástól 100 m távolságra lévő betonoszlopok közé lazán felerősítünk egy alumíniumkábel. Milyen hosszú legyen a kábel, ha azt akarjuk, hogy -20°C -os hidegben feszüljön meg?
5. Egy alumínium szegecs átmérője 20°C -on $20,02 \text{ mm}$. Hány fokra kell lehűteni, hogy beleférjen egy 20 mm átmérőjű lyukba?
6. Egy acélgolyó átmérője 0°C -on $4,15 \text{ cm}$, egy alumíniumlemezen lévő lyuk átmérője $4,16 \text{ cm}$. Hány fokra kell melegíteni a golyót, hogy ne férjen át a 0°C -os lemezen?
7. Egy tízforintos átmérője 20°C -on 25 mm . Hány százalékkal változik meg a területe, ha a zsebünkben 36°C -ra melegedik?
8. A napjainkban elérhető legjobb vákuum 273 K hőmérsékleten, 10^{-11} Pa . Hány részecske van ilyen nyomáson 1 cm^3 -nyi térfogatú gázban?
9. Egy $2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ térfogatú gáztartályban $5 \cdot 10^{22}$ db neonatomból álló, 10^5 Pa nyomású gáz van. Határozzuk meg a neon hőmérsékletét!
10. Egy ideális gáz 100°C -on és $100,26 \text{ kPa}$ nyomáson 500 cm^3 térfogatú teret tölt ki. Mekkora ugyanennek a gáznak a térfogata normál körülmények között?
11. Egy adott tömegű ideális gáz térfogata 50°C -on 400 cm^3 . Mennyi a térfogata 100°C -on és változatlan nyomáson?
12. Valamely ideális gáz térfogata 27°C hőmérsékleten $0,3 \text{ m}^3$. Mekkora lesz a térfogata, ha állandó nyomáson 57°C -ra melegítjük?
13. A 200 K hőmérsékletű ideális gáz térfogatát állandó nyomáson a háromszorosára növeljük, majd állandó térfogaton nyomását felére csökkentjük. Mennyivel változott a folyamat során a gáz hőmérséklete?
14. Hogyan változik egy gáz sűrűsége, ha nyomása, és kelvinben mért hőmérséklete kétszeresére növekszik?
15. Mekkora lesz a 80 l térfogatú, 27°C hőmérsékletű és $1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ nyomású ideális gáz új nyomása, ha a térfogata 70 l -re, hőmérséklete pedig 7°C -ra csökken?
16. A 12°C hőmérsékletű ideális gáz nyomását 20% -kal növeljük, térfogatát pedig 20% -kal csökkentjük. Mennyi lesz a gáz új hőmérséklete?
17. Egy ideális gáz térfogata 50% -kal növekszik, miközben nyomása 50% -kal csökken. Hány százalékkal változik a kelvinben kifejezett hőmérséklete?
18. Egy $9,8 \text{ cm}^3$ -es üveggömbhöz $0,1 \text{ cm}^2$ keresztmetszetű, a végén nyitott, vízszintes üvegcső csatlakozik. A csőben egy higanycsepp 27°C -on a gömbtől 2 cm -re található. Hány fok a hőmérséklet akkor, ha változatlan nyomás mellett a higanycsepp 10 cm -re távolodott el a kezdeti helyzetétől?
19. Egy gázpalackban $16,2 \text{ MPa}$ nyomású 300 K hőmérsékletű ideális gáz van. Mekkora lesz a palackban a gáz nyomása, ha a gáz 25% -át kiengedve, a hőmérséklet 280 K -re csökken?
20. 30 cm átmérőjű léggömbben lévő levegő nyomása 20°C -on 110 kPa . Mekkora lesz a belsejében a nyomás, ha napon 50°C -ra melegszik fel, és a léggömb átmérője $0,5\%$ -kal nagyobb lett?
21. A víz alatt 5 m mélyről a 10°C hőmérsékletű vízben 1 mm átmérőjű lebegőbuborék emelkedik a 18°C -os felszínre. Mekkora lesz a térfogata?

22. Egy 30 l-es palackban $20\text{ }^\circ\text{C}$ hőmérsékletű $303,97\text{ kPa}$ nyomású oxigéngáz van. A bezárt gáz egy részét kiengedjük. Miután a bennmaradt gáz újra felvette a szoba $20\text{ }^\circ\text{C}$ -os hőmérsékletét, a nyomásmérő $243,18\text{ kPa}$ nyomást jelez. Hány g oxigént engedünk ki a palackból?
23. Egy dugattyúval elzárt edényben lévő $10\text{ }^\circ\text{C}$ hőmérsékletű ideális gázt először $35\text{ }^\circ\text{C}$ -ra melegítünk úgy, hogy a dugattyút szabadon hagyjuk mozogni, majd ekkor a dugattyút rögzítve a gázt tovább melegítjük $55\text{ }^\circ\text{C}$ -ig. Mekkora a gáz nyomása és térfogata a melegítés végén?
24. Mennyivel változott meg annak az ideális gáznak a hőmérséklete, amely kezdetben $15\text{ }^\circ\text{C}$ -os és 50 kPa nyomású volt, majd a nyomását 65 kPa -ra növelve a tároló edény térfogata 5%-kal megnőtt?
25. 8 dm^3 térfogatú tartályban 12 g tömegű gáz van 295 K hőmérsékleten. Egy-egy molekula tömege: $6,64 \cdot 10^{-26}\text{ kg}$. Az edényből kiengedtünk 3 g gázt. A maradék 290 K hőmérsékletű lett. Mekkora volt a gáznyomás kezdetben? Mennyi lett a nyomás új értéke? Hány gázcseppentést engedünk ki
26. Egy 60 cm hosszú, 7 cm^2 keresztmetszetű, egyik végén zárt fémcsőben 3 kg tömegű dugattyú 35 cm hosszú, 10^5 Pa nyomású levegőoszlopot zár el. A dugattyút 25 cm hosszú, $150\frac{\text{N}}{\text{m}}$ rugóállandójú nyújtatlan rugó köti az AB forgástengelyhez. Ezután a csövet az AB tengely körül, vízszintes síkban, állandó $15\frac{1}{\text{s}}$ szögsebességgel forgatjuk úgy, hogy a bezárt ideális gáz hőmérséklete állandó. Hol helyezkedik el a dugattyú?



2.24. ábra: 26. feladathoz

27. Az alábbi ábrán látható függőleges helyzetű hengerben a súrlódásmentesen mozgó dugattyú keresztmetszete $0,5\text{ dm}^2$, tömege 7 kg . A bezárt ideális gáz térfogata 4 l . A külső légnyomás 10^5 Pa . A dugattyú az edény felső szélétől 3 cm -re helyezkedik el. Mekkora a bezárt gáz nyomása? Hány kg higanyt kell a dugattyú fölé tölteni, hogy az edény színültig legyen higannyal? (A higany beöntése miatt a gáz hőmérséklete nem változott meg.)



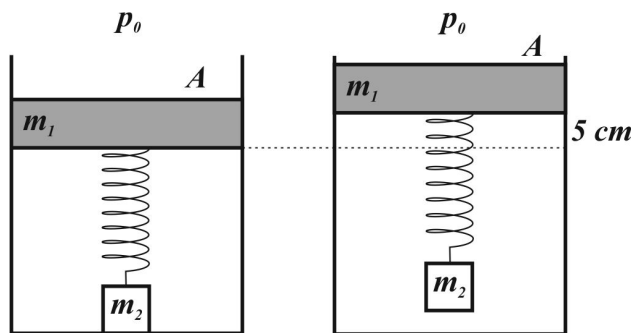
2.25. ábra: 27. feladathoz

28. Az ábrán látható 70 cm -es vékony üvegcsőben az $l = 18\text{ cm}$ és $L = 20\text{ cm}$ hosszúságú levegőoszlopokat a $h = 4\text{ cm}$ és $H = 8\text{ cm}$ hosszúságú higanyszálak zárják el a külvilágtól. A külső légnyomás 76 cm magas higany nyomásának felel meg. Mekkora lesz a levegőoszlopok hossza, ha a csövet nyitott végével lefelé fordított helyzetbe hozzuk?



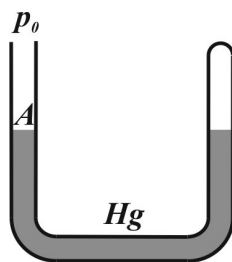
2.26. ábra: 28. feladathoz

29. Függőleges helyzetű, 2 dm^2 keresztmetszetű edényben 10 kg tömegű, könnyen mozgó dugattyú oxigént zár el a külvilágtól. Az edény alján van egy $0,5 \text{ dm}^3$ térfogatú és 3 kg tömegű tömör fémkocka, amit $800 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ rugóállandójú, 45 cm nyugalmi hosszúságú rugó köt össze a dugattyúval. A dugattyú kezdetben 50 cm magasságban van. A bezárt oxigén hőmérséklete $15 \text{ }^\circ\text{C}$. A külső légnyomás 10^5 Pa . Mekkora hőmérsékletre kell felmelegíteni az oxigént, hogy a fémkocka 5 cm -rel megemelkedjen?



2.27. ábra: 29. feladathoz

30. Mindkét végén nyitott, U alakú csőben alul higany van. Az egyik szárába 15 cm magas vízoszlopot, a másikba 25 cm magas olajoszlopot rétegezzünk. Mekkora lesz a két higany szint közötti különbség?
31. Az ábrán látható U alakú cső keresztmetszete 1 cm^2 . A csőben lévő higany a két ágban azonos magasságban van. A jobb oldali szárban a bezárt $27 \text{ }^\circ\text{C}$ -os levegőoszlop hossza 50 cm . A külső légnyomás 76 cm magas higanyoszlop nyomásával egyezik meg. Mekkora lesz a bezárt levegő nyomása és térfogata, ha a bal oldali szárba 39 cm^3 higanyt öntünk? Mennyi hőt kell közölni a bezárt levegővel, hogy eredeti térfogatára táguljon vissza?



2.28. ábra: 31. feladathoz

32. 1 m hosszúságú, egyik végén zárt üvegcső felénél a bent lévő levegőt 1 cm hosszúságú higanycsepp zár el. A csövet állandó szögsebességgel, függőlegeseből lefelé indítva lassan körbeforgatjuk. Milyen pályán mozog a higanycsepp?
33. 20 dkg , $-15 \text{ }^\circ\text{C}$ -os jeget szeretnénk teljesen elolvasztani. Mekkora hőt kell közölni a jéggel? Mennyi ideig tart ez egy 2000 W -os főzőlapon?

-
34. 30 dk , $-15 \text{ }^\circ\text{C}$ -os jeget $30 \text{ }^\circ\text{C}$ -os vízzé alakítunk melegítéssel. Mennyi hőt kell közölni jéggel? Mennyi ideig tart ez egy 2000 W -os főzőlapon?
35. 4 dl , $90 \text{ }^\circ\text{C}$ -os teát szeretnénk lehűteni $-18 \text{ }^\circ\text{C}$ -os, 7 g -os jégkockákkal. Hány $^\circ\text{C}$ -ra hűl le a tea, ha 10 db jégkockát dobunk bele?
36. Mennyi hőt kell közölni 2 l , $30 \text{ }^\circ\text{C}$ -os vízzel, hogy teljesen elforraljuk, Mennyi ideig tart ez egy 2000 W -os főzőlapon?
37. Mennyi hó szabadul fel, ha 2 l , $100 \text{ }^\circ\text{C}$ -os vízgőz $50 \text{ }^\circ\text{C}$ -os vízzé alakul?
38. 1 l , $90 \text{ }^\circ\text{C}$ -os vizet összeöntünk 2 l , $20 \text{ }^\circ\text{C}$ -os vízzel. Mekkora lesz a kialakuló közös hőmérséklet?
39. Mennyi energiát igényel 10 g arany teljes megolvasztása?
40. Mennyi hőt kell közölni 2 t tömegű, $20 \text{ }^\circ\text{C}$ hőmérsékletű vas teljes megolvasztásához?
41. Mennyi hó szabadul fel az 595 km^2 területű Balatonon, amikor 3 cm vastag jégpáncél képződik a felszínén?
42. Mennyivel változik egy ideális gáz belső energiája, ha állandó térfogaton 150 J hőt közlünk vele?
43. Két mól kétatomos, normálállapotú ideális gázt állandó nyomáson $27 \text{ }^\circ\text{C}$ hőmérsékletűre melegítünk. Mennyivel változott meg a gáz belső energiája? Mennyi hőt közöltünk a gázzal?

3. Elektromágnességtan

Az *elektromosság* szavunk a borostyán (elektron) szó régi görög megfelelőjéből ered. A borostyán egy fosszilizálódott gyantafajta, amely dörzsölés hatására feltöltődik, elektromos állapotba kerül. Ma az elektron azokat a negatív töltéseket jelöli, amelyek az atommagot körülveszik. A dörzselektromosságot több mint 2500 éve ismerjük. Hozzávetőlegesen ugyanilyen régiek a *mágnességgel* kapcsolatos első tapasztalatok, miszerint a magnetit („mágnesvaskő”) az apró vasdarabokat magához vonzza. A hely, ahol a magnetitet találták Magnesia városa volt, innen az elnevezés.

A két jelenség között több mint két évezred alatt nem sikerült kapcsolatot, kölcsönhatást találni, az elektromos és a mágneses állapot csak külön-külön, önállóan létezőként volt ismert. A körülmények alakulásában nagyon fontos fordulópontnak tekinthető Alessandro VOLTA tevékenysége, akinek 1800-ban sikerült létrehozni a galvánelemet, amely a tartós töltésáramlást, az elektromos áramot elindította. Azt mondhatjuk, hogy az elektromosság és a mágnesesség két különálló jelenség mindaddig, amíg a töltések viselkedése időben állandó (statikus).

Az elektromos mező (ahol az elektromos jelenségek megfigyelhetők) és a mágneses mező (ahol a mágneses jelenségek megfigyelhetők) kölcsönös függése egymástól mindaddig nem jelentkezik, amíg a töltésekben vagy az áramokban nincsenek időbeni változások. A két mező akkor függ egymástól kölcsönösen, ha a változások elég gyorsak. Erre való tekintettel viszont érthető, hogy elektromágnességről beszélünk.

Az elmúlt 200 évben olyan fontos felfedezések születtek, mint

- A Coulomb-törvény a töltések között ható erőről (1785),
- Hans Christian OERSTED felfedezése, miszerint az elektromos áramnak mágneses hatása van (1820),
- André-Marie AMPÈRE felfedezése az áramvezetők közötti erőhatásról, valamint az áram és a mágneses mező kapcsolatáról (1820, 1825),
- Michael FARADAY felismerése az elektromos és a mágneses mező reális létéről, és indukciós törvénye, miszerint időben változó mágneses mező elektromos mezőt hoz létre (1831),
- A Maxwell-egyenletek (1864).

Az elméleti és kísérleti eredmények alapot szolgáltatottak arra, hogy a XIX. század egyik lángelméje, James Clerk MAXWELL olyan általánosításokat hajthatott végre, aminek eredménye a Maxwell-egyenletek rendszere, amelyek a teljes elektromágnességet magukba foglalják. Ezt a teljesítményt a tudománytörténet Newton munkásságához mérhetőnek tartja.

A Maxwell-egyenletek matematikai megoldása azt mutatta, hogy létezni kell elektromágneses hullámoknak, amelyek vákuumban fénysebességgel terjednek. Ezen „megjósolt” hullámok létét egy kiváló kísérleti fizikus, Heinrich HERTZ 23 évvel később igazolta és néhány évtized elteltével megjelent a vezeték nélküli műsorszórás, a rádió és televízió.

A sors úgy hozta, hogy Maxwell nem érte meg az elektromágnes hullámok kísérleti kimutatását, Hertz pedig nem érte meg az elektromágneses hullámok alkalmazását a hírközlésben. A klasszikus elektromágnességtan kiállta az idők próbáját és mindig az emberiség szellemi csúcsteljesítményei között fogják számon tartani.

A teljes elektromágnességtan levezethető a Maxwell-egyenletekből, de ehhez rendkívül sokrétű és mély matematikai előismeretre van szükség, a fizikai megfontolásokról nem is beszélve. Az elméleti elektromágnességtan ezt az utat követi. Mi azonban tapasztalatokból indulunk ki, és azokból vonjuk le a következtetéseinket. Jelezzük, hogy a fény is elektromágneses hullám és a Maxwell-egyenletek a fénytani jelenségekre is alkalmazhatók.

A Klasszikus (newtoni) mechanika megalkotása közel 200 évvel megelőzte a klasszikus elektromágnességtant. Ennek egyik alapvető oka az, hogy a kétfajta jelenségcsoport alapvetően különbözik egymástól. A mechanikai jelenségek a mindennapi érzékszervi tapasztalatokon alapulhatnak, míg az elektromágnességre vonatkozó érzékszervi tapasztalatokkal nem rendelkezünk (kivételem a statikus elektromosság és mágnesség), ez utóbbi sokkal elvontabb, a kísérletek és mérések elvégzése sokkal bonyolultabb.

3.1. Elektrosztatika

3.1.1. Elektrosztatikai alapfogalmak

Az *Elektrosztatika* a nyugvó elektromos töltésekkel kapcsolatos jelenségekkel foglalkozik. Az atomok bizonyos építőelemei elektromosan töltött részecskék. Ezek az *elektron* (negatív töltés) és a *proton* (pozitív töltés). Ezeket *elemi töltéseknek* is tekintjük, mert töltésük törtrészei önálló részecskékben nem fordulnak elő. Mivel a testekben általában egyenlő számú elektron és proton van, ezért a testek elektromosan semlegesek. Ha egy test elektromosan nem semleges, akkor

- negatív töltésű, ha elektrontöbblettel, és
- pozitív töltésű, ha elektronhiánnyal rendelkezik.

A töltésmegmaradás törvénye kimondja, hogy zárt rendszerben az elektromos töltések összege változatlan marad.

A *töltés* mértékét Q -val (esetenként q -val) jelöljük és SI-beli mértékegysége a coulomb, jele: C . Az elektromos töltés előjeles mennyiség. $1 C$ töltés $6,24 \cdot 10^{18}$ darab elemi elektromos töltésnek felel meg, ami másként azt jelenti, hogy egy elemi töltés nagysága

$$e = \frac{1}{6,24 \cdot 10^{18}} C \approx 1,6 \cdot 10^{-19} C,$$

ahol e az elemi elektromos töltés megkülönböztetett jele.

Makroszkopikus méretekben a töltések halmazát célszerű folytonos eloszlásúnak tekinteni és töltéssűrűségről beszélni.

3.1.1.1. Vonali töltéssűrűség

Egydimenziós testen λ *vonali töltéssűrűségről* beszélünk, amely egyenletes töltéseloszlás esetén:

$$\lambda = \frac{Q}{l},$$

ahol l a Q töltéssel rendelkező vonalszerű test hossza. SI-beli mértékegysége: $\frac{C}{m}$. Inhomogén töltéseloszlás esetén egy adott helyen mérhető λ helyi töltéssűrűség:

$$\lambda = \frac{dQ}{dl}.$$

3.1.1.2. Felületi töltéssűrűség

Kétdimenziós, A felületű testen σ *felületi töltéssűrűségről* beszélünk, amelynek nagysága egyenletes töltéseloszlás esetén:

$$\sigma = \frac{Q}{A},$$

melynek SI-beli mértékegysége: $\frac{C}{m^2}$. Inhomogén esetben a σ helyi felületi töltéssűrűség:

$$\sigma = \frac{dQ}{dA}.$$

3.1.1.3. Térfogati töltéssűrűség

Háromdimenziós, V térfogatú testen ρ *térfogati töltéssűrűségről* beszélünk:

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

homogén esetben, és

$$\rho = \frac{dQ}{dV}$$

inhomogén töltéseloszlás esetén. SI-beli mértékegysége a $\frac{C}{m^3}$.

3.1.1.4. Ponttöltés és vezető

Célszerű lesz még a *pontszerű töltés* (ponttöltés) bevezetése, amikor a töltést hordozó test mérete elhanyagolhatóan kicsiny a környezetéhez képest.

Vezetőknek nevezzük azokat az anyagokat, amelyekben az elektromos töltések viszonylag szabadon mozoghatnak. Ilyenek pl. a fémek, ahol a töltéshordozók az elektronok, illetve az elektrolitok, ahol a töltéshordozók ionok. A *szigetelők* olyan anyagok, amelyekben a töltéshordozók csak nagyon korlátozottan mozoghatnak, az ilyen anyagok felületére juttatott töltés helyben marad, nem oszlik szét.

3.1.2. A Coulomb-törvény

Charles Augustin de COULOMB az elektromos töltések között ható erőt vizsgálta (1785). Azt tapasztalta, hogy:

„A Q_1 és Q_2 ponttöltések között ható elektromos erő egyenesen arányos a töltések nagyságával, fordítottan arányos a köztük lévő r távolság négyzetével és az erő a töltéseket összekötő egyenesbe esik.”

Azaz matematikailag:

$$F_C = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2},$$

ahol a k arányossági együttható az alapegységek megválasztásától függő konstans, esetünkben $k = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$. Ez a **Coulomb-törvény**. A törvény matematikai alakja tükrözi azt a tapasztalati tény is, hogy az azonos előjelű töltések taszítják, a különbözőek vonzzák egymást.

Jogos azt feltételezni, hogy a ponttöltés iránytól függetlenül gömbszimmetrikusan fejti ki elektromos vonzó vagy taszító erejét, ezért célszerűségi okokból a $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ jelölést alkalmazzuk, ahol 4π a teljes térszög nagysága (számértékileg az egységnyi sugarú gömb felszíne), és ebből:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2},$$

a vákuum (\approx levegő) permittivitása (régebbi nevén: dielektromos állandója). A vákuumtól különböző szigetelő anyagok ϵ permittivitását a vákuumhoz viszonyított ϵ_r relatív permittivitással szoktuk megadni, amiből az anyagra jellemző

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

permittivitas kiszámolható. Például üveg esetében $\epsilon_r = 5$, tehát az üveg permittivitása:

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = 5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} = 4,425 \cdot 10^{-11} \frac{C^2}{N \cdot m^2}.$$

A tapasztalat azt igazolja, hogy bár r csökkenésével $\frac{1}{r^2}$ rohamosan nő, a Coulomb-törvény még atomi méretű távolságok ($10^{-10} m$) esetén is nagy pontossággal érvényes. Az elektromos erő atomi méretek esetén sok nagyságrenddel nagyobb, mint a gravitációs erő, ha ugyanazon két test között azonos távolság esetén hasonlítjuk össze. Ezért ahol elektromos erők is fellépnek, ott a gravitációs vonzás általában elhanyagolható.

3.1. Példa: A proton és az elektron között ható erők

- Mekkora erővel vonzza egymást, az egymástól $10^{-10} m$ távolságban lévő elektron és proton?
- Hányszorosa ez a köztük ható gravitációs erőnek?

(Adatok: $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$, $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} kg$, $G = 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$)

Megoldás:

a) Az elektromos Coulomb-erő nagysága:

$$F_C = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = k \frac{e^2}{r^2} = 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ N},$$

b) A gravitáció erő nagysága:

$$F_g = G \frac{m_p m_e}{r^2} \approx 10^{-47} \text{ N}.$$

Tehát az elektromos kölcsönhatásból származó erő tehát $\frac{F_e}{F_g} \approx 2,3 \cdot 10^{39}$ -szer nagyobb a gravitációsnál. ♣

Megjegyzés:

Az elektronoknak a protonok elektromos erőterében való mozgása a klasszikus fizika szerint közel egyenletes körmozgás, amelynek feltétele, hogy az elektromos vonzóerő az atommag körül keringő elektron mozgásához szükséges, a kör középpontja felé mutató, ún. centripetális erő legyen. Egy Z rendszámú (protonszámú) atom esetén:

$$F_{cp} = \frac{mv^2}{r} = k \frac{Ze^2}{r^2} = F_C$$

Ebből pl. a keringő elektron $\frac{1}{2}mv^2$ mozgási energiája kiszámítható.

3.1.3. Az elektromos mező és jellemzése

A térnek azt a részét, amely az oda helyezett nyugvó elektromos töltésre erőt gyakorol, *elektromos mezőnek* nevezzük. Jelenlegi tudásunk szerint ilyen mezőt vagy elektromos töltések hoznak létre (ilyenkor ezek a mező forrásai), vagy időben az változó mágneses mező (amelyben nincsenek források, l. később).

Elektrosztatikában csak a nyugvó töltések által keltett elektromos mezővel foglalkozunk. Az elektromos mező az anyag egyik megjelenési formája, amely energiát és impulzust hordoz, így képes erőt gyakorolni, közvetíteni az oda helyezett Q töltésre. Az elektromos mezőt – annak pontjait – számértékileg azzal az erőhatással jellemezzük, amelyet az oda helyezett egységnyi nagyságú pozitív töltésre fejt ki. Az elektromos mező tehát egy vektortér, minden egyes pontjához (helyvektorához) egy vektor, az ún. \vec{E} *elektromos térerősség-vektor* rendelhető. A fentieknek megfelelően:

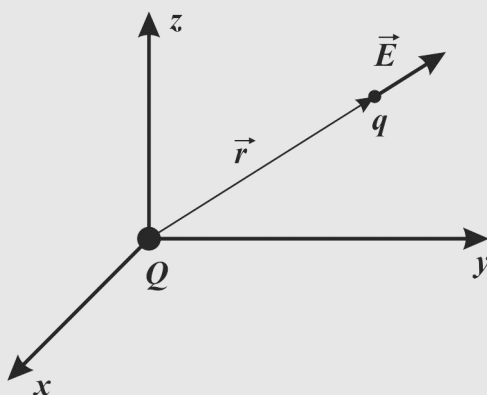
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{Q}},$$

ahol Q a tér egy adott pontjába helyezett töltés, \vec{F}_e pedig az erre ható erő. Az elektromos térerősség SI-beli mértékegysége: $\frac{N}{C}$ ($= \frac{V}{m}$, l. később).

Elektrosztatikában az \vec{E} csak a helytől függ, az időtől nem. Ha \vec{E} a helynek sem függvénye, azaz az elektromos mező nagysága és iránya a tér minden pontjában ugyanaz, akkor *homogén*, ellenkező esetben *inhomogén* elektromos mezőről beszélünk.

3.2. Példa: Ponttöltés elektrosztatikus mezője

Számítsuk ki, hogy a $Q = 1 \mu C$ nagyságú ponttöltéstől mekkora távolságban lesz az \vec{E} elektromos térerősség nagysága $1 \frac{N}{C}$?



3.1. ábra: Ponttöltés elektrosztatikus mezője

Megoldás:

A 3.1. ábra szerint az origóban található Q ponttöltés az \vec{r} helyvektorral jellemezhető P pontban található q próbatöltésre

$$F_C = k \frac{Qq}{r^2}$$

nagyságú Coulomb-erővel hat, amelynek iránya pozitív q próbatöltés esetén az origóból a P pontba mutató \vec{r} helyvektorral megegyező. Definíció szerint az \vec{E} elektromos térerősségvektor nagysága $E = \frac{F_e}{Q}$, amely a pontszerű próbatöltés esetén:

$$E = \frac{F_C}{q} = k \frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2},$$

iránya pedig a ponttöltésre ható \vec{F}_C Coulomb-erő irányával egyezik meg, azaz Q töltéstől távolodva $\frac{1}{r^2}$ szerint minden irányban gömbszimmetrikusan (gyorsan) csökken. Innen:

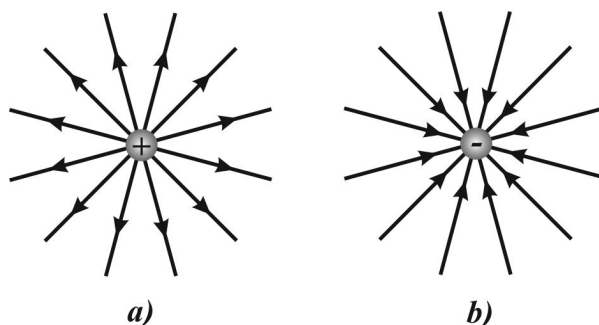
$$r = \sqrt{\frac{kQ}{E}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}}{1}} m \approx 95m. \clubsuit$$

Megjegyzés:

Eddig azt feltételeztük, hogy a q próbatöltés jelenléte nem változtatja meg az mezőt létrehozó többi töltés hatását, eloszlását. Például, ha a töltések vezető felületén helyezkednek el, akkor a közelébe vitt próbatöltés a felületi töltéssűrűséget megváltoztatja és nem az eredeti mező térerősségét méri az adott helyen. Ezért az \vec{E} elektromos térerősséget általában nem a definiáló egyenlet szerint mérjük, ennél praktikusabb megoldások is vannak.

Az elektromos mezőt *térerősségvonalak*, vagy Faraday után *erővonalak* segítségével szemléltethetjük oly módon, hogy:

- A térerősség vektor a térerősségvonalhoz egy adott pontban húzott *érintő* irányába essen, és iránya a *pozitív próbatöltésre* ható \vec{F}_e elektromos erő irányával egyezzen meg.
- A térerősségvonalakra merőleges egységnyi felületen áthaladó erővonalak száma a térerősség nagyságával egyezik meg.
- Pozitív ponttöltés elektromos mezője a töltésből sugárszimmetrikusan kiinduló, abból kifelé mutató erővonalakkal, negatív ponttöltés elektromos mezője pedig a töltés felé sugárszimmetrikusan mutató erővonalakkal szemléltethető (3.2. ábra):



3.2. ábra: Erővonalak szemléltetése a) pozitív és b) negatív ponttöltés körül

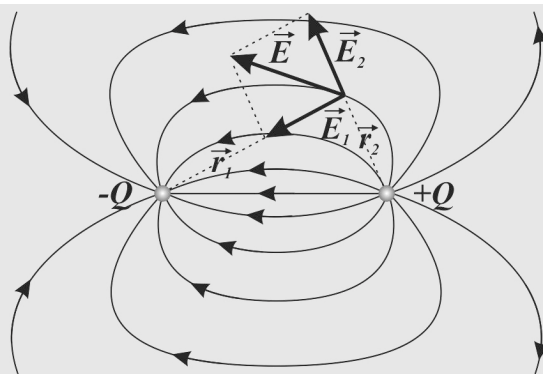
(5. [Video: Kisülés elektromos mezőben](#))

3.3. Példa: Két ponttöltés eredő elektromos mezője

Rajzoljuk le a két ellentétes előjelű és azonos nagyságú ponttöltés eredő elektromos mezőjét!

Megoldás:

A 3.3. ábra szerint a két ellentétes előjelű és azonos nagyságú ponttöltéstől r_1 és r_2 távolságban lévő P pontban lévő \vec{E} eredő elektromos térerősséget az egyes töltésektől az adott pontban mérhető, a pozitívtól sugárirányban kifelé, a negatívhoz pedig sugáriránnyal ellentétesen mutató térerősség-vektorok eredőjeként kapjuk.♣



3.3. ábra: Két ponttöltés elektromos mezője

3.4. Példa: Párhuzamos töltött fémlapok elektromos mezője

Rajzoljuk le a két ellentétes előjelű és azonos nagyságú töltéssel egyenletesen ellátott, párhuzamos lapokkal határolt fémlapok közötti elektromos mezőt!

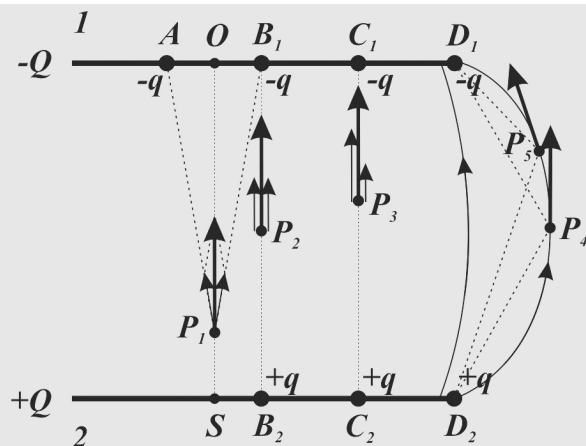
Megoldás:

A 3.4. ábra alapján az 1-es lemezen található A pontban lévő $-q$ helyi pontszerű töltéssel és az 1-es lemezen található B_1 pontban lévő $-q$ helyi pontszerű töltéssel rendelkező pontokat összekötő AB_1 egyenesre merőleges OS egyenes bármely pontjára igaz, hogy ott az A és B_1 pontokban lévő egyenlő nagyságú $-q$ ponttöltések elektromos térerősségeinek vízszintes irányú komponense egymással egyenlő nagyságú, ezért eredőjük zérus. Ebből kifolyólag az eredő térerősség P_1 pontban függőleges irányú, felfelé mutat.

Továbbá: a P_2 pont az B_1B_2 egyenes felezőpontjában található, ezért ott az 1-es lemezen lévő B_1 pontban található $-q$ töltés elektromos térerőssége és a 2-es lemezen lévő B_2 pontban található $+q$ töltés elektromos térerőssége ugyanakkora nagyságú és mindkettő, ezért eredőjük is függőlegesen felfelé mutat. A P_3 pont az C_1C_2 egyenes tetszőleges pontjában található az 1-es lemezhez közelebb, ezért ott az 1-es lemezen lévő C_1 pontban található $-q$ töltés elektromos térerőssége nagyobb a 2-es lemezen lévő B_1 pontban található $+q$ töltés elektromos térerősségénél, azonban mindkettő és így eredőjük is és függőlegesen felfelé mutat.

Számítással megmutatható, hogy túl azon, hogy a két lemez között lévő eredő elektromos tér minden pontjában azonos irányú (esetünkben függőlegesen felfelé mutató) elektromos mező található, az eredő elektromos térerősség nagysága is minden pontban ugyanakkora, vagyis az elektromos mező *homogén*.

A lemezek közötti elektromos mező a lemezek szélénél válik inhomogénné, ahogy azt a D_1 és D_2 pontokban található $-q$ és $+q$ töltések elektromos terének eredőjeként láthatjuk a P_4 és P_5 pontokban (szélhatás).♣



3.4. ábra: Párhuzamos töltött fémlamezek közötti elektromos mező

3.5. Példa: Ponttöltés mozgása homogén elektromos mezőben

a) Határozzuk meg a 3.4. Példában bemutatott, homogén \vec{E} térerősséggel jellemezhető elektromos mezőben zérus kezdősebességgel rendelkező m tömegű elektron mozgását, ha a lemezek között légüres tér (vákuum) található!

b) Mekkora sebességre gyorsul fel az elektron a pl. $10^7 \frac{N}{C}$ térerősségű mezőben 2 cm úton?

Megoldás:

a) A csak y irányú komponenssel rendelkező, függőlegesen felfelé mutató \vec{E} térerősségű homogén elektromos mezőbe helyezett $-e$ töltésű elektronra $F_y = eE$ nagyságú, függőlegesen lefelé mutató elektromos erő hat. A Dinamika alaptörvényét alkalmazva:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}},$$

vagyis

$$eE = ma,$$

ahonnan:

$$a = \frac{eE}{m} = \text{állandó},$$

tehát az elektron egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgást végez az y tengely negatív irányban, ezért t idő elteltével az origóból indulva

$$y(t) = \frac{a}{2}t^2 = \frac{eE}{2m}t^2$$

nagyságú utat tesz meg. A mozgása tehát analóg a nehézségi erő hatására szabadon eső test mozgásával.

b) Az elektron sebességének nagysága t idő múlva:

$$v(t) = at = \frac{QE}{m}t.$$

Ha a megtett út és a sebesség összefüggéséből a t időt kiküszöböljük, a gyorsulásra

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{QE}{m}$$

adódik, ahonnan a sebességre:

$$v = \sqrt{\frac{eE2s}{m}} = \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \frac{m}{s} = 2,65 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

vagyis a fénysebességgel összemérhető értéket kapunk. ♣

Megjegyzés:

A feladatban az elektron tömegét állandónak vettük, ami azonban ekkora sebesség esetén nem teljesül. Az ún. *relativisztikus tömegnövekedést* figyelembe véve a sebességre az előző értéknél kisebb, mintegy $1,21 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ -ot kapunk, ami még így is nagyon nagy érték (a számolástól a relativitáselmélet ismeretének hiányában eltekintünk).

3.6. Példa: Ponttöltés mozgása transzverzális homogén elektromos mezőben

Határozzuk meg az előző feladat szerinti mezőbe vízszintes irányban (\vec{E} -re merőlegesen) v_0 vízszintes irányú kezdősebességgel juttatott negatív Q töltés mozgását a 3.5. ábra alapján!

Megoldás:

Az x irányban a Q töltésre nem hat erő ($F_x=0$), tehát egyenes vonalú egyenletes mozgást végez ($v_x=v_0=áll.$), azaz t idő alatt $x=v_0t$ utat tesz meg.

A Q töltés y irányban megtett útja megegyezik a 3.5. Példában leírt mozgás útjával. Figyelembe véve azt, hogy a mozgás az y tengely negatív irányába történik, a mozgását t időpillanatban

$$y(t) = -\frac{QE}{2m}t^2$$

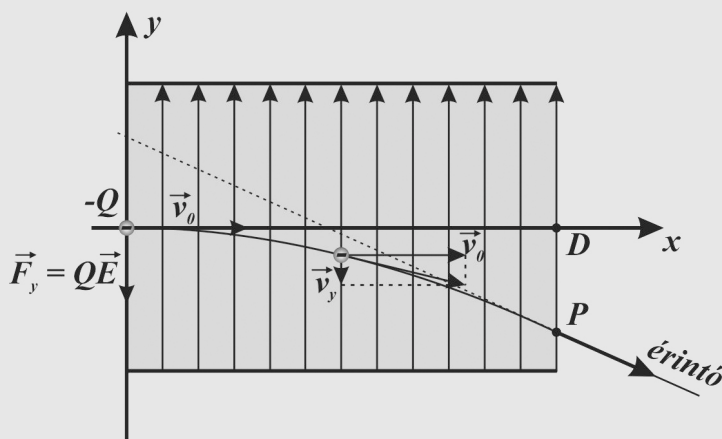
írja le.

Az x és y irányú mozgást leíró paraméteres egyenletrendszerből a t paraméter kiküszöbölésével kapjuk a töltött részecske $y = f(x)$ alakú pályaeqyenletét:

$$y(x) = -\frac{QE}{2mv_0^2}x^2,$$

ami egy origóra illeszkedő parabola egyenlete. A matematikai megoldásnak valós fizikai tartalma csak az $x \geq 0$ értelmezési tartományban van.

Az elektromos mező szélén található $x_P = D$ és $y_P = -\frac{QE}{2mv_0^2} D^2$ koordinátájú P pontot elhagyva a töltés egyenes vonalú egyenletes mozgást végez a parabola P pontbeli érintőjének irányában.♣



3.5. ábra: Ponttöltés mozgása transzverzális elektromos mezőben

3.1.4. Az elektromos dipólus viselkedése homogén elektromos mezőben

Az egymástól l távolságra lévő, összeköttetésben lévő $+Q$ és $-Q$ töltéseket *elektromos dipólusnak* nevezzük.

A homogén elektromos mezőbe álló helyzetben elhelyezett elektromos dipólusra csak M forgatónyomaték hat, mert $\vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0$, a rá ható erők eredője zérus, tehát haladó mozgást nem végez (3.6. ábra). A töltésekre ható $F_+ = F_- = QE$ nagyságú *erőpár* forgatónyomatéka

$$M = Fk = Fl \sin \alpha = QEl \sin \alpha.$$

A Ql szorzatot a dipólus elektromos p *dipólusmomentumának* nevezzük:

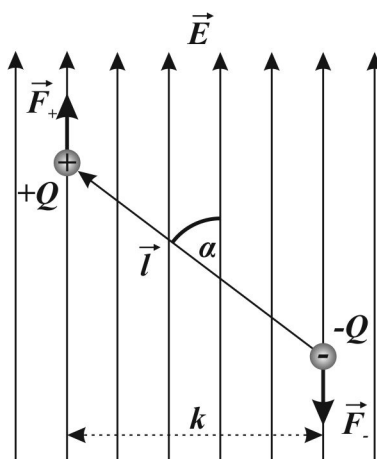
$$\boxed{\vec{p} = Q\vec{l}},$$

tehát a forgatónyomaték nagysága:

$$M = pE \sin \alpha.$$

A dipólusmomentum vektoriális mennyiség, iránya a két töltést összekötő egyenesbe esik és a negatív töltéstől a pozitív töltés felé mutat. Mindezt figyelembe véve a forgatónyomaték vektor vektoriális szorzatként adódik:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}}$$



3.6. ábra: Elektromos dipólus elektromos mezőben

Az M forgatónyomaték a dipólust az elektromos mezőben elforgatja. Ha az elektromos mező inhomogén, akkor a dipólus részben elfordul, másrészt a nagyobb térerősség irányába el is mozdul. ([10. Animáció: Dipólus elektromos mezőben](#))

Megjegyzés:

Számos molekulának van elektromos dipólusmomentuma. Ha ezek az ún. poláros molekulák szabadon mozoghatnak (pl. gázokban), akkor inhomogén elektromos mezővel a fentiek alapján szétválaszthatók a gáz többi részétől (pl. elektrostatikus porleválasztók).

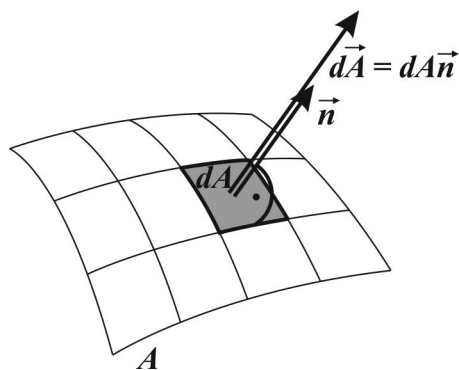
3.1.5. Az elektromos mező fluxusa

A Ψ elektromos fluxus definíció szerint az elektromos mezőre merőlegesen elhelyezkedő A felületet merőlegesen metsző erővonalak száma. Mivel az \vec{E} elektromos térerősség számértékileg az egységnyi felületen áthaladó erővonalak számát adja meg, így homogén elektromos mezőben az arra merőleges A felületen éppen EA erővonal halad keresztül, tehát ebben az esetben az elektromos mező fluxusa:

$$\boxed{\Psi = EA}.$$

Az elektromos fluxus SI-beli mértékegysége: $\frac{N \cdot m^2}{C}$ (= $V \cdot m$, l. később).

Tetszőleges alakú felület esetén a felületet olyan kicsiny dA nagyságú felületelemekre bontjuk, hogy ott az elektromos mező már homogénnek legyen tekinthető. A dA nagyságú felületelem vektormennyiségnek fogjuk fel oly módon, hogy nagysága dA nagyságával egyezzen meg, iránya pedig a felületelemből merőlegesen kifelé mutató \vec{n} egységnyi hosszúságú felületi normálvektor irányával legyen azonos (3.7. ábra):

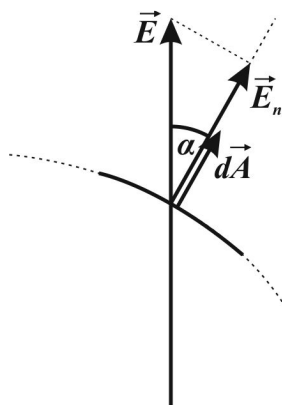


3.7. ábra: Felületvektor

Ekkor a dA felületen áthaladó, annak felületi normálvektorával α szöget bezáró E térerősségű elektromos mező $d\Psi$ elemi fluxusa a dA felületelem és az \vec{E} térerősség-vektor \vec{n} felületi normális irányába mutató komponensének szorzataként számolható ki:

$$d\Psi = E_n dA = E \cos \alpha dA = \vec{E} \cdot d\vec{A},$$

vagyis a $d\vec{A}$ felületelem-vektor és az \vec{E} elektromos térerősség-vektor skaláris szorzata adja meg (3.8. ábra):



3.8. ábra: Elektromos fluxus számítása

Az A felületre számított teljes fluxust az elemi fluxusok integrálásával kapjuk:

$$\Psi = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

3.7. Példa: Pontszerű töltés elektromos fluxusa

Számítsuk ki a Q ponttöltés elektromos mezőjének fluxusát egy vele koncentrikus r sugarú gömbfelületen!

Megoldás:

Mint láttuk, a Q töltéstől mért r sugarú gömbfelületen az elektromos térerősség iránya minden pontban merőleges a gömb felületére, nagysága pedig

$$E = E_n = k \frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}.$$

Ebből az elektromos mező fluxusa:

$$\Psi = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_A E_n dA = E_n \int_A dA = k \frac{Q}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi kQ,$$

ami a ponttöltés $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$ elektromos térerősségének összefüggésének felhasználásával

$$\Psi = 4\pi kQ = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

alakra vezet.♣

A fenti példában tapasztaltakat általánosítja a **Gauss-törvény**:

„Egy tetszőleges zárt felület által határolt térrészben lévő $\sum Q$ összes töltés elektromos mezőjének fluxusa a zárt felületre mindig $\Psi = \frac{\sum Q}{\epsilon_0}$, függetlenül a $\sum Q$ összes töltés térrészben belüli elhelyezkedésétől.”

Azaz matematikailag:

$$\Psi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum Q}{\epsilon_0}.$$

A Gauss-törvény a **Maxwell** által egyesített elektromágneses elmélet **I. egyenlete**, amely vákuumban írja le a sztatikus elektromos mező fluxusát, vagy ún. forráserejét. A törvény szavakban megfogalmazva:

„Az elektrosztatikus mező források, forrásai az elektromos töltések, az elektromos erővonalak ezekből indulnak ki és a végtelenbe tartanak.”

Megjegyzés:

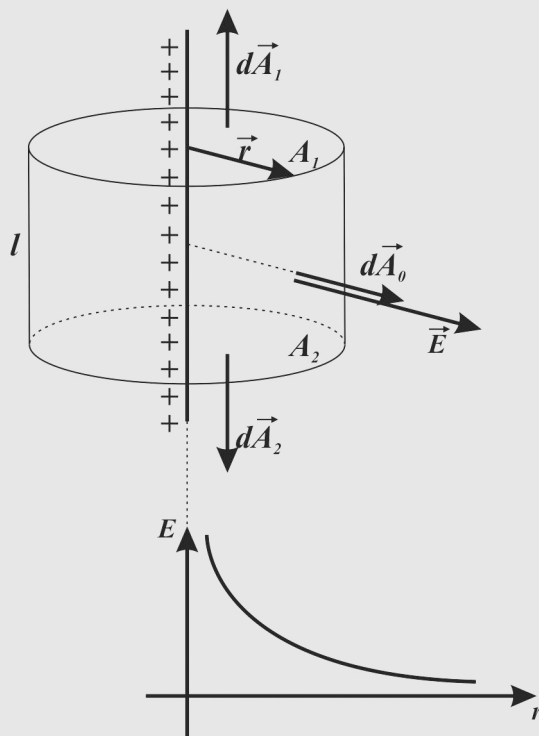
A \oint szimbólummal jelölt, zárt felületre vett integrál kiszámítása általában komoly matematikai feladat és csupán speciális elektromos mező és felület esetén egyszerűsödik le elemi integrálra vagy alpműveletekre. Szimetriával rendelkező mezőelrendezés esetén a számítás nagyban leegyszerűsödik.

3.8. Példa: Egyenes vezető körüli elektromos mező térerőssége

Számítsuk ki egy végtelen hosszúságú, elhanyagolhatóan kis átmérőjű, kör keresztmetszetű, λ vonal menti töltéssűrűségű, egyenes vezető körüli térerősség távolságfüggését!

Megoldás:

A λ vonal menti töltéssűrűséggel rendelkező vezető elektromos terének fluxusát a szimmetria miatt az azt körülvevő, koaxiálisan elhelyezett henger alakú felületen számoljuk ki (3.9. ábra).



3.9. ábra: Egyenes vezető körüli elektromos mező fluxusa

Ekkor:

$$\Psi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum Q}{\epsilon_0} = \frac{l\lambda}{\epsilon_0}.$$

Másrészt

$$\Psi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \int_{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 + \int_{A_0} \vec{E} \cdot d\vec{A}_0,$$

és mivel az A_1 és A_2 körlapokra vonatkozó integrálok zérusok, hiszen $\vec{E} \perp d\vec{A}_1$ és $\vec{E} \perp d\vec{A}_2$, valamint az A_0 felületen mindenhol igaz, hogy \vec{E} párhuzamos $d\vec{A}_0$ -lal, ezért:

$$\Psi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A_0} \vec{E} \cdot d\vec{A}_0 = E \int_{A_0} dA_0 = E 2\pi r l.$$

Ezt az eredményt összevetve az előző eredménnyel azt kapjuk, hogy az elektromos térerősség nagysága fordítottan arányos a vezetőtől mért r távolsággal:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r},$$

iránya pedig bármely pontban az egyenes vezetőtől sugárirányban kifelé mutat.♣

3.9. Példa: Töltött gömb belsejében lévő térerősség

Számítsuk ki egy σ egyenletes felületi töltéssűrűségű R sugarú gömb belsejében lévő térerősség értékét!

Megoldás:

Az R sugarú gömb belsejében lévő fluxust a gömb középpontjától mért $r < R$ sugarú, koncentrikusan elhelyezett gömb felszínén számoljuk ki.

Ekkor:

$$\Psi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0,$$

mert az r sugarú gömbön belül nem található töltés. Azt feltételezve, hogy az r sugarú gömb felszínén az \vec{E} elektromos térerősség értéke állandó, az következik, hogy

$$\Psi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint_A dA = E4\pi r^2.$$

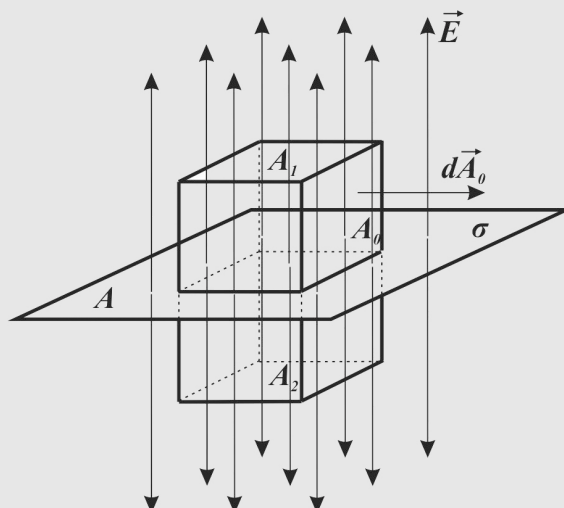
Ezt összevetve az előző eredménnyel azt kapjuk, hogy az elektromos térerősség értéke az R sugarú gömb belsejének minden pontjában zérus. Megmutatható, hogy nemcsak a szimmetriával rendelkező, hanem bármilyen alakú, $\sigma(\vec{r})$ helytől függő, nem egyenletes felületi töltéssűrűséggel rendelkező test belsejében lévő \vec{E} elektromos térerősség értéke zérus, vagyis felületi töltéssel rendelkező töltött testek a belsejükben „leárnyékolják” a külső elektromos mezőt. Az ilyen fajta leárnyékolást felfedezőjéről *Faraday-kalitka* hatásnak hívjuk.♣

3.10. Példa: Sík vezető lap körüli térerősség

Határozzuk meg egy σ egyenletes felületi töltéssűrűségű, nagyon nagy A felületű síklemez térerősségét a lemeztől mért távolság függvényében!

Megoldás:

Az A felületű síklapot környező elektromos mező fluxusát a szimmetria miatt a lapra merőlegesen illesztett $A_1 = A_2$ alapterületű és összesen $4A_0$ oldalfal-területű hasáb felszínén számoljuk ki (3.10. ábra):



3.10. ábra: Töltött sík lap körüli elektromos mező fluxusa

$$\Psi = \oint_{\Sigma A} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \int_{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 + \int_{4A_0} \vec{E} \cdot d\vec{A}_0,$$

melyben a $4A_0$ oldalfelületre számított fluxus a felületi normális és az elektromos térerősség vektor egymással 90° -ot bezáró szöge miatt zérus, illetve az A_1 és A_2 alaplapokra számított fluxusok egymással megegyeznek. Innen:

$$\Psi = \oint_{\Sigma A} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{2A_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2EA.$$

A Gauss-törvény szerint:

$$\Psi = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum Q}{\epsilon_0} = \frac{A\sigma}{\epsilon_0},$$

amit az előző eredménnyel összevetve a térerősség:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{2A\epsilon_0} = \text{állandó},$$

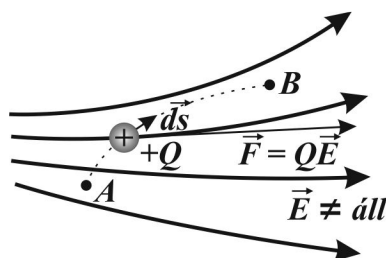
tehát az elektromos tér erőssége nem függ a síklaptól mért távolságtól, homogén. ♣

A fenti példákban a töltött test környezeteként mindig vákuumot (levegőt) tételeztünk fel, és a vákuum permittivitásával számoltunk. Ha a környező teret más közeg, ún. *dielektrikum* tölti ki, akkor az a mező hatására polarizálódik és módosítja a mezőt. Közeg jelenlétében az eddigi összefüggésekben ϵ_0 helyett $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ írandó, ahol ϵ a dielektrikum permittivitása, ϵ_r a relatív (vákuumhoz viszonyított) permittivitás.

3.1.6. Az elektromos mező munkája és feszültsége

3.1.6.1. Munka

Láttuk, hogy az elektromos mező a töltésre $\vec{F} = Q\vec{E}$ erőt gyakorol, aminek hatására a töltés elmozdulhat, azaz az elektromos mező munkát tud végezni rajta. Az időben állandó, inhomogén mezőben a végzett munka nagysága az 3.11. ábra és a Mechanika című részben tanultak alapján kiszámítható.



3.11. ábra: Munka kiszámítása inhomogén elektromos mezőben

Az AB útvonalon mozgó Q ponttöltésre ható $\vec{F} = Q\vec{E}$ elektromos erő az mező inhomogenitása miatt változó nagyságú és irányú, ezért a töltés pályáját olyan elemi $d\vec{s}$ elmozdulásokra osztjuk, amelyeken az elektromos mező tetszőlegesen kis hibával homogénnek tekinthető. Ekkor az \vec{E} térerősségű elektromos mező a Q töltésen $d\vec{s}$ elmozduláson

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = Q\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

elemi munkát végez. Az A és B pontok közötti pályán mozgó töltésen végzett összes elektromos munka az elemi munkák összege, vagyis az \vec{E} elektromos térerősség vektor vonal menti integrálja:

$$W_{AB} = Q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Homogén mezőben és egyenes pályán

$$W_{AB} = Q\vec{E} \cdot \vec{s} = QEs \cos \alpha,$$

valamint, ha \vec{E} és \vec{s} egyirányú ($\alpha = 0^\circ$), akkor

$$W_{AB} = QEs.$$

3.1.6.2. Feszültség

Az elektromos mező által végzett munka nemcsak az elektromos mező jellemzője, hiszen mértéke függ a mozgatott Q töltés nagyságától is. Ezért bevezetjük az

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{Q}$$

mennyiséget, ami viszont csak a mezőre jellemző mennyiség, mert számértékileg az A és B pontok között mozgatott egységnyi töltésen végzett munkát mutatja meg, neve: *feszültség*. Azaz:

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{Q} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

SI-beli mértékegysége: $\frac{J}{C} = V$ (volt). Ha az elektromos mező homogén és a pálya egyenes, akkor:

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{Q} = \vec{E} \cdot \vec{s} = Es \cos \alpha,$$

valamint, ha \vec{E} és \vec{s} egyirányú ($\alpha = 0^\circ$), akkor

$$U_{AB} = Es.$$

Ebből adódik az elektromos térerősség mértékegységének gyakoribb alkalmazása: $E = \frac{U_{AB}}{s}$

miatt az SI-beli mértékegység felírható $\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$ alakban is.

3.11. Példa: Próbátöltésen végzett munka és a mező feszültsége

Határozzuk meg a Q ponttöltés elektromos mezője által A -tól B -ig sugárirányban mozgatott q próbátöltésen végzett munkát (3.12. ábra)!

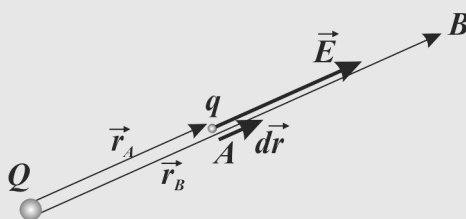
Megoldás:

A Q ponttöltéstől r_A távolságban lévő A ponttól az r_B távolságban lévő B pontig mozgatott q próbátöltésen végzett munka:

$$W_{AB} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = q \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right).$$

Az A és B pontok közötti feszültség ebből:

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right). \clubsuit$$



3.12. ábra: Próbátöltésen végzett munka

3.1.6.3. Az elektromos mező gyorsító hatása

Mivel az U feszültségű homogén elektromos mező a v_0 kezdősebességű, m tömegű, Q töltésű részecskén a feszültség definíciója alapján $W = QU$ munkát végez, azaz felgyorsítja v sebességre, a munkatétel szerint növeli mozgási energiáját:

$$W = QU = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Megjegyzés:

Elemi részecskék energiáját nem célszerű joule-ban megadni, mert az ott túl nagy egység. Ezért bevezetjük az elektronvolt (eV) energiaegységet. Az $1 eV$ akkora kinetikus energiával egyenlő, amelyre egy álló helyzetből induló, elemi töltésű ($e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$) részecske tesz szert, ha $1 V$ feszültségű elektromos mezőn halad át. Ennek nagysága SI-ben:

$$1 eV = QU = eU = 1,6 \cdot 10^{-19} C \cdot 1 V = 1,6 \cdot 10^{-19} J$$

3.1.7. A potenciális energia és potenciál

A Mechanika című részben ismertetett potenciális energiához hasonlóan az elektromos mezőben is bevezetjük a Q töltés potenciális energiáját.

Emlékeztetőül: a nehézségi erő ellenében kifejtett emelő erő által lassan mozgatott test potenciális energiája azzal a munkával egyenlő, amelyet az emelő erő végez, miközben a testet a Föld felszínén kijelölt referenciaponttól adott magasságra juttatja.

Az elektromos mezőben a Q töltés potenciális energiája az elektromos erővel ellentétes irányban ható, a ponttöltést lassan a kijelölt $A = 0$ referenciaponttól adott pontig mozgató erő által végzett munkával egyenlő:

$$E_p = W_{\text{mozgató}} = -W_{\text{elektromos}},$$

vagyis

$$E_{p,B} = -W_{A=0,B} = -Q \int_{A=0}^B \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Megjegyzés:

Ne keverjük össze az összefüggés jobb és bal oldalán szereplő jelöléseket. A bal oldalon E energiát, a jobb oldalon pedig elektromos térerősséget jelöl!

A munkához hasonlóan a potenciális energia értéke sem csak az elektromos teret jellemzi, mert nagysága függ az ott lévő ponttöltés nagyságától is. Ezért bevezetjük az elektromos mező B pontjának

$$V_{0,B} \equiv V_B = \frac{E_{pB}}{Q}$$

potenciálját, ami számértékileg a B pontban lévő egységnyi töltés potenciális energiájával egyezik meg.

3.12. Példa: Ponttöltés potenciális energiája és az elektromos mező potenciálja

Határozzuk meg a Q pontszerű töltéstől mért r_0 távolságból r_B távolsáig mozgatott q próbatöltés potenciális energiáját és a B pont potenciálját!

Megoldás:

Fentieknek megfelelően a Q ponttöltés elektromos mezőjében, attól r_B távolságban lévő q próbatöltés potenciális energiája a próbatöltésre ható taszító F_e elektromos erővel ellentétes irányú, $F = -F_e$ nagyságú mozgóerő által, a próbatöltést a Q ponttöltéstől mért elvileg végtelen ($r_0 \rightarrow \infty$) távolságból r_B távolsáig való mozgatása során végzett munkával egyenlő:

$$E_{p,B} = W_{r_0 \rightarrow r_B} = \int_{r_0}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_0}^{r_B} -\vec{F}_e \cdot d\vec{r} = \int_{r_0}^{r_B} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^2} dr = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{r_0}^{r_B}.$$

Figyelembe véve, hogy $r_0 \rightarrow \infty$, az integrálási határok behelyettesítése és a határérték kiszámítása után a q próbatöltés potenciális energiájára

$$E_{p,B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r_B}$$

adódik, B pont potenciálja pedig:

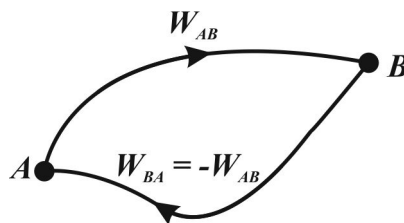
$$V_B = \frac{E_{p,B}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_B} \quad \clubsuit$$

Megjegyzés:

A hidrogénatom magjának (töltése: $Q = Ze = e$) elektromos mezőjében lévő elektron (töltése: $q = -e$) potenciális energiája például:

$$V_{e^-} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_B}$$

Bizonyítható, hogy az elektrosztatikus mező *konzervatív*, ami azt jelenti, hogy a Q töltés A pontból B pontba való mozgásakor végzett munka független a pálya alakjától, csak a kezdő és végpont helyének függvénye. Ebből az következik, hogy zárt görbe mentén végzett munka zérus, mert a munka nagysága A -tól B -ig ugyanakkora, mint B -tól A -ig, de ellenkező előjelű (3.13. ábra).



3.13. ábra: Konzervatív mező által végzett munka

Azaz:

$$W_{AA} = W_{AB} + W_{BA} = W_{AB} + (-W_{AB}) = 0.$$

A Q ponttöltést elektrosztatikus mezőben zárt görbe mentén mozgatva tehát a munka általánosan:

$$W = Q \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0,$$

ezért a zárt görbére vonatkozó ún. *körfeszültség*:

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0}.$$

Ez az Elektrosztatika téregyenlete, mert benne csak az elektromos mező jellemzői szerepelnek. Az elektrosztatikus mező azon fontos tulajdonsága jut ebben kifejezésre, hogy zárt erővonalak nincsenek, más szóval *örvénymentes vektortér*.

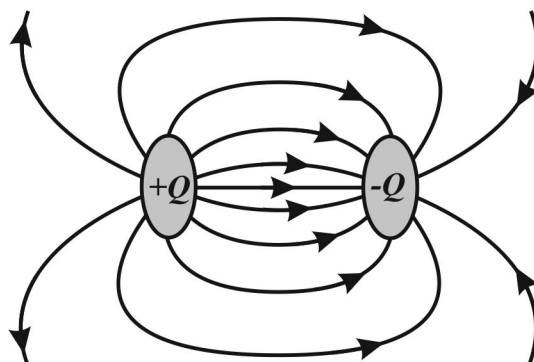
Az azonos potenciálú pontok *felületen* helyezkednek el, amelynek neve *ekvipotenciális felület*, amelyekkel az elektromos mező ugyanúgy szemléltethető, mint az erővonalakkal. Az erővonalak érintői az ekvipotenciális felület érintősíkjára merőlegesek.

A potenciál fogalmának ismeretében az elektromos mező A és B pontja közötti U_{AB} feszültség másképp is értelmezhető. A mező két pontja között lévő feszültség azzal a munkával egyenlő, amely a pozitív egységnyi töltésnek egyik pontból a másikba juttatásához szükséges, más szavakkal a két pont közötti *potenciálkülönbséggel*.

A potenciál számértéke a mező egy pontjához rendelt számérték, míg a feszültség mindig két pont között értelmezendő.

3.1.8. Elektromos kapacitás, kondenzátorok

Bármely két – szigetelővel elválasztott – vezető *kondenzátort* alkot. A két vezető (általában felület) a kondenzátor lemezei („fegyverzetei”). Ha az egyik vezetőre $+Q$, a másikra $-Q$ töltést viszünk fel, akkor közöttük U feszültségű elektromos mező alakul ki (3.14. ábra):



3.14. ábra: Kondenzátor

Tapasztalat szerint egy adott térelrendezés esetén a $\frac{Q}{U}$ hányados állandó, amit a rendszer C kapacitásának nevezünk:

$$C = \frac{Q}{U}.$$

SI-beli mértékegysége a $\frac{J}{C} = F$ (farad). A gyakorlatban a farad törtrészei használatosak: mF , μF , nF , pF . A kondenzátor képes adott feszültséget fenntartva töltést tárolni.

3.13. Példa: Síkkondenzátor kapacitása

Határozzuk meg az egymástól d távolságra lévő, $+Q$ és $-Q$ töltésű A felületű fegyverzetekkel határolt kondenzátor kapacitását, ha a fegyverzetek között levegő van!

Megoldás:

A 3.10. Példa alapján a fegyverzetek közötti elektromos mező homogén, amelynek térerősségét a

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum Q}{\epsilon_0}$$

Gauss-törvényből határozzuk meg. Az egyenletből a szimmetria és a homogenitás miatt

$$EA = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

adódik, vagyis:

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 A},$$

tehát a fegyverzeteken tárolt töltén nagysága:

$$Q = E\epsilon_0 A.$$

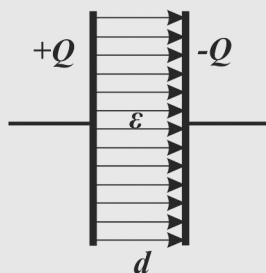
A feszültség definíciója szerint:

$$U = Ed,$$

ahonnan a kondenzátor kapacitása az előző két eredményt felhasználva:

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{A}{d}.$$

A kapacitás növelhető a lemezek méretének növelésével, a köztük lévő távolság csökkentésével és a levegőnél (vákuumnál) nagyobb permittivitású szigetelő alkalmazásával (3.15. ábra).♣



3.15. ábra: Síkkondenzátor

A kondenzátor technikai jelölése:



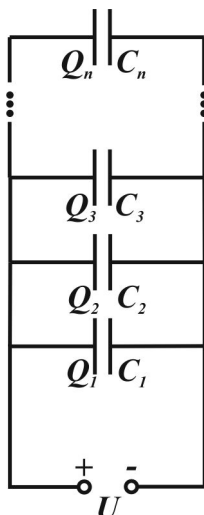
3.16. ábra: Kondenzátor technikai rajzjele

3.1.8.1. Kondenzátorok kapcsolása

A kondenzátorokat egyszerűbb vagy összetettebb hálózatba lehet kapcsolni. Kapcsolásuk esetén összességük helyettesíthető egyetlen C_e eredő kapacitású kondenzátorral.

3.1.8.1.1. Párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitása

Párhuzamos kapcsolásról beszélünk akkor, amikor az egyes kondenzátorok fegyverzetei nem folytonos vezetékkel, hanem közbeeső elágazási csomóponttal csatlakoznak egymáshoz (3.17. ábra).



3.17. ábra: Kondenzátorok párhuzamos kapcsolása

Párhuzamos kapcsolás esetén a feszültségforrás pólusai és az egyes kondenzátorok ugyanazon oldalon lévő fegyverzeteinek kivezetései *ekvipotenciális pontok*, ezért a kondenzátorok fegyverzetei között lévő feszültség azonos és megegyezik a feszültségforrás feszültségével.

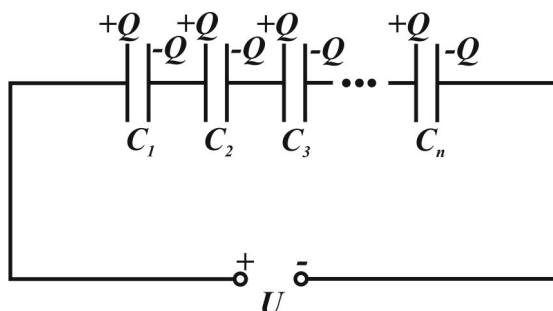
Ezért az eredő kapacitás:

$$C_e = \frac{\sum Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n}{U} = C_1 + C_2 + \dots + C_n,$$

az egyes kondenzátorok kapacitásának összege.

3.1.8.1.2. Sorosan kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitása

Soros kapcsolásról beszélünk akkor, amikor az egyes kondenzátorok fegyverzetei folytonos vezetékkel, közbeeső elágazási csomópont nélkül csatlakoznak egymáshoz (3.18. ábra).



3.18. ábra: Kondenzátorok soros kapcsolása

Soros kapcsolás esetén az egyes kondenzátorok fegyverzetén az elektromos *megosztás* miatt *ugyanakkora nagyságú* (fegyverzetenként $+Q$, illetve $-Q$) töltés alakul ki. A rájuk eső feszültségek összege az *energiamegmaradás* törvénye szerint megegyezik a feszültségforrás által biztosított U feszültséggel:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n,$$

ahonnan $C = \frac{Q}{U}$ -ből $U = \frac{Q}{C}$ alkalmazásával:

$$\frac{Q}{C_e} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n},$$

és ebből az eredő kapacitásra

$$\boxed{\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}}$$

összefüggést kapunk.

3.14. Példa: Az elektromos mező energiája és energiasűrűsége

Határozzuk meg síkkondenzátor esetén a két A felületű és $+Q$ és $-Q$ töltéssel rendelkező fém fegyverzet közötti teljes elektromos mezőben és az egységnyi térfogatban tárolt elektromos energiát (energiasűrűséget)!

Megoldás:

Ha a két lemezt egymástól d távolságra elmozdítjuk, akkor W munkát végzünk. Ez a végzett munka az energiamegmaradás törvénye értelmében a kondenzátorban tárolt E_C elektromos energia tárolására fordítódik. Vagyis:

$$W = E_C = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_e d = QEd.$$

A töltött síklap elektromos térerősségére 3.10. Példa szerint kapott összefüggést felhasználva:

$$E_C = Q \frac{Q}{2A\epsilon_0} d = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{\epsilon_0 \frac{A}{d}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}.$$

Mivel $C = \frac{Q}{U}$, ezért $E_C = \frac{1}{2} \cdot QU = \frac{1}{2} CU^2$ is igaz.

A w_C energiasűrűség számértékileg az egységnyi térfogatban tárolt energiával egyezik meg:

$$w_C = \frac{E_C}{V} = \frac{\frac{1}{2} CU^2}{V} = \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A}{d} (Ed)^2}{Ad} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2. \clubsuit$$

Megjegyzés:

E_C -vel elektromos energiát jelöltük. Nem keverendő össze az egyenlet jobb oldalán megjelenő E elektromos térerősséggel!

3.15. Példa: Síkkondenzátor fegyverzeteinek megváltozása

Síkkondenzátoron lévő Q töltést állandó értéken tartva a lemezek d távolságát megkétszerezjük. Hogyan változik a kapacitás, a lemezek közötti feszültség és az elektromos mező energiája

Megoldás:

Az eddigiek alapján a kezdeti kapacitás:

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{A}{d},$$

ami a távolság megkétszerezésével:

$$C_2 = \varepsilon_0 \frac{A}{2d} = \frac{C_1}{2}$$

a *felére csökkent*. A fegyverzetek közötti feszültség kezdetben:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1},$$

ami távolítás után:

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = 2U_1,$$

lett, vagyis a *kétszeresére nőtt*. A fegyverzetek között tárolt elektromos energia kezdeti értéke

$$E_{C1} = \frac{1}{2} QU_1,$$

és széthúzás után:

$$E_{C2} = \frac{1}{2} QU_2 = 2E_{C1},$$

értéke tehát a *kétszeresére nőtt*.

A kondenzátor energiájának növekedése a lemezek széthúzása közben befektetett mechanikai munka következménye.♣

3.1.9. A piezoelektromosság

Egyes kristályok (kvarc, turmalin stb.) kristályszerkezetüknel fogva olyan tulajdonságokkal rendelkeznek, hogy megfelelő deformációk esetén határfelületeiken polarizációs *felületi töltéssűrűség* alakul ki, a deformáló erő irányának megváltozásakor pedig előjelet változtatnak. Ez a jelenség a direkt piezoelektromosság. A kristályt kondenzátor lemezei közé helyezve a kondenzátoron feszültség mérhető. Ezen az elven működnek például a kristálmikrofon és nyomásmérők.

A jelenség fordítottja a *reciprok piezoelektromosság*. Elektromos mezőbe (kondenzátorelemek közé) helyezett piezoelektromos kristály feszültség bekapcsolása hatására alakváltozást szenved. Egyetlen Δ szélességű, négyszög alakú feszültségimpulzus Fourier transzformáltja egy adott sáv szélességben folytonosan tartalmaz minden frekvenciát, így a kristály rezonancia-frekvenciáját is. Egy ilyen feszültségimpulzus hatására a piezoelektromos kristály tehát rezgésbe jön, amelynek a frekvenciája a kristály vastagságától függ, ezért például *ultrahangok* kibocsátására is alkalmas.

3.2. Töltések áramlása, elektromos áramok

3.2.1. Az elektromos áram

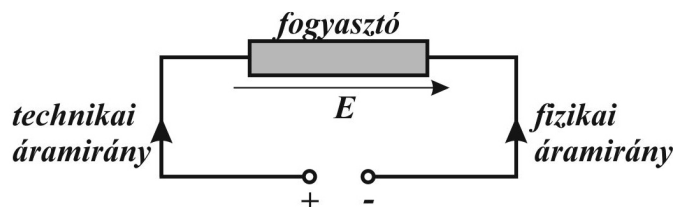
A töltések egyirányú mozgását *elektromos áramnak* nevezzük. A gyakorlatban a töltések (elektronok, ionok) sokaságának rendezett mozgását nevezzük elektromos áramnak. Fémes vezetékben az áramot csak elektronok mozgása hozza létre, mert a fémek könnyen elmozdítható (helyhez nem kötött) elektronokat tartalmaznak.

A töltésmozgás, vagyis az elektromos áram a vezető két pontja közötti elektromos mezőt jellemző feszültséggel kapcsolatos. Az elektromos mező gyakorol mozgató erőt a vezető töltéseire. Azt a berendezést, amely a vezető két pontja között elektromos mezőt, illetve az azt jellemző feszültséget hoz létre *áramforrásnak* nevezzük.

Megjegyzés:

A *feszültségforrás* elnevezés is helyénvalónak tekinthető. Az elektrotechnikában azonban megkülönböztetik a feszültséggenerátort az áramgenerátortól.

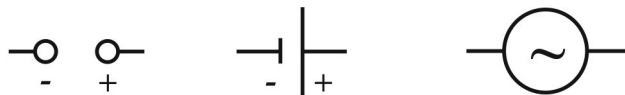
Az áramforrás azon sarkát (pólusát), ahol elektrontöbblet van, negatívnak, ahol elektronhiány van, pozitívnak nevezzük. Mivel a két pólus közötti elektromos mező a pozitív töltésből indul ki és a negatív töltésben végződik, ezért az áramforrás elektromos mezőjének térerőssége a pozitív pólustól a negatív pólus felé mutat. Zárt áramkör esetén *negatív töltésű elektronok* a negatív pólustól a pozitív pólus felé mozognak, ezt *fizikai áramiránynak* nevezzük (3.19. ábra).



3.19. ábra: Fizikai és technikai áramirány

Történelmi és gyakorlati okokból a *pozitív töltések* mozgási irányát nevezzük *technikai áramiránynak*. A kétféle áramirány egymással ellentétes, nagyságuk megegyezik, a kettő egymással ekvivalens. Mi a továbbiakban a technikai áramirányt fogjuk használni.

Az áramforrások valamilyen energiát alakítanak át elektromos energiává: mechanikai energiát generátorok, kémiai energiát galvánelemek, akkumulátorok, fényenergiát fényelemek, hőtermoelemek stb. Állandó elektromos áram csak zárt áramkörben folyhat, melynek elemei: az áramforrás, a fogyasztó (amelyek az elektromos energiát más energiává pl. hővé, fénné, mechanikai stb. alakítják) és az összekötő vezeték (melyek csak ideális esetben nem fogyasztanak elektromos energiát). Az áramforrások szokásos technikai jelölései:



egyenfeszültségű áramforrás *kémiai áramforrás* *váltakozó feszültségű áramforrás*

3.20. ábra: Áramforrások jelölései

A vezető belsejében az elektromos mező a töltésekre $\vec{F}_e = Q\vec{E}$ elektromos erőt gyakorol. Fémes vezetőben a rugalmas erőkkel helyhez kötött pozitív töltések a fémrácsban nem tudnak elmozdulni (rezgőmozgásuktól eltekintve), az elektronok viszont viszonylag szabadon mozoghatnak. Az elektronokat az elektromos mező a térerősséggel ellentétes irányban gyorsítja mindaddig, amíg a helyhez kötött pozitív ionokkal nem ütköznek. Ezáltal a sebességük kissé lecsökken, a mozgási energia csökkenés hővé alakul, majd újra gyorsulnak a következő ütközésig. Sok elektront vizsgálva a vezetékben megmutatható, hogy azok egy $\langle v \rangle$ átlagos sebességre tesznek szert, melynek nagysága fémekben hozzávetőleg $1,8 \frac{m}{h}$. Az ionokból álló rács-szerkezet tehát az elektronok mozgását valamelyest akadályozza, a mozgással szemben *ellenállást* fejtenek ki. Az elektronok egymással való ütközése az ionokkal való ütközéshez képest elhanyagolható hatású. Az így „elvesző” energiát az áramforrás pótolja, vagyis energiát ad át az áramkörnek (pl. a galvánelemek idővel lemerülnek, nagyon lecsökken a töltésszétválasztó hatásuk). Az elektromos áramot – mint töltésmozgást – az áramerősséggel és az áramsűrűséggel jellemezzük.

3.2.1.1. Áramerősség

Az I áramerősség a vezető teljes keresztmetszetén átáramló Q töltésmennyiség és az ehhez szükséges t idő hányadosa. Ha a töltésáramlás az időben állandó, akkor

$$I = \frac{Q}{t},$$

és *egyenáramról* beszélünk, SI-beli mértékegysége $\frac{C}{s} = A$ (amper). Számértéke megmutatja a vezető teljes keresztmetszetén egységnyi idő alatt átáramló töltést. A *változó erősségű* elektromos áramot i betűvel jelöljük. Ha töltésáramlás nem egyenletes, akkor a Δt rövid időszakra vonatkoztatott átlagos áramerősség:

$$\langle i \rangle = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Ennek határértékeként kapjuk a *pillanatnyi áramerősséget*:

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}(t).$$

3.2.1.2. Áramsűrűség

Ha az áramló töltéeloszlás a vezető teljes A keresztmetszetében a haladás irányra merőlegesen azonos, akkor a J áramsűrűsége a

$$J = \frac{I}{A}$$

hányadost értjük, amelynek számértéke megmutatja a vezető egységnyi keresztmetszetén egységnyi idő alatt átáramló töltésmennyiséget. SI-beli mértékegysége: $\frac{A}{m^2}$.

Ha a töltésáramlás a keresztmetszet mentén nem egyenletesen oszlik el, akkor egy adott *pontbeli áramsűrűség* az előző mintájára:

$$J = \frac{dI}{dA}.$$

3.2.2. Az Ohm-törvény homogén vezetőre és az elektromos ellenállás

3.2.2.1. Az elektromos ellenállás

Georg Simon OHM vizsgálatai szerint a fogyasztóra jutó U feszültség és a rajta átfolyó áram I erőssége egyenesen arányosak, azaz hányadosuk állandó, amelyet R -rel jelölünk és a fogyasztó *elektromos ellenállásának* nevezzük:

$$R = \frac{U}{I}.$$

Az ellenállás SI-beli mértékegysége: $\frac{V}{A} = \Omega$ (ohm).

Az $\frac{1}{R} = G$ mennyiséget *elektromos vezetésnek* nevezzük, SI-beli mértékegysége: $\frac{1}{\Omega} = S$ (siemens). Az ellenállás és az elektromos vezetés nem a töltésáramlást előidéző elektromos mennyiségektől, hanem a töltések mozgását biztosító anyagra (vezetékre, fogyasztóra) jellemző mennyiség. Már jeleztük, hogy a töltések mozgását az áramkörben a vezetékek, de leginkább a fogyasztók, kisebb-nagyobb mértékben akadályozzák. Az ideális vezeték olyan, amelyiknek nincs ilyen akadályozó hatása, ilyenek például a *szupravezetők*.

A tapasztalat szerint az l hosszúságú, A keresztmetszetű homogén anyag (vezeték, huzal) R ellenállása arányos a vezeték hosszával és fordítottan arányos a keresztmetszetével. Kiszámítása:

$$R = \rho \frac{l}{A},$$

ahol a ρ anyagra jellemző arányossági együttható, az ún. fajlagos ellenállás, melynek SI-beli mértékegysége: Ωm (a gyakorlatban $\Omega \frac{mm^2}{m}$ használatos). Az ellenállás szót két dolog jellemzésére is használjuk:

- Az áramot vezető anyag azon tulajdonsága, hogy az elektromos töltések áramlásával szemben ellenállást fejt ki.
- Az áramkörben lévő R ellenállású fogyasztót szintén röviden ellenállásnak nevezzük.

A fajlagos ellenállás reciproka a fajlagos vezetés (konduktancia):

$$\gamma = \frac{1}{\rho},$$

melynek SI-beli mértékegysége: $\frac{1}{\Omega m} = \frac{S}{m}$.

Megjegyzések:

1. Az elmondottakból következtethető, hogy az ellenállás hőmérsékletfüggő (gondoljunk az ionok hőmozgására, rezgésére). A tapasztalat szerint egy adott T hőmérsékleten az elektromos ellenállás:

$$R_T = R_0 [1 - \alpha (T - T_0)],$$

ahol R_0 a T_0 hőmérsékleten mérhető ellenállás, α anyagi állandó, ellenállás hőmérsékleti együttható, melynek SI-beli mértékegysége: $\frac{1}{K} = \frac{1}{^\circ C}$. Az ellenállás hőmérsékletfüggésének felhasználásával lehet hőmérőt készíteni.

2. A kémiában az elektrolitok Λ_m moláris fajlagos vezetésén (moláris konduktivitásán) a $\Lambda_m = \frac{\gamma}{c}$ hányadost

értjük, ahol c az anyagmennyiség-koncentráció: $c = \frac{n}{V}$. SI-beli mértékegysége: $\frac{Sm^2}{mol}$.

3.2.3. Összetett áramkörök, a Kirchhoff-törvények

3.2.3.1. Kirchhoff I. törvénye

Összetett áramkörben (hálózatban) több fogyasztó (ellenállás) és több áramforrás is lehet. Kettőnél több vezeték találkozási pontját csomópontnak nevezzük. A *töltésmegmaradás* törvényének következménye **Kirchhoff I. törvénye**, vagy ún. *csomóponti törvény*, amely azt mondja ki, hogy:

„A csomópontba befolyó áramok erősségének összege egyenlő a csomópontból kifolyó áramok erősségének összegével.”

Azaz matematikailag:

$$\sum I_{be} = \sum I_{ki} .$$

Ha a befolyó áramok erősségét + előjellel, a kifolyó áramok erősségét pedig – előjellel látjuk el, akkor Kirchhoff I. törvénye

$$\boxed{\sum I = 0}$$

alakban is felírható.

3.2.3.2. Kirchhoff II. törvénye

A csomópontok közötti áramkörszakaszt ágának nevezzük. Az ágakból felépülő zárt körök a hurkok. **Kirchhoff II. törvénye**, vagy ún. *huroktörvény* az *energiamegmaradás* törvényét fejezi ki, és azt mondja ki, hogy:

„A zárt áramkörben (hurokban) az áramforrások U feszültségeinek összege egyenlő az ellenállásokra (fogyasztókra) jutó U_R feszültségek összegével.”

Vagyis matematikailag:

$$\sum U = \sum U_R .$$

Az áramforrások feszültségének előjelét az elektromos terük irányával hozzuk összefüggésbe. Mivel az elektromos térerősség a pozitív pólustól a negatív pólus felé mutat, ezért a feszültséget is a pozitív pólustól a negatív pólus felé irányítottnak tekintjük, de ne felejtjük el, hogy skalár fizikai mennyiség. A fogyasztóra jutó feszültséget akkor tekintjük pozitívnak, ha az elektromos áram rajta az általunk önkényesen kijelölt pozitív körüljárási iránnyal megegyező irányban folyik, ellenkező esetben negatívnak. Mindezt figyelembe véve Kirchhoff II. törvénye

$$\boxed{\sum U = 0}$$

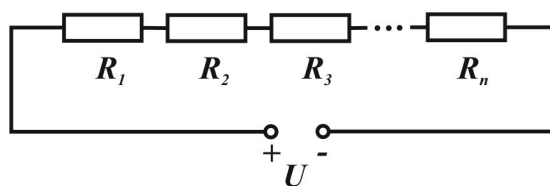
alakban is felírható.

3.2.4. Fogyasztók kapcsolása

Fogyasztók kapcsolása esetén a fogyasztók helyettesíthetők egyetlen R_e eredő ellenállással, amely esetén ugyanakkora nagyságú elektromos áram folyik az áramkörben. A fogyasztókat a kondenzátorokhoz hasonlóan lehet *sorosan* és *párhuzamosan* kapcsolni.

3.2.4.1. Soros kapcsolás

A fogyasztók áram-elágazási csomópont nélküli kapcsolását *soros kapcsolásnak* nevezzük (3.21. ábra). A sorba kapcsolt fogyasztók ellenállása helyettesíthető egyetlen eredő ellenállással, melynek használatakor ugyanakkora erősségű áram indul ki az áramforrásból.



3.21. ábra: Fogyasztók soros kapcsolása

Az R_e eredő ellenállásra jutó feszültség ekkor Ohm törvényének felhasználásával:

$$U = IR_e.$$

Kirchhoff I. törvénye értelmében az áram-elágazási csomópont nélküli soros kapcsolású fogyasztók mindegyikén ugyanakkora I erősségű áram halad át, valamint Kirchhoff II. törvénye szerint az egyes ellenállásokra jutó feszültségek összege megegyezik az áramforrás feszültségével:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_n.$$

Ezt összevetve az előző eredménnyel azt kapjuk, hogy soros kapcsolás esetén a fogyasztók eredő ellenállása az egyes ellenállások összege:

$$R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n.$$

3.16. Példa: Feszültségosztó összefüggések

Számítsuk ki az U feszültségű áramforrással ellátott áramkörben két soros kapcsolású, R_1 és R_2 ellenállású fogyasztóra jutó feszültségeket!

Megoldás:

Két sorba kapcsolt fogyasztó esetén az eredő ellenállás:

$$R_e = R_1 + R_2,$$

ezért az áramerősség Ohm törvénye alapján:

$$I = \frac{U}{R_e} = \frac{U}{R_1 + R_2}.$$

Az egyes fogyasztókra jutó feszültségek ezért:

$$U_1 = IR_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2},$$

és

$$U_2 = IR_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

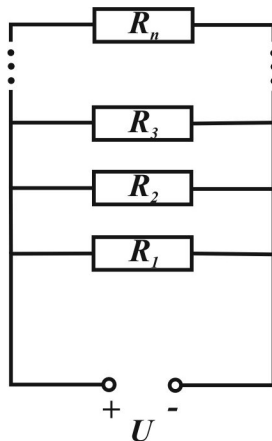
Ez utóbbiak az ún. *feszültségosztó összefüggések*. Emiatt az egyes ellenállásokra jutó feszültségek aránya:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Soros kapcsolás esetén tehát az áramforrás U feszültsége a fogyasztók között az ellenállások arányában oszlik meg. Vegyük észre, hogy Kirchhoff II. törvénye miatt $U = U_1 + U_2$ is teljesül.♣

3.2.4.2. Párhuzamos kapcsolás

Párhuzamos kapcsolásról beszélünk akkor, amikor az egyes fogyasztók kivezetései közbeeső áramelágazási csomóponttal csatlakoznak egymáshoz (3.22. ábra).



3.22. ábra: Fogyasztók párhuzamos kapcsolása

A párhuzamosan kapcsolt fogyasztók ellenállása szintén helyettesíthető egyetlen eredő ellenállással. Ekkor az áramforrás adott oldalon lévő pólusa és a fogyasztók ugyanazon oldalon lévő kivezetései *ekvipotenciális pontok*, ezért a fogyasztókra jutó feszültségek ugyanakkora nagyságúak és megegyeznek az áramforrás feszültségével.

A sorba kapcsolt fogyasztók ellenállását helyettesítő R_e *eredő ellenállású* fogyasztón átfolyó áram erőssége az Ohm-törvény felhasználásával:

$$I = \frac{U}{R_e}.$$

Kirchhoff I. törvénye szerint az áramforrás kivezetése után közvetlenül található ágban (a továbbiakban: főágban) folyó áram erőssége megegyezik a mellékágakban folyó áramok erősségének összegével:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n}.$$

Ezt összevetve az előző eredménnyel azt kapjuk, hogy párhuzamos kapcsolás esetén a fogyasztók eredő ellenállásának reciproka az egyes ellenállások reciprokainak összegével egyenlő:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

3.17. Példa: Áramosztó összefüggések

Számítsuk ki az U feszültségű áramforrással ellátott áramkörben két párhuzamos kapcsolású, R_1 és R_2 ellenállású fogyasztókon átfolyó áram erősségét!

Megoldás:

Két sorba kapcsolt fogyasztó esetén az eredő ellenállás reciproka:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

ahonnan az eredő ellenállás:

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

A főágban folyó áram erőssége az eredő ellenállás felhasználásával:

$$I = \frac{U}{R_e} = U \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2},$$

ahonnan a feszültség felírható

$$U = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

alakban is.

Az egyes fogyasztókon átfolyó áramok erőssége ezért:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = I \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

és

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

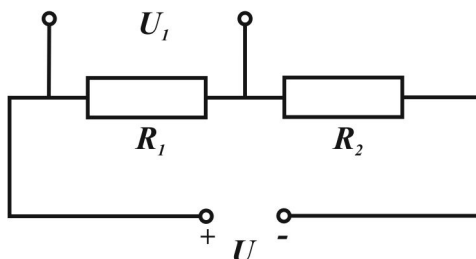
Ez utóbbiak az ún. *áramosztó összefüggések*. Emiatt az egyes ellenállásokon átfolyó áramok aránya:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Párhuzamos kapcsolás esetén tehát a főágban folyó áram I erőssége a fogyasztók között az ellenállások fordított arányában oszlik meg. Vegyük észre, hogy Kirchhoff I. törvénye miatt $I = I_1 + I_2$ is teljesül.♣

3.2.4.3. Vegyes kapcsolás

Összetettebb áramkörökben soros és párhuzamos kapcsolások kombinációjával is találkozunk. Az ilyen kapcsolásokat *vegyes kapcsolásnak* nevezzük. Egy ilyen alkalmazás például a terhelt feszültségosztó potenciométerrel. *Potenciométert* úgy készítünk, hogy két, egymással sorba kapcsolt ellenállás közül az egyiket kivezetéssel látjuk el (3.23. ábra):

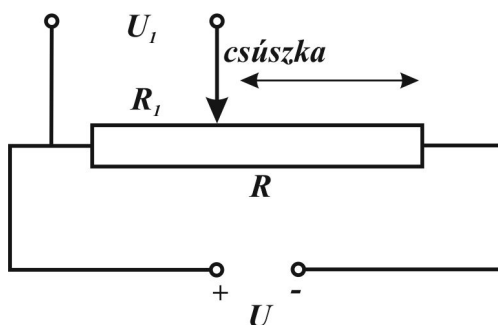


3.23. ábra: Terheletlen potenciométer

Ekkor a kivezetéseken az előbbieik alapján az áramforrás U feszültségénél kisebb

$$U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

nagyságú feszültség mérhető. A potenciométer ennél kényelmesebben használható változata, ha R_1 csúszkával folytonosan változtatható a 3.24. ábra szerint:



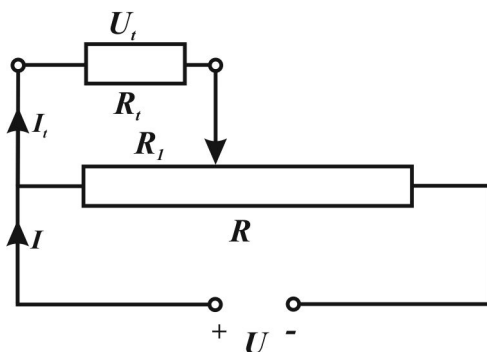
3.24. ábra: Terheletlen potenciométer csúszkával

Ekkor a kivezetéseken mérhető

$$U_1 = U \frac{R_1}{R}$$

feszültség a csúszka tologatásával folyamatosan változtatható, és ezért $0 \leq U_1 \leq U$ között *tetszőlegesen beállítható* (terheletlen potenciométer).

Ha a leosztott feszültséget fel akarjuk használni egy R_t ellenállású *terhelő fogyasztó* táplálására (terhelt potenciométer), akkor a helyzet bonyolultabb (3.25. ábra).



3.25. ábra: Terhelt potenciométer

Vegyük észre, hogy R_1 és R_t egymással *párhuzamosan* vannak kapcsolva, míg eredőjük az R ellenállásnál kisebb $R - R_1$ ellenállással *sorosan*. Most a leosztott feszültség:

$$U_t = U \frac{\frac{R_1 R_t}{R_1 + R_t}}{\frac{R_1 R_t}{R_1 + R_t} + (R - R_1)}$$

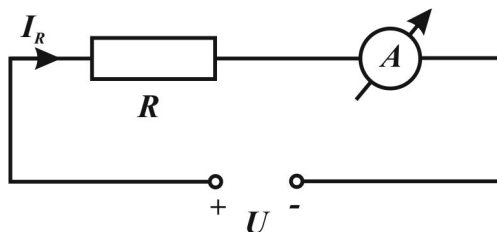
Levezethető, hogy $R_t \rightarrow \infty$ esetén az ún. *üresjárási állapotot* kapjuk vissza. Itt is igaz, hogy a csúszka állásától függően, és ugyanazon beállítás esetén a terhelt állapotban mért U_t feszültség kisebb, mint a terheletlen állapotban mért érték.

Megjegyzés:

A fent tárgyalt potenciométer folyamatosan szabályozható, ún. *lineáris potenciométer*, mert a csúszka eltolásával arányosan változik ellenállásának szétosztása. Vannak nemlineáris potenciométerek (pl. logaritmikus), ahol a csúszka mozgatásával az ellenállás szétosztása nem arányos, hanem valamilyen függvény szerinti. A hangerő-szabályozók általában *logaritmikus potenciométerek*.

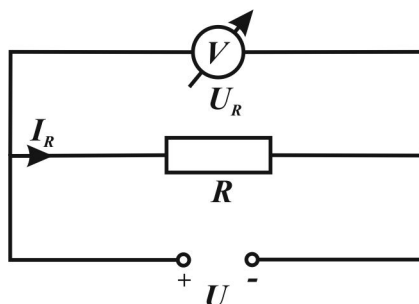
3.2.5. Áramerősség- és feszültségmérő műszerek

A fogyasztón átfolyó áram erősségét a fogyasztóval sorba kapcsolt *ampermérővel* lehet megmérni, hogy a fogyasztóval azonos ágban folyó áramerősséget mérjük. Ehhez az áramkört előbb meg kell szakítani, hogy a műszer beköthető legyen. Az ideális ampermérő saját (belső) ellenállása nulla, hogy az ampermérőt is tartalmazó áramkörben folyó áram erősségét ne változtassa meg (3.26. ábra):



3.26. ábra: Áramerősség mérés ampermérővel

A feszültséget a fogyasztóval párhuzamosan kapcsolt *voltmérővel* lehet megmérni, ehhez az áramkört nem kell megszakítani. Az ideális voltmérő saját (belső) ellenállása végtelen nagy, hogy rajta keresztül ne folyjon áram (3.27. ábra):



3.27. ábra: Feszültségmérés voltmérővel

3.2.6. Az egyenáram munkája és teljesítménye

3.2.6.1. Az egyenáram munkája, a Joule-féle hő

Az U feszültségű elektromos mező a Q töltésen $W = QU$ munkát végez. Alkalmazva a $Q = It$ összefüggést

$$\boxed{W = UIt}$$

adódik. Az Ohm-törvény felhasználásával az I egyenáram munkája az R ellenállású fogyasztón

$$W = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t$$

alakban is felírható.

A munkatörvény értelmében az R ellenállású fogyasztóban mozgó szabad töltéshordozók az elektromos mező hatására *mozgási energiára* tesznek szert, mozgásuk során azonban a rácsonokkal való gyakori ütközéseik során a nyert kinetikus energiát folyamatosan le is adják. Ennek következtében a *fogyasztó belső energiája nő* (melegsik), majd leadja a környezetének. A belső energia növekedése addig tart, amíg a fogyasztó által leadott hő, az ún. *Joule-féle hő* meg nem egyezik a elektromos mező által keltett elektromos áram munkájával. A fogyasztóban keletkező **Joule-féle hő** is tehát:

$$\boxed{Q = UIt = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t}.$$

Ez az elektromos áram *hőhatásában* nyilvánul meg. Látható, hogy nagy I áramerősség mellett a négyzetes arányosság miatt igen nagy Joule-féle hő termelődhet, ami káros lehet az energiaszállítás szempontjából (pl. távvezetékeknél), de hasznos az elektromos áram hőhatásának kihasználása szempontjából (pl. fűtőtesteknél).

3.2.6.2. Az egyenáram teljesítménye

A teljesítmény a munka és az idő hányadosa, ezért az U feszültségű és R ellenállású fogyasztón átfolyó I erősségű egyenáram teljesítménye:

$$P = \frac{W}{t} = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R} .$$

3.18. Példa: Egyenáram teljesítménye

Számoljuk ki egy 230 V-os áramforrásra kötött, egymással sorba kapcsolt, a 230 V feszültségen 100 W-ot fogyasztó izzó valamint az 5 V feszültségen 5 W-ot fogyasztó zseblámpaizzó által felvett teljesítményt!

Megoldás:

Az egyes izzók ellenállása az alapadataikból:

$$R_1 = \frac{U^2}{P_1} = 529 \, \Omega , \text{ és } R_2 = \frac{U^2}{P_2} = 5 \, \Omega .$$

Az áramkörben folyó áram erőssége:

$$I = \frac{U}{R_e} = \frac{U}{R_1 + R_2} = 0,43 \, A .$$

Innen a felvett teljesítmények:

$$P_1 = I^2 R_1 = 97,8 \, W ,$$

és

$$P_2 = I^2 R_2 = 0,95 \, W$$

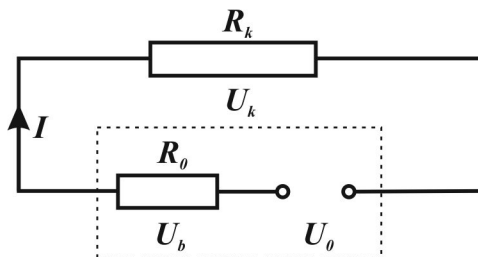
A 100 W-os izzó szinte teljes fényerővel világít (97,8 W) míg a zseblámpaizzó alig világít (0,95 W). Tehát a zseblámpaizzó élettartama szinte végtelenre nő és a tőle nagy távolságban (vagy nem látható helyen) lévő fogyasztóhoz kontrollként alkalmazható.♣

3.2.7. A zárt áramkörre vonatkozó Ohm-törvény

Az *ideális áramforrás* ún. *belső ellenállása* (R_b) *zérus*. A valóságos áramforrásnak azonban van saját belső ellenállása, amin szintén átfolyik ugyanaz az elektromos áram, amit az áramforrás szolgáltat a külső fogyasztók felé. A *valóságos áramforrást* ezért célszerű egy ideális U_0 feszültséget szolgáltató ideális áramforrás és egy vele sorba kapcsolt R_b belső ellenállás együtteseként kezelni. Az U_0 ún. *üresjárási feszültség* az áramforrás sarkai között terheletlen állapotban olyan voltmérővel mérhető, amelynek ellenállása végtelen nagy, vagyis a feszültségmérés során áram nem folyik rajta keresztül.

Ha egy valóságos áramforrása R_k *külső ellenállású* fogyasztót kapcsolunk, akkor az áramkörben áram folyik és az áramforrás sarkain mérhető feszültséget U_k *kapocsfeszültségnek*

nevezzük. Az U_k kapocsfeszültség kisebb az áramforrás üresjárási feszültségénél és az R_k külső ellenállás függvénye (3.28. ábra).



3.28. ábra: Kapcsolás valós áramforrással

Az ábra alapján a zárt áramkörre vonatkozó Ohm-törvény matematikailag:

$$I = \frac{U_0}{R_e} = \frac{U_0}{R_k + R_b}.$$

Innen az R_k és R_b ellenállásokra jutó feszültségek:

$$U_k = IR_k = U_0 \frac{R_k}{R_k + R_b} < U_0,$$

a kapocsfeszültség, és az áramforrásra jutó belső feszültség pedig:

$$U_b = IR_b = U_0 \frac{R_b}{R_k + R_b} < U_0.$$

Természetesen Kirchhoff II. törvénye miatt $U_0 = U_k + U_b$ itt is teljesül.

Megjegyzések:

Látható, hogy R_k és R_b aránya erősen befolyásolja az áramköri viszonyokat.

1. Ha $R_b \gg R_k$, akkor $I \approx \frac{U_0}{R_b} = \text{állandó}$ (áramgenerátor).
2. Ha $R_b \ll R_k$, akkor $I \approx \frac{U_0}{R_k}$, és $U_k \approx U_0 = \text{állandó}$ (feszültséggenerátor).
3. Ha $R_k = 0$, akkor $I_{\max} = \frac{U_0}{R_b}$ az ún. rövidzárási áramerősség, ami az áramforrásra nézve kedvezőtlen, mert az áramforrás erősen felmelegszik, ami gyors tönkremenetelét okozhatja.

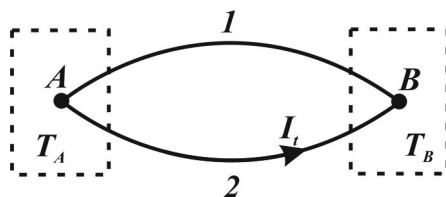
3.2.8. Termoelektromos jelenségek

3.2.8.1. Seebeck-effektus

Ha az 1 és 2 két különböző anyagi minőségű fém, A és B érintkezési pontjaik között pedig T_A és T_B hőmérsékletkülönbség van, akkor az áramkörben I_t erősségű *termoáramot* mérhetünk, amely

$$U_t = I_t R_t$$

termofeszültséget hoz létre (3.29. ábra).



3.29. ábra: Seebeck-effektus

A gyakorlatban használt fém pároknál (réz–konstantán, ródiom–platina–platina) ez a feszültség viszonylag széles hőmérsékleti intervallumban arányos a hőmérséklet-különbséggel:

$$U_t \sim (T_A - T_B).$$

A termoelem energiaforrásként nagyon korlátozottan, de *hőmérőként* kiválóan alkalmazható. Ehhez az egyik pontját állandó hőmérsékleten kell tartani (pl. termosztátba helyezni). A termoáram erősségét mérő műszert közvetlenül hőmérésre lehet kalibrálni (hitelesíteni).

3.2.8.2. Peltier-effektus

Az előző effektus inverze (megfordítása). Ha két különböző vezető érintkezési pontján I erősségű áram halad át, akkor az áram irányától függően az érintkezési pont lehűl vagy felmelegszik. Gyakorlatban kis tömegű minták hűtésére szokták alkalmazni, akár mikroszkópizálás közbeni állandó hőmérséklet tartására is alkalmas.

3.3. Magnetosztatika

3.3.1. Mágneses alapjelenségek

A *Magnetosztatika* az időben állandó *mágneses mező* tulajdonságait vizsgálja. Időben állandó mágneses mezője van a permanens (állandó) mágneseknek (rúd-mágnes, patkómágnes) és az egyenáramoknak, amelyekkel az előző fejezetben foglalkoztunk.

Az elektromos és mágneses jelenségek lényege évezredekre visszamenőleg nem volt ismeretlen, és a kettő között sok hasonlóságot fedeztek fel. Ezért az Elektrosztatika analógiájára dolgozták ki a Magnetosztatika törvényeit is (pl. mágneses „Coulomb-törvény”). A mágnesrúd az erőhatás szempontjából úgy viselkedik, mint az elektromos dipólus, ezért célszerű volt két különböző, a Föld mint mágnes analógiájára *E*-i és *D*-i mágneses pólus bevezetése. Az elektromos és a mágneses pólusok között van azonban alapvető fontosságú különbség is: az elektromos dipólus pozitív és negatív töltései szétválaszthatók, de a mágnesrúd szétदारabolásával mindig teljes, kétpólusú mágnes – dipólust – kapunk, azaz valódi *mágneses monopólusok nincsenek*.

A mágnes közelébe helyezett vastárgy is mágnesként viselkedik (vonzza a másik vastárgyat), ez a *mágneses megosztás* jelensége. Ez azzal magyarázható, hogy a vasban rendezetlen mágneses tartományok vannak, amelyek a külső hatására rendeződnek és így kétpólusú mágnesként (dipólusként) viselkednek. A vasnak a mágneshez közeli oldalán a mágnesével ellentétes pólus alakul ki, ezért mindig vonzóhatást tapasztalunk. Ha a mágneset eltávolítjuk, akkor a vasban a rendezettség hőszugárzás kibocsátásával megszűnik, visszaáll az eredeti rendezetlen állapot, azaz a vas, főként a lágyvas elveszíti mágnességét. Az acél viszont részben megőrzi a rendezettségét és állandó mágnessé válik.

A mágneseknek azokat a helyeit, ahol a mágneses erőhatás a legerősebb, *mágneses pólusoknak* nevezzük, az egyes pólusok erőhatása megegyezik. Az egynemű mágneses pólusok taszítják, a különneműek vonzzák egymást. A mágnesek körül kialakult mágneses mezőt érzékelteni lehet vasreszelékkel, amelyek a megosztás révén kicsiny mágnesként viselkednek.

A mágnesség érdemi magyarázata (és vizsgálata) akkor kezdődött, amikor 1820-ban Hans Christian OERSTED kimutatta, hogy az *elektromos áramnak* (mozgó töltéseknek) *mágneses mezője van*. Ezt követte André-Marie AMPÉRE azon feltételezése, hogy a mágneses anyagokban molekuláris köráramok vannak, amelyek rendeződése a makroszkopikus mágnesség okozója. Ezt követően a Bohr-féle atommodell ismeretében feltételezték, hogy ezeket a köráramokat az atommag körül *keringő elektronok* hozzák létre. Ez az elektronok pályamozgására alapozott magyarázat azonban nem egyezett a tapasztalattal. Mai tudásunk szerint a – jóval később felfedezett – elektronspin (elektron saját impulzusmomentuma) által keltett mágneses mező szerepe a döntő a mágnesség magyarázatában.

Megjegyzés:

Egyes az atommagoknak is van mágneses hatása, ami nagyságrendekkel kisebb az elektronokénál.

3.3.2. A mágneses mező jellemzése

3.3.2.1. A mágneses indukció

A tapasztalat szerint a mágneses mező csak mozgó töltésekre fejt ki erőt (az elektromos mező nyugvó és mozgó töltésekre is fejt ki erőt). Ez az erő mindig merőleges a töltés sebességvektorára, és maximális értéke arányos a Q töltéssel, és a v sebességgel:

$$F_{max} \sim Qv,$$

illetve

$$F_{max} = QvB,$$

ahol a B arányossági együttható a mágneses mező adott pontjára jellemző vektormennyiség, a mágnes indukció, jele \vec{B} , SI-beli mértékegysége pedig $\frac{N}{C \cdot \frac{m}{s}} = \frac{V \cdot s}{m^2} = T$ (tesla).

A Föld felszínén a mágneses indukció nagysága $30 - 60 \mu T$, míg az MRI berendezésekben általában szupravezető tekercsek használatával $1 - 10 T$ indukciójú mágneses mezőt hoznak létre.

Az indukciót definiáló egyenletben tehát három vektormennyiség (\vec{F} , \vec{v} , \vec{B}) szerepel. Ez csak úgy lehetséges, ha \vec{v} és \vec{B} vektoriális szorzatáról van szó, és ez eredményez vektort:

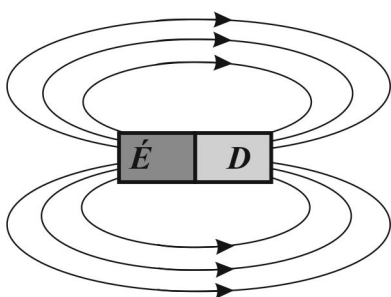
$$\boxed{\vec{F}_L = Q\vec{v} \times \vec{B}}.$$

Ezt az erőt mágneses **Lorentz-erőnek** nevezzük. \vec{B} iránya megállapodás szerint pozitív Q töltés esetén olyan, hogy \vec{v} , \vec{B} és \vec{F} úgy következnek egymás után, mint jobb kezünk merőlegesen tartott hüvelyk-, mutató- és középső ujja.

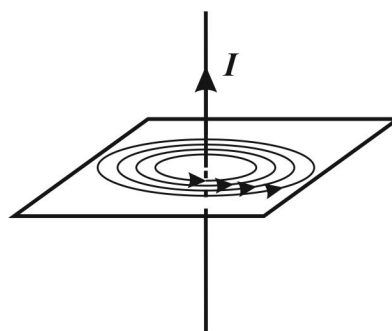
Ebből \vec{F}_L nagysága:

$$F_L = QvB \sin \alpha,$$

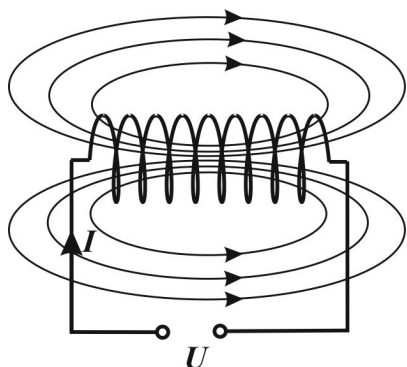
ahol α a \vec{v} és \vec{B} által bezárt szög. Az ábrákon néhány mágneses teret szemléltetünk indukcióvonalakkal:



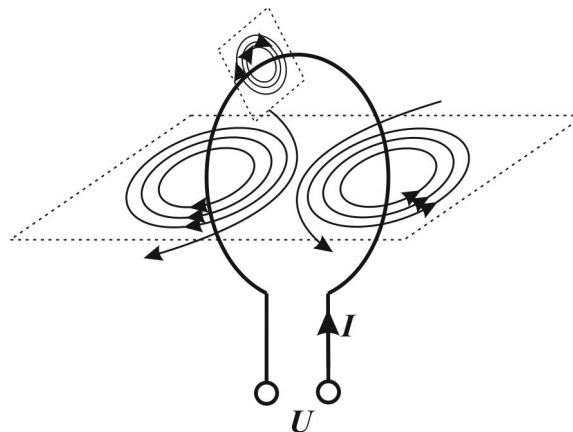
3.30. ábra: Rúdmágnes



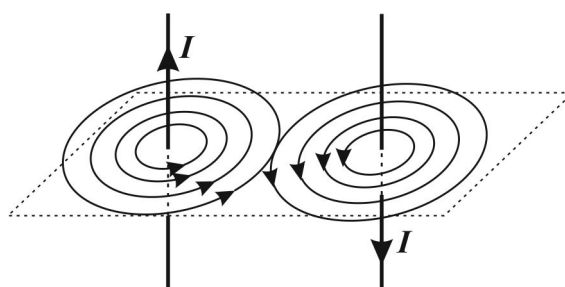
3.31. ábra: Egyenes áramvezető



3.32. ábra: Hengeres tekercs (szolenoid)



3.33. ábra: Köráram



3.34. ábra: Párhuzamos áramvezetők

(6. Video: [A mágneses mező szemléltetése](#))

3.3.2.2. A mágneses mező fluxusa

A *mágneses fluxust* az elektromos fluxushoz hasonlóan értelmezzük. Az A síkfelületre merőleges B indukciójú homogén mágneses mező Φ fluxusán a

$$\Phi = BA$$

szorzatot értjük. Ha \vec{B} az A síkfelület \vec{n} normálisával α szöget zár be, akkor a fluxus a \vec{B} felületi normális irányába eső komponensének és a felület nagyságának szorzata, vagyis a

$$\Phi = BA \cos \alpha = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

skaláris szorzat, amelyben $\vec{A} = A\vec{n}$, a *felületvektor*. A fluxus számértéke megmutatja az A felületen áthaladó mágneses indukcióvonalak számát. SI-beli mértékegysége: $T \cdot m^2 = V \cdot s = Wb$ (weber).

Inhomogén mágneses mezőben:

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

Mivel mágneses monopólusok nincsenek, így a mágneses mezőben tetszőleges zárt felületre vonatkozó mágneses fluxus, vagyis a *forráserősség* zérus:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0.$$

A fenti törvény, vagy a **mágneses Gauss-törvény** a **Maxwell** által egyesített elektromágneses elmélet **III. egyenlete**, amely vákuumban írja le a sztatikus mágneses mező fluxusát, vagy ún. *forráserősségét*. A törvény szavakban megfogalmazva:

„A sztatikus mágneses mező forrásmentes, a zárt felületbe ugyanannyi indukcióvonal lép be, mint amennyi kilép.”

3.3.3. Erőhatások mágneses mezőben

3.3.3.1. Ponttöltésre ható erő

A \vec{B} indukciójú mágneses mező csak mozgó töltésre fejt ki erőt abban az esetben, ha a Q töltés \vec{v} sebességének van \vec{B} irányára merőleges komponense. A \vec{B} -vel párhuzamoson mozgó töltésre nem hat mágneses erő.

Ha a \vec{B} mágneses indukció merőleges a töltés \vec{v} sebességére, akkor az \vec{F}_L erő mind a \vec{B} -re, mind a \vec{v} -re merőlegesen hat, és a töltés sebességének csak az irányát tudja megváltoztatni, nagyságát nem. A Mechanika c. részben láttuk, hogy a test sebességére minden pillanatban merőleges irányban ható erő a testet *körpályára* kényszeríti. Az egyenletes körmozgáshoz szükséges *centripetális erőt* jelen esetben a *Lorentz-erő* biztosítja. A dinamika alaptörvényét alkalmazva:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a},$$

ahonnan:

$$QvB = m \frac{v^2}{r},$$

amiből a körpálya sugara:

$$r = \frac{mv}{QB}.$$

A körülfutáshoz szükséges idő (periódusidő):

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \frac{m}{QB},$$

azaz független a ponttöltés sebességétől.

Megjegyzés:

Ha a \vec{B} mágneses indukció nem merőleges a töltés \vec{v} sebességére, akkor \vec{B} csak a sebesség merőleges komponensére fejt ki mágneses Lorentz-erőt, párhuzamos komponense nem változik, azaz a \vec{B} irányában a töltés egyenletes mozgást végez. Az eredő mozgás pályája egyenletes menetemelkedésű *hélix* lesz.

A mágneses mezőnek a mozgó töltésekre kifejtett erőhatásán alapuló eszközök, jelenségek:

- elektronmikroszkópok ún. „mágneses lencsái”,
- ciklotron részecskegyorsító,

- azonos töltésű, de különböző tömegű részecskék (ionok) szétválasztása tömegspektroszkópokban,
- katódsugárcsőekben az elektronok eltérítése,
- a Föld mágneses mezője által eltérített „napszél” elektromosan töltött részecskéinek a sarkok felé történő spirális mozgása, ami az északi fény jelenségét okozza.

3.3.3.2. Mágneses dipólusra ható forgatónyomaték mágneses mezőben

A természetben *mágneses monopólusok nem léteznek, minden mágnes dipólus*. Az elektromos dipólus momentumához hasonlóan bevezetjük a *mágneses momentumot*. A egymástól l távolságban lévő $+p$ (É) és $-p$ (D) póluserősséggel rendelkező dipólus mágneses momentumát az

$$\boxed{\vec{m} = p\vec{l}}$$

szorzattal jellemezzük. Iránya megállapodás szerint a $-p$ pólustól $+p$ pólus felé mutató \vec{l} vektorral megegyező. A $+p$ és $-p$ póluspárból álló mágneses dipólust *Coulomb-dipólusnak* nevezük.

Az I erősségű áram által átjárt, N menetből álló, A felületű vezetőkeret szintén mágnesként viselkedik, ún. *Ampère-dipólus*, melynek mágneses momentumának nagysága:

$$\boxed{m = INA},$$

A homogén sztatikus mágneses mező az elektrosztatikus mezőben lévő Q töltésre kifejtett $\vec{F}_e = Q\vec{E}$ elektromos erőhöz hasonlóan a mágneses dipólusra

$$\vec{F}_m^- = -p\vec{B}, \text{ és } \vec{F}_m^+ = +p\vec{B}$$

erőkből álló erőpárt, ezért *forgatónyomatékot* gyakorol, amikor az erőpár hatásvonalai nem esik egybe a dipólus tengelyével. Ennek nagysága a forgatónyomatékot a $-p$ erősségű pólusra mint forgástengelyre felírva:

$$M = Fk = pBl \sin \alpha = mB \sin \alpha,$$

ahol α a mágneses dipólus tengelye és a mágneses mező indukciójának által bezárt szög. Iránya a vektoriális szorzat szerint adódik:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}}.$$

A forgatónyomaték hatására a mágneses dipólus elfordul a mágneses indukció irányába. Eközben a mágneses mező a forgatás során munkát végez a dipóluson. Megállapodás szerint az \vec{m} elektromágneses momentumú dipólus E_p *potenciális energiáján* azt a munkát értjük, amelyet a \vec{B} indukciójú mágneses mező végez rajta, amikor $\alpha_0 = 90^\circ$ -os szögből tetszőleges α szögig forgatja. Ennek kiszámítása:

$$E_p = W = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} M d\alpha = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} mB \sin \alpha d\alpha = -mB \cos \alpha = -\vec{m} \cdot \vec{B}.$$

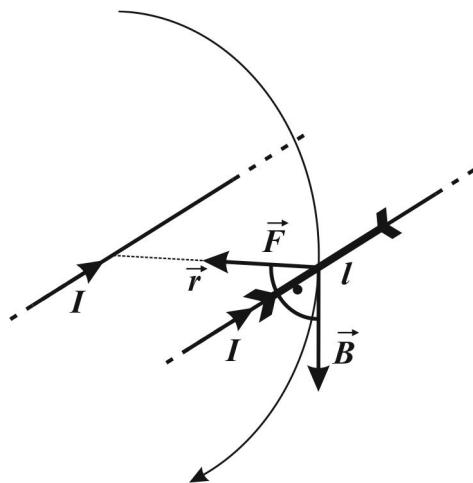
Megjegyzések:

1. Az F erő $W = \int F ds$ munkájához analóg módon, levezetés nélkül használtuk az M forgatónyomaték $W = \int M d\alpha$ munkáját.
2. A dipólus legkisebb potenciális energiája $\alpha=0^\circ$ helyzetben van, ekkor $E_p = -mB$. Ez egy stabilis egyensúlyi helyzet, mert a dipólusra ható erők és forgatónyomaték nagysága zérus. Ilyenkor a mágneses dipólus \vec{m} mágnesesmomentum-vektora a külső mágneses mezővel *párhuzamosan*, azzal *azonos* irányba mutat, ún. *parallel* beállású.
3. A dipólus legnagyobb potenciális energiája $\alpha=180^\circ$ helyzetben van, ekkor $E_p = mB$. Ez egy labilis egyensúlyi helyzet, mert a dipólusra ható erők és forgatónyomaték nagysága ugyan zérus, de a legkisebb hatásra is kibillen egyensúlyi helyzetéből és a stabilis egyensúlyi helyzet felé mozdul el. Ilyenkor a mágneses dipólus \vec{m} mágnesesmomentum-vektora a külső mágneses mezővel *párhuzamosan*, azzal *ellenkező* irányba mutat, ún. *antiparallel* beállású.

Az atommagok *mágneses rezonancián* alapuló képalkotó vizsgálata (MRI) során mágneses momentummal rendelkező atommagok külső mágneses térben való viselkedését vizsgálják.

3.3.3.3. Párhuzamos áramvezetők között ható erő (Ampère-törvény)

Ha megvizsgáljuk a 3.35. ábra szerinti elrendezésben két, egymástól r távolságban lévő, végtelen hosszúságú, elhanyagolhatóan kis kör keresztmetszetű, I_1 és I_2 erősségű áramok által átjárt vezető között fellépő erőhatást, akkor azt tapasztaljuk, hogy azonos irányú áramok esetén vonzó-, ellentétes irányú áram esetén taszítóerő lép fel.



3.35. ábra: Párhuzamos áramvezetők között ható erő

Tapasztalatilag tudjuk, hogy az áram által átjárt egyenes vezető körül kialakuló mágneses mező hengerszimmetrikusan örvényes, tehát az I -es vezeték körül kialakult mágneses mező indukciója merőleges a 2-es vezetékre. Ha az I_1 és I_2 erősségű áramok azonos irányba folynak és köztük vonzóerő lép fel, akkor ebből az következik, hogy az I -es vezeték mágneses mezőjének indukciója iránya a *jobbkézszabály* alapján számítandó. A 2-es vezetékben mozgó negatív töltésekre ekkor ugyanis az I -es vezeték felé, ellenkező áramirány esetén pedig a másik irányba mutató erő hat.

Megjegyzés:

Az áramerősség definícióját ez alapján az erőhatás alapján rögzítették le 1946-ban. Ezzel az SI az alapvetőbb fizikai mennyiség, az elektromos töltés helyett a technikailag könnyebben és pontosabban mérhető áramerősséget választotta alammennyiségnek.

3.3.4. Az anyagok mágneses tulajdonságai

A vezetési áramok keltette mágneses mező B_0 vákuumbeli indukciója B -re változik, ha a mágneses mező indukcióvonalai valamilyen *anyagban* vannak. Ez a változás annak a következménye, hogy az anyagot alkotó molekuláris mágnesező áramok saját mágneses mezője a külső mágneses mezőre szuperponálódik (rárakódik). A közegnek a külső mágneses mezőt módosító hatását a két indukció hányadosával jellemezzük, és *relatív permeabilitásnak* nevezzük:

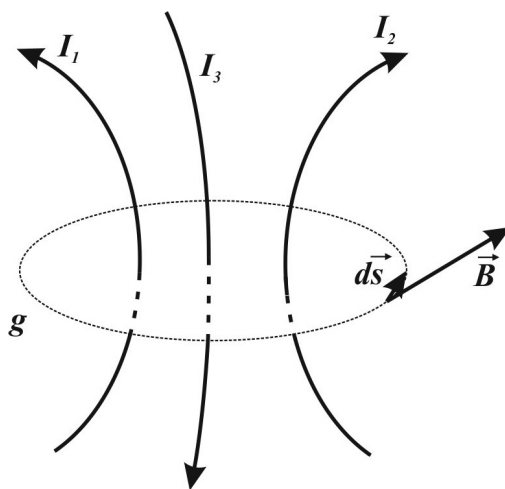
$$\mu_r = \frac{B}{B_0}$$

A definícióból következik, hogy $\mu_{r, \text{vákuum}} = 1$. A μ_r érték alapján az anyagokat mágneses szempontból csoportosítani lehet:

- *Diamágneses* anyagok: $\mu_r < 1$ (pl.: víz, réz)
- *Paramágneses* anyagok: $\mu_r > 1$ (pl.: alumínium, levegő)
- *Ferromágneses* anyagok: $\mu_r \gg 1$ (pl.: vas és ötvözetei, nikkel), ezen anyagok relatív permeabilitása erősen függ a külső indukciótól és a hőmérséklettől. Egy kritikus hőmérséklet felett (Curie-pont) a ferromágneses tulajdonság megszűnik, az anyag paramágneses lesz.

3.3.5. Ampère-féle gerjesztési törvény

Ampère felismerte, hogy a \vec{B} mágneses indukció zárt görbére vonatkozó összegzése (integrálja) arányos a zárt görbe által határolt felületen átfolyó vezetési áramok erősségének összegével (3.36. ábra):



3.36. ábra: Ampère-féle gerjesztési törvény

Matematikailag:

$$\oint_g \vec{B} \cdot d\vec{s} \sim \sum I$$

(ábránkon $\sum I = I_1 - I_2 + I_3$) és a bevezetendő arányosságit együttható a $\mu = \mu_0 \mu_r$ permeabilitás, ahol $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{V \cdot s}{A \cdot m}$, a vákuum permeabilitása, tehát:

$$\oint_g \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu \sum I.$$

Általánosan: ha az A felületen áthaladó töltésáramlás nem állandó, akkor az összefüggés jobb oldala a \vec{J} áramsűrűség-vektor A felületre vonatkozó integrálja:

$$\boxed{\oint_g \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}}.$$

Ez az **Ampère-féle gerjesztési törvény**. A zárt görbére vonatkozó integrál kiszámítását csak nagyon speciális (szimmetrikus) esetekben mutatjuk be példák kapcsán.

3.19. Példa: Egyenes vezető mágneses mezője

Határozzuk meg egy I erősségű egyenáramot szállító, végtelen hosszú egyenes vezető mágneses mezőjének indukcióját a vezetéktől mért távolság függvényében.

Megoldás:

Jogos feltételezni, hogy a mező hengersizmetrikus, így az indukció a vezetékkel koncentrikus körön állandó nagyságú. Ezzel:

$$\oint_g \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_g B ds \cos 0^\circ = B \oint_g ds = B 2r\pi,$$

ami az Ampère-féle gerjesztési törvény szerint:

$$\oint_g \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu I.$$

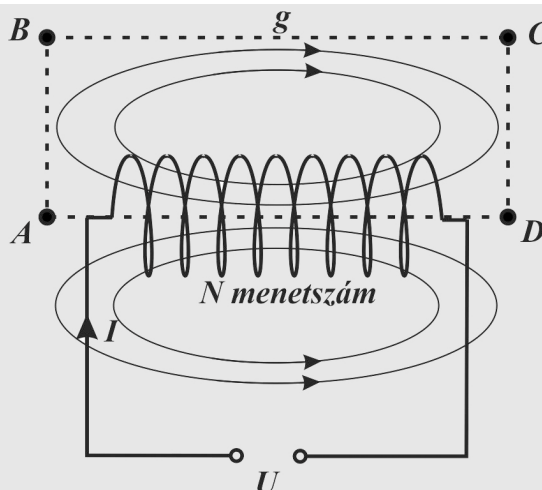
A kettőből B kifejezhető:

$$B = \mu \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r},$$

tehát az indukció a tekercstől távolodva *hiperbolikusan csökken*.♣

3.20. Példa: Hengeres tekercs (szolenoid) mágneses mezője a tekercs belsejében

Határozzuk meg az I erősségű áram által átjárt, l hosszúságú és N menetből álló hengeres tekercs (szolenoid) mágneses indukcióját a tekercs belsejében!



3.37. ábra: Szolenoid mágneses mezője a tekercs belsejében

Megoldás:

A 3.37. ábra szerint az $ABCD$ pontok által meghatározott zárt hurokra alkalmazott gerjesztési törvény alapján:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{s},$$

és mivel a tekercsen kívüli térben (AB , BC és CD szakaszokon) az indukció vonalintegrálja elhanyagolhatóan kicsiny a belső teréhez képest, ezért az Ampère-féle gerjesztési törvény felhasználásával:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \int_A^D ds = Bl = \mu IN.$$

Ebből B kifejezhető:

$$B = \mu \frac{NI}{l},$$

tehát az indukció a tekercs belsejében nagy pontossággal *homogén*.♣

Megjegyzés:

Az MRI berendezésekben ilyen tekercssel biztosítják a homogén mágneses mezőt.

3.3.6. Az időben állandó elektromos és mágneses mező (összefoglalás)

3.3.6.1. A mezők jellemzése

A tárgyalt elektromos és mágneses mezők közös vonása, hogy a mezőket jellemző \vec{E} és \vec{B} vektorfüggvények a t időtől függetlenek, sztatikusak, az őket ábrázoló erővonalak is időben

állandóak (nem „mozognak”). Mindkét mező keletkezésének alapvető oka az elektromos töltésre vezethető vissza: nyugvó töltések elektromos, mozgó töltések (áramok) elektromos és mágneses mezőt hoznak létre.

A sztatikus mezők egymástól függetlennek tekinthetők, az őket leíró téregyenletekben ez egyértelműen látható.

3.3.6.1.1. A sztatikus elektromos mező

1. Forráserőssége:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum Q}{\epsilon_0}$$

(forrásos)

2. Örvényerőssége:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

(örvénymentes)

3.3.6.1.2. A sztatikus mágneses mező

1. Forráserőssége:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

(forrásmentes)

2. Örvényerőssége:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

(örvényes)

A forráserősséget leíró téregyenletek bal oldala az elektromos és a mágneses zárt felületre számított fluxusát fejezi ki. A sztatikus elektromos mező forrásos, forrásai az elektromos töltések. A sztatikus mágneses mező viszont forrásmentes, valódi mágneses „töltések” nincsenek. Az idő mint változó a négy egyenlet egyikében sem fordul elő. Egyik egyenletben sem szerepel \vec{E} és \vec{B} egyidejűleg. Látni fogjuk, hogy az elektromos és mágneses mezők közötti kapcsolat csak akkor lép fel, ha a mezők időben változnak (nem sztatikusak).

3.3.6.2. Az erőhatások jellemzése

Az elektrosztatikában és magnetosztatikában is foglalkoztunk a mezőnek a Q töltésre gyakorolt erőhatásával:

3.3.6.2.1. Elektromos erő

Az \vec{E} térerősségű elektromos mező a benne lévő $+Q$ ponttöltésre a térerősséggel megegyező irányú, a $-Q$ ponttöltésre pedig ellenkező irányú *elektromos erőt* gyakorol:

$$\vec{F}_e = Q\vec{E}.$$

3.3.6.2.2. Mágneses Lorentz-erő

A \vec{B} indukciójú mágneses mezőben \vec{v} sebességgel mozgó Q ponttöltésre a mágneses mező a sebességre és mágneses indukcióra a jobbkézsabály szerinti irányú *merőleges Lorentz-erőt* fejt ki:

$$\vec{F}_L = Q\vec{v} \times \vec{B}.$$

3.3.6.2.3. Elektromos és mágneses mező

Ha a \vec{v} sebességgel mozgó Q töltés egyidejűleg elektromos és mágneses mezőben mozog, akkor a teljes *elektromágneses Lorentz-erő* nagysága:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_L = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

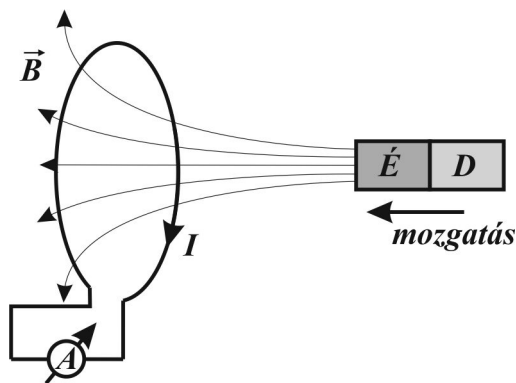
Mivel a mágneses Lorentz-erő mindig merőleges a sebességre és a mágneses indukcióra, ezért munkát nem végez, az elektromos erő munkavégzése az elektromos térerősséggel párhuzamos elmozdulás esetén zérustól különböző.

3.4. Az időben változó elektromágneses mező

Az áram mágneses határának Oersted által történt felfedezése után többen gondoltak arra, hogy ez a kapcsolat az elektromosság és a mágnesség között nem egyirányú, fordított effektusnak is kell léteznie, azaz mágneses mezővel elektromos áramot lehet létrehozni (indukálni). Nem sokkal Oersted felfedezése után Michael FARADAY felfedezte ezt a „fordított” jelenséget, az *elektromágneses indukciót*. Kiderült, hogy ha az elektromos, ill. a mágneses mező időben változik, akkor a két mező együttesen van jelen a folyamatban, azok hatásai egymástól szét nem választhatók.

3.4.1. Nyugalmi indukció

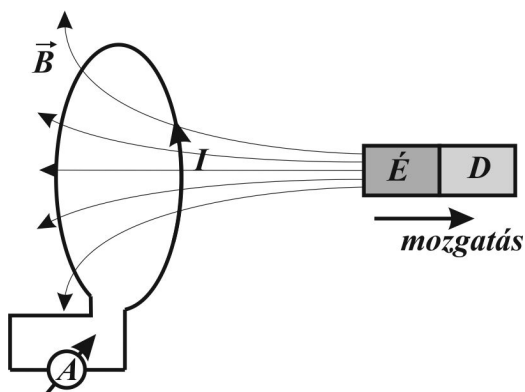
A 3.38. ábra szerinti kísérlettel kimutathatjuk, hogy mágneses mezővel áramot hozhatunk létre a *nyugalomban* lévő tekercsben. Ha az állandó rúd-mágnes nyugalomban van a vezetőhurokhoz képest, akkor az ampermérő nem jelez elektromos áramot ($I = 0$). ([7. Video: Nyugalmi indukció](#))



3.38. ábra: Nyugalmi indukció: mágnes közelítése a tekercs felé

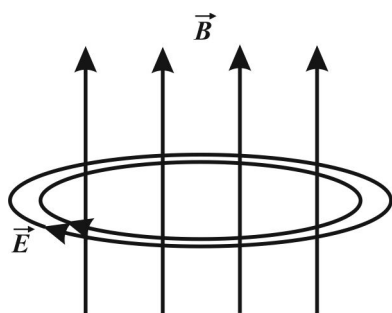
Ha a rúd-mágnes a vezetőhurokhoz közelítjük, akkor az ampermérő $I > 0$ erősségű áramot mér. A rúd-mágnesre taszító hatást tapasztalunk (3.38. ábra).

Ha a rúd-mágnes a vezetőhuroktól távolítjuk, akkor az ampermérő $I < 0$, az előbbivel ellentétes irányú áramot jelez. A rúd-mágnesre ilyenkor vonzó hatást tapasztalunk (3.39. ábra).



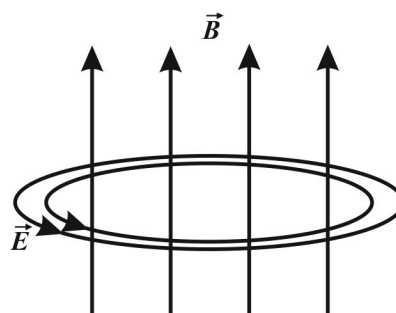
3.39. ábra: Nyugalmi indukció: mágnes távolítása a tekercstől

A fenti kísérletekben tapasztalt jelenség úgy magyarázható, hogy a mágnes mozgásával a vezető hurokban *változó fluxusú* (időben nem állandó) *mágneses mező* maga körül *elektromos mezőt indukál*, amelynek erővonalai önmagukba záródnak és *indukált feszültséggel* jellemezzük. *Hatására* zárt áramkörben az ún. *indukált elektromos áram* alakul ki.



*időben növekvő fluxusú
mágneses mező ($\Delta\Phi > 0$)*

3.40. ábra: Növekvő fluxusú mágneses mező



*időben csökkenő fluxusú
mágneses mező ($\Delta\Phi < 0$)*

3.41. ábra: Csökkenő fluxusú mágneses mező

A töltések mozgását létrehozó indukált elektromos mezőt a pillanatnyi feszültséggel jellemezzük, amely arányos a Φ mágneses fluxus Δt időegységre jutó megváltozásával:

$$U_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

ill. $\Delta t \rightarrow 0$ esetén a Faraday-féle indukciós törvény:

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

A negatív előjel az ún. **Lenz-törvényre** utal, miszerint:

„A vezetőhurokban indukált áram mindig olyan irányú, hogy annak mágneses mezője akadályozza a nyugalmi indukciót létrehozó változást.”

A Lenz-törvény az energiamegmaradás elvének következménye. Ha ugyanis pl. a 3.38. ábra szerinti kísérletben (mágnes a vezetőhurok felé mozog) az indukált áram iránya ellentétes lenne, akkor a vezetőhöz közeledő rúd-mágneset vonzaná és, és így a Joule-féle hőn kívül a „semmitől” még mechanikai munkát is nyernénk. (8. Video: [Lenz-törvény](#))

Megjegyzés:

Ha vezetőhurok helyett N menetszámú tekercset alkalmazunk, akkor az egyes menetek soros kapcsolása folytán az egyes menetekben indukált feszültségek összeadódnak és így:

$$U_i = -N \frac{d\Phi}{dt}.$$

Mivel az indukált feszültség kifejezhető az indukált \vec{E} elektromos térerősséggel:

$$U_i = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

ezért zárt görbére elvégezve az összegzést:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Az egyenlet bal oldalán a mágneses fluxus $\Phi = BA$ definíciójából kiindulva a dA felületelemre jutó $d\Phi$ fluxus:

$$d\Phi = BdA,$$

ezért a teljes A felületre jutó fluxus ennek integrálja, és így az egyenlet:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}.$$

Megjegyzés:

A ∂ szimbólum a több változótól függő mennyiség egyetlen változója szerinti derivált, az ún. parciális derivált jelölésére szolgál.

A fenti törvény, vagy **Faraday–Maxwell-féle indukciós törvény** a **Maxwell** által egyesített elektromágneses elmélet **II. egyenlete**, amely vákuumban írja le az időben változó mágneses mező által indukált elektromos mező *örvényerősségét*. A törvény szavakban megfogalmazva:

„Az időben változó mágneses mező által indukált elektromos mező örvényes, az erővonalak önmagukba záródó görbék.”

Megjegyzések:

1. Nyugalmi indukciónál a fluxusváltozást mindig a mágneses mező időbeli változása okozza, ezt a kísérletben a mágnesrúd mozgásával értük el.
2. Az indukált elektromos mező nem kötődik jelenlévő töltésekhez, forrásmentes:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0.$$

3. A nyugalmi indukciónál a vezetőnek csak indikátor szerepe van, az időben változó mágneses mezőt vákuumban is elektromos mező veszi körül.

A *betatron* nevű elektrongyorsítóban kihasználják azt a jelenséget, hogy a mágneses mező a töltéseket körpályára kényszeríti, az időben változó mágneses mező által indukált elektromos mező pedig gyorsítja is azokat a pálya mentén. A nagy kinetikus energiájú elektronsugarakkal például terápiás célú röntgen-sugarak állíthatók elő.

3.4.2. Önindukció

Az *önindukció* a nyugalmi indukció egy speciális esete, amikor egy zárt vezetőben (pl. tekercsben) az áramerősség időbeni változása folytán keletkező változó mágneses mező magában a vezetőben indukál feszültséget. A tekercsben indukált pillanatnyi feszültséghez felhasználva a 3.20. Példa szerint a mágneses indukcióra kapott eredményt, az előzőek alapján:

$$U_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{d(BA)}{dt} = -NA \frac{dB}{dt} = -NA \frac{d\left(\mu \frac{iN}{l}\right)}{dt} = -NA\mu \frac{N}{l} \frac{di}{dt} = -\mu \frac{N^2 A}{l} \cdot \frac{di}{dt},$$

ahol $\mu = \mu_0 \mu_r$ a tekercsben lévő anyag permeabilitása, a $\mu \frac{N^2 A}{l} = L$ hányados pedig a tekercsre jellemző állandó, neve: önindukciós együttható (a tekercs induktivitása), SI-beli mértékegysége: $\frac{V \cdot s}{A} = H$ (henry). Ezzel:

$$U_i = -L \frac{di}{dt}.$$

Az L *induktivitás* a tekercs ugyanolyan jellemzője, mint a kondenzátor C *kapacitása*. Látható, hogy az induktivitást a tekercset kitöltő anyag (pl. vasmag) μ_r relatív mágneses permeabilitása és a tekercs N menetszáma erősen befolyásolja.

3.4.2.1. A tekercs mágneses mezőjében tárolt energia és energiasűrűség

A kondenzátor elektromos mezőjében tárolt energiához hasonlóan az áram által átjárt tekercs *mágneses mezőben* is *energia tárolódik*. Levezetés nélkül az L induktivitású tekercs belsejében I erősségű egyenáram hatására kialakult B indukciójú mágneses mező energiája:

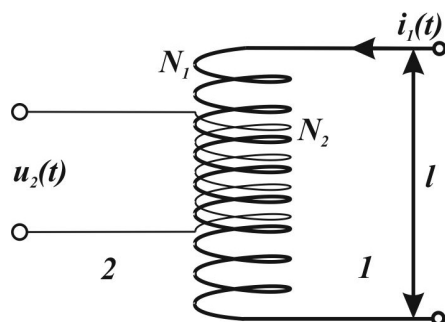
$$E_L = \frac{1}{2} LI^2,$$

energiasűrűsége pedig:

$$w_L = \frac{E_L}{V} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2}{\mu}.$$

3.4.3. Kölcsönös indukció

Kölcsönös indukció közös fluxussal összekapcsolt tekercsek esetén lép fel, amely a 3.42. ábra szerint biztosítható.



3.42. ábra: Kölcsönös indukció

Az l tekercsben folyó i_1 pillanatnyi erősségű áram

$$B_1 = \mu \frac{i_1 N}{l}$$

pillanatnyi indukciójú mágneses mezőjének változása folytán a 2 tekercsben keletkezett indukált feszültség pillanatnyi értéke közös mágneses fluxus esetén:

$$u_2(t) = -N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = -N_2 \frac{d(BA)}{dt} = -N_2 A \frac{dB}{dt} = -N_2 A \mu \frac{N_1}{l} \frac{di_1}{dt},$$

ahol a $\frac{\mu N_1 N_2}{l} = M$ hányados a két tekercs közös geometriai viszonyaira jellemző állandó,

amelyet kölcsönös indukciós együtthatónak nevezünk, SI-beli mértékegysége: $\frac{V \cdot s}{A} = H$

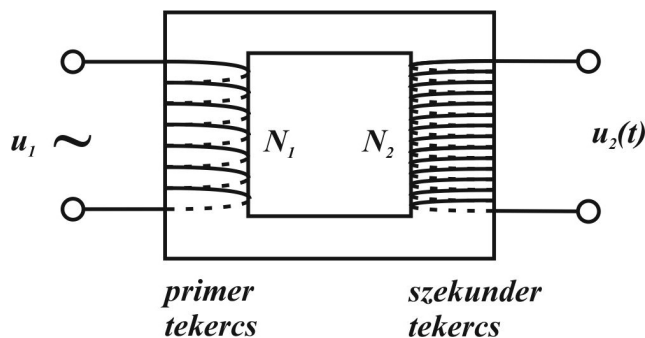
(henry). Ezzel:

$$u_2(t) = -M \frac{di_1}{dt}.$$

Az M értéke a két tekercs közötti csatolás mértékét jellemző érték. A kölcsönös indukció elvén működnek a transzformátorok.

3.4.3.1. A transzformátor

A *transzformátor* közös vasmagra tekercselt két tekercsből áll. Az egyikbe váltakozó áramot vezetünk (általában szinuszosan váltakozó feszültségű generátorra kapcsoljuk), ez az N_1 menetszámú *primer tekercs*. A másik, N_2 menetszámú *szekunder tekercsben* indukált feszültséget nyerünk (3.43. ábra). A közös vasmag biztosítja a csatolást és az azonos mágneses fluxust.



3.43. ábra: Transzformátor

3.4.3.1.1. Üresjárási állapot

A transzformátor *üresjárási állapotáról* akkor beszélünk, ha a szekunder oldalon nincs fogyasztó ($i_2=0$). Ekkor a primer tekercsre kapcsolt u_1 feszültségű generátor i_1 árama által gerjesztett mágneses mező áthalad a szekunder tekercs belsejében is. Így a primer tekercs egy menetére jutó feszültség megegyezik a szekunder tekercs egy menetében indukált feszültséggel. Ez azt jelenti, hogy a transzformátor „áttétele”:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{u_2}{u_1}$$

$N_2 > N_1$ esetén *feltranszformálásról*, $N_2 < N_1$ esetén *letranszformálásról*, $N_2 = N_1$ esetében pedig *leválasztó transzformálásról* beszélünk.

3.4.3.1.2. Terhelt állapot

Terhelt üzemi állapotról beszélünk akkor, ha a szekunder oldalon R ellenállású fogyasztó van, ekkor a fogyasztón i_2 pillanatnyi erősségű áram folyik. A jól tervezett és kivitelezett transzformátor hatásfoka közel van a 100%-hoz, ami azt jelenti, hogy a primer oldalon felvett P_1 teljesítményt a szekunder oldalon szinte teljes egészében leadja ($P_2 \approx P_1$), vagyis:

$$u_1 i_1 \approx u_2 i_2.$$

Feltranszformáláskor ($u_2 > u_1$) a szekunder oldali áram erőssége kisebb, míg letranszformáláskor pedig ($u_2 < u_1$) a szekunder oldali áram erőssége nagyobb a primer oldali áram erősségénél.

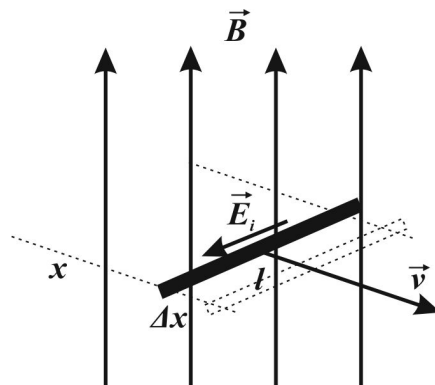
A nagyfeszültségű (120 – 750 kV) távvezetékek feszültségét letranszformálják (általában több lépésben), hogy a lakossági fogyasztói 230 V feszültséget elérjék. Az erőművek által előállított feszültséget feltranszformálják, hogy a távvezetékben minél kisebb erősségű áram folyjon, ami a Joule-féle hőveszteség okozója.

3.4.4. Mozgási indukció

Az előzőekben láttuk, hogy a mágneses mező Φ fluxusának változása \vec{E} elektromos térerősségű és U_i indukált feszültséggel jellemezhető elektromos mezőt hoz létre azokban az ese-

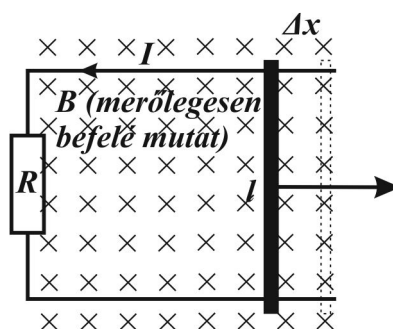
tekben, amikor a fluxus változását egy adott A felületen áthaladó mágneses *indukcióvonalak számának változása* okozza (nyugalmi indukció).

A következőkben megvizsgáljuk a Φ mágneses fluxus változásának azt az esetét, amikor állandó \vec{B} indukciójú mágneses mezőben elhelyezett *vezető* által határolt terület A *felülete változik meg* (3.44. ábra).



3.44. ábra: Mozgási indukció

A 3.45. ábra szerinti elrendezésben lévő l hosszúságú mozgatható vezetőket R ellenállású fogyasztóval kötjük össze.



3.45. ábra: Mozgási indukció magyarázata

A v sebességgel mozgatott vezetővel együtt mozgó $-e$ töltésű szabadelektronokra a mágneses mező

$$\vec{F}_L = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

mágneses Lorentz-erőt fejt ki. Hatására a vezetőben a töltések szétválnak: a szabadelektronok a vezető egyik végén halmozódnak fel, aminek hatására a vezető másik végén pozitív töltés-többlet alakul ki. A töltésszétválasztó hatást jellemző *indukált feszültség* merőleges viszonyok (\vec{v} , \vec{B} és \vec{l}) esetén:

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(BA)}{dt} = -B\frac{dA}{dt} = -B\frac{d(lx)}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv.$$

Ugyanakkor a szétválasztott töltések elektromos mezőjét jellemző feszültség:

$$U = -U_i = Blv.$$

R ellenállású fogyasztót tartalmazó zárt áramkörben ez az U feszültség I erősségű, ún. *indukált elektromos áramot* hoz létre, amely az Ohm-törvény szerint:

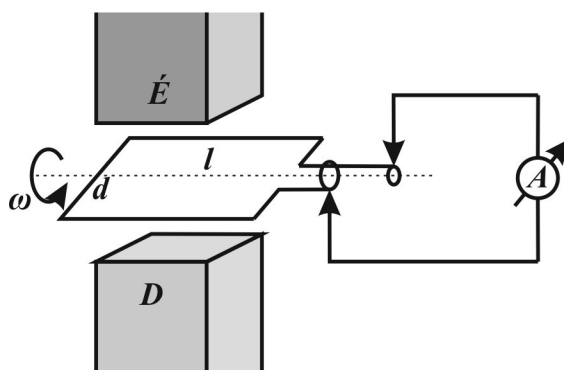
$$I = \frac{U}{R} = \frac{Blv}{R}.$$

Ez az áram mindig olyan irányú, hogy az indukciót létrehozó mozgást akadályozza (Lenz-törvény).

A mozgási indukció során tehát mechanikai munkavégzés révén hozunk létre elektromos energiát. Ez az elektromechanikus *generátorok* (áramfejlesztők) működésének fizikai alapja.

3.4.4.1. A váltakozó feszültség és váltakozó áram előállítása

A váltakozó feszültség előállításához *vezetőkeretet* (ill. tekercset) $\omega = \text{állandó}$ szögsebességgel *forgatunk* a forgástengelyre merőleges *mágneses mezőben* (3.46. ábra).



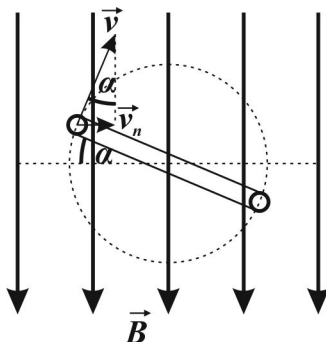
3.46. ábra: Forgó vezetőkeret mágneses mezőben

A vezetőkeret l oldalának sebességének a mágneses mezőre merőleges komponense ekkor a 3.47. ábra szerint:

$$v_n = v \sin \alpha = \frac{d}{2} \omega \sin \omega t,$$

és ezért a mágneses mezőre merőleges l hosszúságú oldalának végei között jelentkező pillanatnyi indukált kapocsfeszültség:

$$u = Blv_n = Bl \frac{d}{2} \omega \sin \omega t.$$



3.47. ábra: Váltakozó feszültség előállítása

(11. Animáció: Váltakozó feszültség előállítása)

Ha a szemközti oldalon található l hosszúságú szakaszt is figyelembe vesszük, akkor a soros kapcsolás folytán a vezetőkeret kivezetésein

$$u = 2Bl \frac{d}{2} \omega \sin \omega t = Bld \omega \sin \omega t = BA \omega \sin \omega t$$

pillanatnyi nagyságú, szinuszosan *váltakozó* értékű indukált *kapocsfeszültség* jelentkezik. Mivel $BA\omega = \text{állandó}$, az u pillanatnyi feszültség U_0 *csúcserőssége*, ezért:

$$u = U_0 \sin \omega t .$$

Ha a vezetőkeret kivezetéseire R ellenállású fogyasztót kapcsolunk, akkor az áramkörben az Ohm-törvény szerint

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_0}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t$$

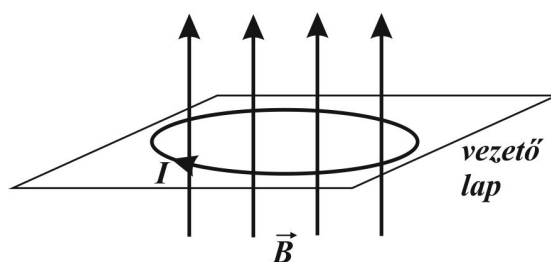
pillanatnyi és I_0 *csúcserősségű* váltakozó elektromos áram folyik. Ezzel tehát $\omega = \text{állandó}$ esetén tisztán szinuszos feszültség, ill. elektromos áram állítható elő. N menetszámú tekercs alkalmazásával a menetek soros kapcsolása folytán

$$U_0 = NBA\omega$$

nagyságú maximális feszültség (csúcshfeszültség) érhető el.

3.4.4.2. Örvényáramok

Indukált elektromos áram nemcsak az erre a célra épített vezetőkörben, hanem kiterjedt fémtestekben (pl. a tekercs vasmagjában) is keletkezhet indukció révén. Az örvényes indukált elektromos mezőt jellemző indukált feszültség hatására a fémtestben elektromos áram, az ún. *örvényáram* folyik (3.48. ábra):



*időben növekvő fluxusú
mágneses mező ($\Delta\Phi > 0$)*

3.48. ábra: Örvényáram

Ez általában káros, mert az általa létrehozott hőfejlődés energiaveszteséget okoz, de pl. az ún. indukciós kemencékben éppen ezt használják fel fémek megolvasztására. Ahol a veszteséget csökkenteni szeretnénk, ott a mágneses mezőben lévő vasmagokat lemezelik és ezeket egymástól lakkréteggel elszigetelik. Nagyfrekvencián (nem a mechanikus gépekre jellemző fordulatszámoknál fordul elő) a lemezek helyett ún. porkohászati úton előállított porvasmagot (ferritmagot) használnak.

3.4.4.3. Effektív áramerősség és effektív feszültség

Mivel a váltakozó áramok és feszültségek értékei pillanatról-pillanatra változnak, a pillanatnyi értékek mérése szinte lehetetlen (legfeljebb oszcilloszkópon szemléltethető) és erre általában nincs is szükség. Helyette a váltakozó áram és feszültség *effektív értékével* szoktunk számolni.

Váltakozó áram I_{eff} *effektív értéke* alatt annak az egyenáram az erősséget értjük, ami ugyanannyi idő alatt *ugyanakkora* Q Joule-féle hőt fejleszt egy R ellenállású fogyasztóban, mint a váltakozó áram. Az i pillanatnyi erősségű váltakozó áram az R ellenállású fogyasztóban dt idő alatt

$$dQ = Ri^2 dt ,$$

hőt fejleszt, ezért a teljes T periódusidő alatt fejlődött hő:

$$Q = \int_0^T Ri^2 dt .$$

Ugyanekkor az I_{eff} erősségű egyenáram ugyanezen R ellenállású fogyasztóban ugyanennyi T idő alatt

$$Q = RI_{eff}^2 T$$

hőt fejleszt, és definíció szerint ez megegyezik a váltakozó áram által termelt hővel:

$$RI_{eff}^2 T = \int_0^T Ri^2 dt .$$

Ebből az effektív érték kiszámolható:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} .$$

3.21. Példa: Szinuszos váltakozó áram effektív értéke

Számítsuk ki az U_0 csúcshőfeszültség által gerjesztett I_0 csúcserősségű, ω körfrekvenciájú váltakozó áram és a váltakozó feszültség effektív értékét!

Megoldás:

A fenti összefüggés alkalmazásával:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t dt} = I_0 \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt},$$

ami a $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ azonosságot felhasználva

$$I_{eff} = I_0 \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt} = I_0 \sqrt{\frac{1}{T} \left[\frac{1}{2} t - \frac{T}{8\pi} \sin 2 \frac{2\pi}{T} t \right]_0^T}$$

alakú lesz, amiből az integrálási határok behelyettesítése után az effektív áramerősségre

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

adódik, az effektív feszültség pedig az Ohm törvény alkalmazása után:

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

A lakossági hálózati $U_{eff} = 230$ V effektív értékű feszültség csúcshőfeszültsége pl.:

$$U_0 = U_{eff} \sqrt{2} \approx 325 \text{ V} \spadesuit$$

3.4.5. Váltakozó áramú áramkörök

Az előzőekben láttuk, hogy hogyan lehet szinuszosan váltakozó elektromos feszültséget, ill. elektromos áramot elektromechanikai úton előállítani. Ezek pillanatnyi értékei:

$$u = U_0 \sin \omega t,$$

és

$$i = I_0 \sin \omega t,$$

effektív értékei pedig:

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}},$$

és

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}},$$

ahol U_0 és I_0 a csúcserőterek, ω a körfrekvencia (számértékileg megegyezik a forgó tekercs szögsebességével). Továbbá: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, ahol f a frekvencia, T pedig a periódusidő.

Ezzel a módszerrel néhány száz Hz frekvenciájú feszültség, ill. áram előállítására van lehetőség, magasabb frekvenciák előállítása elektromechanikus eszközökkel műszaki-technikai okok miatt nem lehetséges. A hálózatban használt feszültség és áram az európai szabvány szerint $50 Hz$ frekvenciájú, ami $3000 \frac{1}{min}$ generátor-fordulatszámmal valósítható meg.

Megjegyzés:

Az USA és Japán $f = 60 Hz$ -es hálózati frekvenciájú, $U_{eff} = 110 V$ effektív feszültségű szabványt alkalmaz.

Jóval nagyobb frekvenciájú elektromos feszültség és elektromos áram csak mozgó alkatrészek nélküli, elektronikai eszközökkel, rezgőkeltőkkel (*l. később*) valósítható meg.

A tisztán szinuszos áramot szállító vezetőkben a töltéshordozók (elektronok) ω körfrekvenciájú *harmonikus rezgőmozgást* végeznek, a váltakozó áramot tehát harmonikus rezgőmozgásként kell kezelniük.

3.4.5.1. Áramköri elemek váltakozó áramú hálózatokban

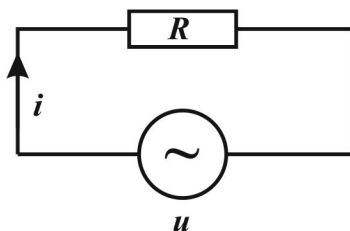
3.4.5.1.1. Ohmos ellenállású fogyasztó

A 3.49. ábra szerinti váltakozó áramú áramkörben az R ellenállású fogyasztóra jutó pillanatnyi feszültség értéke:

$$u(t) = U_0 \sin \omega t,$$

a pillanatnyi áramerősségé pedig:

$$i(t) = I_0 \sin \omega t.$$



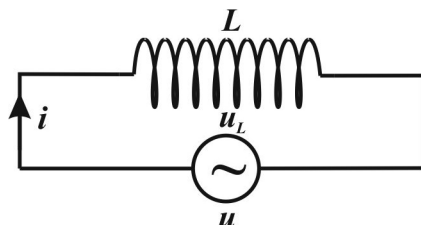
3.49. ábra: Ohmos fogyasztó

A feszültség és az elektromos áram tehát *azonos fázisban* rezeg, fáziskülönbségük, az ún. ohmos fázisszög tehát:

$$\Delta\varphi_R = \omega t - \omega t = 0,$$

az áram a feszültséggel „szinkron” váltakozik. Az R ellenállás a hálózatról felvett UI elektromos energiát teljes egészében Joule-féle hővé alakítja.

3.4.5.1.2. Induktív ellenállású fogyasztó



3.50. ábra: Induktív ellenállású fogyasztó

Az önindukciós *tekercest tartalmazó áramkörben* (3.50. ábra) az áramforrás u pillanatnyi feszültségének nagysága Kirchhoff II. törvénye szerint megegyezik a tekercsben indukált u_L feszültség nagyságával:

$$u = u_L,$$

valamint:

$$i(t) = I_0 \sin \omega t$$

pillanatnyi áramerősség mellett az önindukciós törvény felhasználásával:

$$u = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d}{dt} (I_0 \sin \omega t) = L \omega I_0 \cos \omega t = L \omega I_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Ekkor az $U_0 = L \omega I_0$ bevezetésével:

$$u(t) = U_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

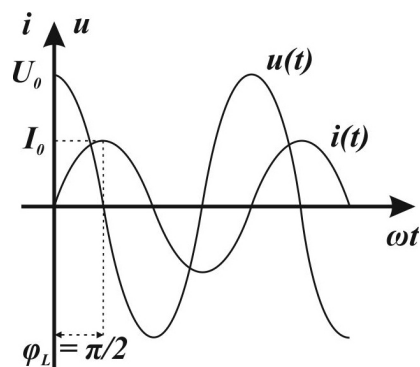
Az $U_0 = L \omega I_0$ összefüggésből az Ohm-törvény analógiájára bevezetjük az

$$\boxed{X_L = \omega L}$$

induktív ellenállást (induktív reaktancia). A feszültség és az áramerősség fázisszögeinek különbsége:

$$\Delta \varphi_L = \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) - \omega t = \frac{\pi}{2}.$$

Ez alapján megállapítható, hogy induktív fogyasztó esetén az *áramerősség fázisa* $\frac{\pi}{2}$ -lel *késik* az feszültség fázisához képest (vagy a feszültség fázisa ugyanennyivel *siet* az áramerősségéhez képest).



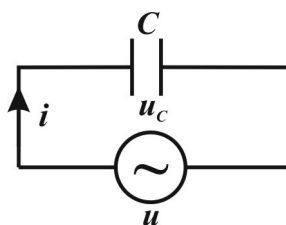
3.51. ábra: Az induktív fogyasztó fáziskésleltető hatása

A tekercsnek ez a fáziskésleltető hatása (3.51. ábra) az önindukció következménye, az áram „tehetetlensége” nyilvánul meg benne. A tekercsen átfolyó áram erősségének 0-ról I_0 -ra növekedésekor a tekercsben a váltakozó áram időben váltakozó mágneses mezőt hoz létre. Ez minden pillanatban olyan feszültséget indukál, ami ellentétes az áramforrás pillanatnyi feszültségével. Ez okozza az ideális tekercsnek a váltakozó árammal szemben tanúsított ellenállását. Az áram erősségének legnagyobb változásakor a tekercsben indukált feszültség maximális lesz. Ugyanekkor az áram Lenz-törvénye miatt csak lassan növekszik. Az áramerősség csökkenésekor a mágneses mező változása feszültséget indukál, ami az előzővel ellentétes irányú. Ez késlelteti az áram megszűnését. Tehát tekercs jelenlétében az áram késve követi a feszültséget.

Ideális tekercs ohmos ellenállása nulla, tehát rajta hő nem fejlődik. Az ilyen, energiavesztést nem okozó fogyasztót meddő fogyasztónak, X_L ellenállását *meddő ellenállásnak* nevezük. A valóságban a tekercs vezetékének van ohmos ellenállása, ami hőtermeléssel, tehát elektromos energiavesztéssel jár.

3.4.5.1.3. Kapacitív ellenállású fogyasztó

Kondenzátort tartalmazó áramkörben egyirányú elektromos áram csak a kondenzátor feltöltődésének rövid idejéig folyik, mert a kondenzátor fegyverzetei megszakítást jelentenek az áram szempontjából. Váltakozó áramú áramkörben azonban az elektromos áram iránya félperiódusonként megváltozik, ami a kondenzátor fegyverzetein lévő töltések kicserélődését okozza. Ezért az ilyen áramkörben váltakozó áram folyhat, azonban a fegyverzetek között töltésáramlás továbbra sincs.



3.52. ábra: Kapacitív ellenállású fogyasztó

A C kapacitású kondenzátort tartalmazó áramkörben (3.52. ábra) Kirchhoff II. törvénye szerint a kondenzátor feszültségének nagysága megegyezik az áramforrás feszültségével:

$$u = u_C,$$

valamint az $u = \frac{Q}{C}$ összefüggést felhasználva

$$u(t) = U_0 \sin \omega t$$

pillanatnyi feszültség mellett:

$$U_0 \sin \omega t = \frac{Q}{C},$$

amiből a kondenzátor pillanatnyi töltése:

$$Q(t) = CU_0 \sin \omega t.$$

A körben folyó elektromos áram erősségének pillanatnyi értéke ebből:

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(CU_0 \sin \omega t) = C\omega U_0 \cos \omega t = C\omega U_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Ekkor az $I_0 = C\omega U_0$ bevezetésével:

$$i(t) = I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

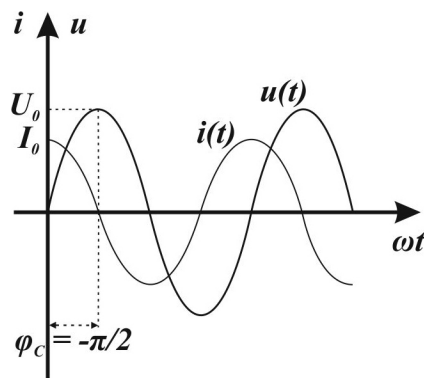
Az $I_0 = C\omega U_0$ összefüggésből az Ohm-törvény analógiájára bevezetjük az

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

kapacitív ellenállást (kapacitív reaktancia). A feszültség és az áramerősség fázisszögeinek különbsége:

$$\Delta\varphi_L = \omega t - \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Ez alapján megállapítható, hogy kapacitív fogyasztó esetén az áramerősség fázisa $\frac{\pi}{2}$ -lel siet az feszültség fázisához képest (vagy a feszültség fázisa ugyanennyivel késik az áramerősségéhez képest, 3.53. ábra):



3.53. ábra: A kapacitív ellenállású fogyasztó fázissiettető hatása

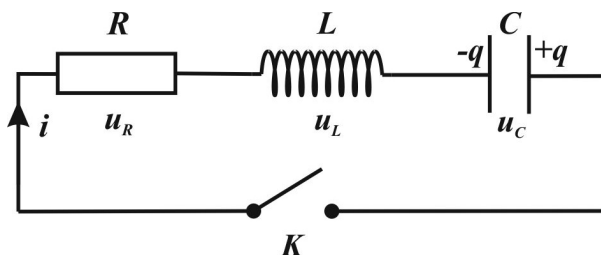
Ez annak a következménye, hogy az áramkör zárásakor a kondenzátort töltő áram azonnal megindul, a kondenzátor feszültsége azonban csak időben késve alakul ki. A kondenzátornak ez a fázissiettető hatása annak következménye, hogy az áramkör zárásakor a töltések akadály nélkül áramlanak a feltöltetlen kondenzátor felé, maximális erősségű áram folyik a vezetékben, ugyanakkor a fegyverzetek közötti a feszültség nulla. A kondenzátor feltöltődésekor a fegyverzetek közötti feszültség akkor maximális, amikor a kondenzátort töltő elektromos áram pillanatnyi értéke nullává vált.

A kondenzátor is meddő fogyasztó, rajra hő nem fejlődik, X_C ellenállása *meddő ellenállás*.

3.5. Elektromágneses rezgések

3.5.1. Soros RLC áramkör szabad rezgése

Soros RLC áramkör *szabad rezgése* alakul ki, ha pl. egy R ellenállású ohmos fogyasztóból, L induktivitású tekercsből és C kapacitású kondenzátorból álló soros kapcsolású rendszerben kialakuló elektromos áramot rezgésbe hozunk a kondenzátor feltöltésével, majd az áramkör zárásával (3.54. ábra):



3.54. ábra: Szabad RLC -kör

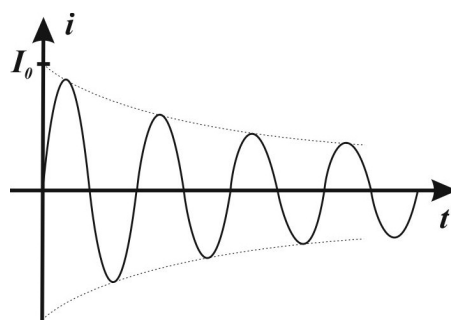
A K kapcsoló zárása után a kondenzátor *kisülési áramot* indít az áramkörben és Kirchhoff II. törvénye (huroktörvény) szerint:

$$u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{Q}{C} = 0.$$

Ez egy homogén, állandó együtthatójú differenciálegyenlet, ahol $i = \frac{dQ}{dt}$. A megoldás a matematikai részletezéstől eltekintve:

$$i = I_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \omega t,$$

vagyis egy exponenciálisan *csillapodó* szinuszos rezgés jön létre (3.55. ábra):



3.55. ábra: Áramrezgés szabad RLC -körben

A csillapodás oka az R ellenálláson fellépő hőveszteség. Ha $R = 0$, akkor

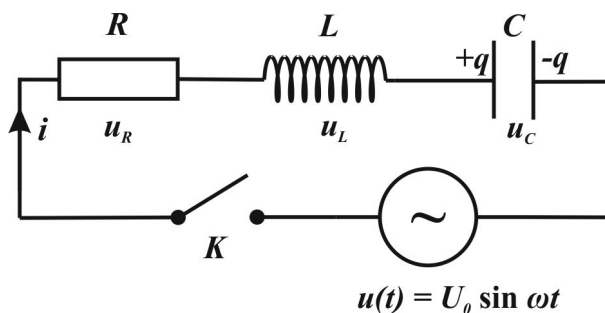
$$i = I_0 \sin \omega t,$$

vagyis veszteségmentes állapotban *csillapítatlan rezgés* alakul ki. Mivel $R = 0$ egy idealizált állapot (gondoljunk a tekercs ohmos ellenállására), csillapítatlan rezgés létrehozásához az

RLC áramkörbe a rezgéssel szinkronban külső energiaforrásból energiát kell betáplálni, erősítő áramkör igénybevételére van szükség.

3.5.2. Soros RLC áramkör kényszerrezgése

Soros RLC áramkör *kényszerrezgése* alakul ki, ha az R ellenállású ohmos fogyasztóból, L induktivitású tekercsből és C kapacitású kondenzátorból álló soros kapcsolású rendszert változó feszültségű áramforrásra kötjük (3.56. ábra):



3.56. ábra: RLC -kör kényszerrezgése

A K kapcsoló zárása után a Kirchhoff II. törvénye (huroktörvény) szerint:

$$u_R + u_L + u_C = u,$$

ahol $u = U_0 \sin \omega t$ a „kényszerfeszültség” és ezért az áramkörben folyó elektromos áramot leíró differenciálegyenlet:

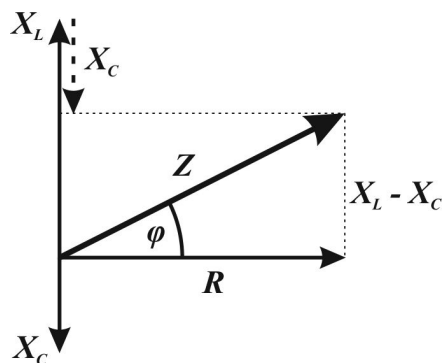
$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{Q}{C} = U_0 \sin \omega t.$$

Ennek megoldása $i = \frac{dQ}{dt}$ felhasználásával a matematikai részletezéstől eltekintve:

$$i = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \sin(\omega t + \varphi),$$

ahol $\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$, a kezdőfázis. A megoldásból levonható következtetések:

1. A körben folyó áram frekvenciája megegyezik a generátor frekvenciájával (a kényszerzés stacionárius állapota).
2. A $\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ mennyiség az áramkör eredő *látszólagos ellenállása*, vagy ún. *impedanciája*, amit Z -vel jelölünk. Tehát arra következtethetünk, hogy az egyes sorba kapcsolt áramköri elemek ellenállásai (reaktanciái) nem algebrailag adódnak össze, mint az egyenáramú hálózatokban a sorba kapcsolt ohmos fogyasztók, hanem a 3.57. ábra szerint látható módon vektoriálisan:



3.57. ábra: RLC-kör impedanciája

3.5.3. Nagyfrekvenciájú elektromágneses rezgések

Az ún. *technikai váltakozó áramokat* (rezgéseket) elektromechanikus generátorokban állítják elő ($f_{max} \sim 300 \text{ Hz}$), amelyeket mechanikai energiával forgatnak. Ezeknek a váltakozó áramoknak a háztartási és ipari elektromos energia ellátásban van nélkülözhetetlen szerepe, feszültségük a gazdaságos szállítás céljainak és a fogyasztó igényeinek megfelelően fel-, ill. letranszformálható.

Felhasználhatóság szempontjából nagy jelentőséggel bírnak a néhány száz kHz -től néhány száz GHz frekvenciáig terjedő elektromágneses rezgések, amelyek *mozgó alkatrészek nélküli* elektronikus eszközökkel állíthatók elő.

Ezeket a rezgéseket közös néven *rádiófrekvenciás rezgéseknek* nevezzük, és frekvencia szerint osztályozzuk őket:

– hosszúhullámok:		$f < 300 \text{ kHz}$		$\lambda > 10^3 \text{ m}$
– középhullámok:	300 kHz	$< f < 3 \text{ MHz}$	10^3 m	$> \lambda > 10^2 \text{ m}$
– rövidhullámok:	3 MHz	$< f < 30 \text{ MHz}$	10^2 m	$> \lambda > 10 \text{ m}$
– ultrarövid hullámok:	30 MHz	$< f < 300 \text{ MHz}$	10 m	$> \lambda > 1 \text{ m}$
– mikrohullámok:	300 MHz	$< f < 300 \text{ GHz}$	1 m	$> \lambda > 10^{-3} \text{ m}$

Ezek az elektromágneses rezgések szabad térbe (levegőbe, vákuumba) kisugározhatók és transzverzális *hullámként* terjednek (l. később). A rádióhullámok hullámhossz-tartománya tehát mintegy hat nagyságrendet fog át ($1 \text{ mm} - 1 \text{ km}$).

3.6. A vákuumbeli eltolási áram

Az 1870-es évekre az elektromosság és mágnesség törvényei a következő formában voltak ismertek:

Coulomb-törvény:
$$F_C = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Gauss-törvény:
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum Q}{\epsilon_0}$$

Elektromágneses Lorentz-erőtörvény:
$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}$$

Ampère-féle gerjesztési törvény:
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int \vec{J}_v \cdot d\vec{A}$$

Faraday-féle indukciós törvény:
$$u_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Ezek az egyenletek nem tartalmazzak összefüggést az időben változó térerősségű $\vec{E}(t)$ elektromos és változó indukciójú $\vec{B}(t)$ mágneses mező között. Az akkor ismert egyenletekből nem következik az elektromágneses hullámok létezése.

Maxwell felismerte, hogy az Ampère-féle gerjesztési törvény nem teljes, bizonyos esetekben ellentmondásra vezet. Kísérleti bizonyíték híján, elméleti úton arra a következtetésre jutott, hogy az $\vec{E}(t)$ térerősségű elektromos mező időbeli változása ún. *eltolási áramot* kelt, amelynek áramsűrűsége:

$$\vec{J}_e = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}.$$

A vákuumbeli eltolási áram következménye, hogy körülötte \vec{B} indukciójú mágneses mező jön létre. Ez a feltételezés csak az elektromágneses hullámok felfedezésével (Heinrich HERTZ, 1887) vált bizonyítottá.

Ezzel az Ampère-féle gerjesztési törvény a Maxwell által történt kiegészítéssel

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int \left(\vec{J}_v + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A}$$

alakúra változott.

A fenti törvény a Maxwell által egyesített elektromágneses elmélet **VI. egyenlete**, amely vákuumban írja le a mágneses mező ún. örvényerősségét. A törvény szavakban megfogalmazva:

„A mágneses mező örvényes, a mező indukcióvonalai mindig önmagukba záródó görbék.”

3.7. A vákuumbeli Maxwell-egyenletek rendszere

A Maxwell által egyesített elektromágneses elméletet négy egyenlet írja le, amely minden elektromágneses problémára megoldást ad, és ma **Maxwell-egyenleteknek** nevezzük. Ezek az alábbiak:

I.
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum Q}{\epsilon_0}$$

„A sztatikus elektromos mező forrásos, forrásai az elektromos töltések. A sztatikus elektromos mező erővonalai a töltésekből indulnak, és a végtelenbe tartanak.”

II.
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

„Az időben változó mágneses mező örvényes elektromos mezőt indukál. Az indukált elektromos mező erővonalai önmagukba záródó görbék.”

III.
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

„A sztatikus mágneses mező forrásmentes, valódi mágneses töltések (pólusok) nem léteznek. Egy zárt felületből mindig ugyanannyi erővonal lép ki, mint amennyi belép.”

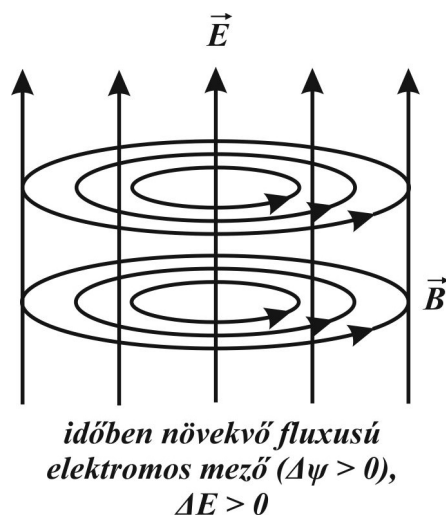
IV.
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int \left(\vec{J}_v + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A}$$

„Az időben változó elektromos mező, valamint a vezetési elektromos áramok örvényes mágneses mezőt indukálnak. A mágneses mező indukcióvonalai önmagukba záródó görbék.”

3.8. Elektromágneses hullámok

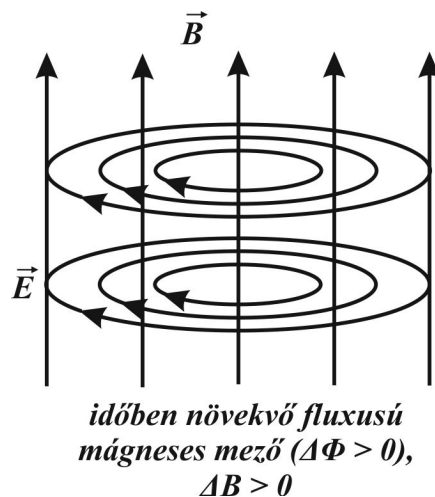
Előzetesen foglaljuk össze a tapasztaltakat:

1. Ha a IV. Maxwell-egyenletben $\vec{J}_v = 0$ és \vec{E} egyenletesen változó, vagyis $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{állandó}$, akkor időben állandó, \vec{B} indukciójú örvényes mágneses mező jön létre (3.58. ábra) ([12. Animáció: Indukált örvényes elektromos mező I.](#)):



3.58. ábra: Indukált örvényes mágneses mező

2. Ha a II. Maxwell-egyenletben \vec{B} egyenletesen változó, vagyis $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{állandó}$, akkor időben állandó, \vec{E} térerősségű örvényes elektromos mező jön létre (3.59. ábra) ([13. Animáció: Indukált örvényes elektromos mező II.](#)):



3.59. ábra: Indukált örvényes elektromos mező

Ez arra enged következtetni, hogy az időben *nem egyenletesen változó* elektromos mező időben változó indukciójú, örvényes mágneses mezőt hoz létre, ami pedig időben változó tér-

erősségű, örvényes elektromos mezőt hoz létre stb. Ez a hatás tehát képes az elektromos és mágneses mezők indukciója révén terjedni a térben.

A Maxwell-egyenletekből levezethető, hogy az időben változó mágneses mező által indukált elektromos mezőt (a levezetéstől bonyolultsága miatt eltekintve) legegyszerűbb esetben egy dimenzióban a

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

parciális differenciálegyenlet, ún. *hullámeqyenlet* írja le, ahol $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$, a fénysebesség. Ez matematikailag azonos a Mechanika c. részben ismertetett hullámeqyenlettel és megoldása:

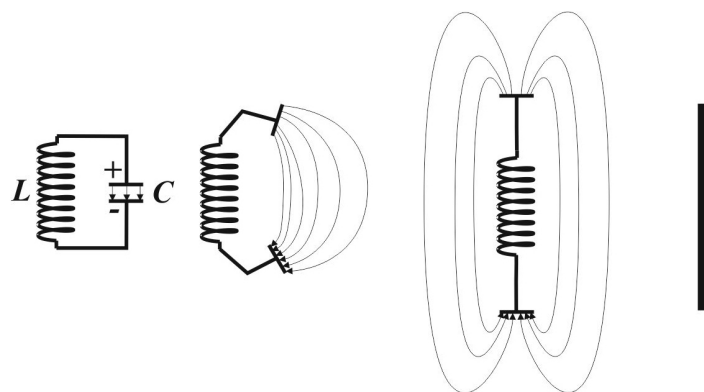
$$E_y(x, t) = E_{y,0} \sin \omega \left(t - \frac{c}{x} \right)$$

Ennek tudatában jutott Maxwell arra a következtetésre, hogy létezniük kell a rezgési centrumról leváló és szabadon távolodó, fénysebességgel terjedő *elektromágneses hullámoknak*. Ez a gondolat vezetett oda, hogy a fény elektromágneses hullám.

3.8.1. Az elektromágneses rádióhullámok keletkezése

Elektromágneses hullámok számos módon kelthetők, de mindegyik azon az elvi alapon nyugszik, hogy a sugárzást *gyorsuló töltések* bocsájtják ki.

Korábban láttuk, hogy zárt rezgőkörben az elektromos és a mágneses mező a kondenzátorban, ill. a tekercsben lokalizálódik, rezgési energia kisugárzása nem történik. Ha azonban a tekercsből és a kondenzátorból álló rezgőkör térbeli geometriáját a 3.60. ábra szerint módosítjuk, akkor az elektromos és a mágneses mező nagyobb tartományra terjed ki, az elektromos mező erővonalai a kondenzátoron kívül, az ellentétes töltésű fegyverzetten záródnak, és ezért időbeli változása folytán örvényes mágneses mező indukálódik az elektromos erővonalakra merőlegesen. Az indukált mágneses mező időbeli változása örvényes elektromos mezőt indukál az indukcióvonalakra merőleges síkokban, és így tovább. A Maxwell-egyenletek értelmében az egymást indukáló, időben változó mezők *fénysebességgel* távolodnak a rezgést keltő centrumtól (antennától).

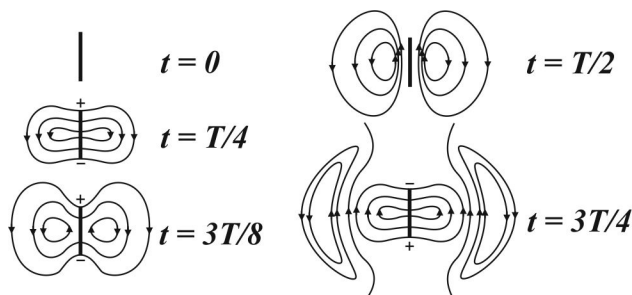


zárt rezgőkör

dipólantenna

3.60. ábra: Dipólantenna előállítás LC rezgőkörből

Természetesen a kisugárzott energia a nyitott LC -rezgőkörben (antennában) lévő energiát fokozatosan csökkenti, és a rezgés megszűnésekor a kisugárzás is megszűnik. A hullámokat kibocsátó antenna hossza a keletkezett elektromágneses hullám hullámhosszának fele $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$, a rezgés során a végei (a kondenzátorok fegyverzetei) felváltva pozitív, ill. negatív töltésűek, ezért *dipólus-antennának* (röviden: dipólantennának), az ilyen antenna által kisugárzott elektromágneses hullámokat *dipólusugárzásnak* nevezzük.

3.61. ábra: Dipólusugárzás E -vonalai az idő múlásával

A hullám terjedését vizsgáljuk meg egy adott irány mentén, ami legyen az antenna hosszten-gelyére merőleges x irány. Ekkor az \vec{E} elektromos térerősség rezgése az y irányban történik, míg a \vec{B} mágneses indukcióé z irányban, ezért az x irányú terjedésüket leíró hullámfüggvé-nyek:

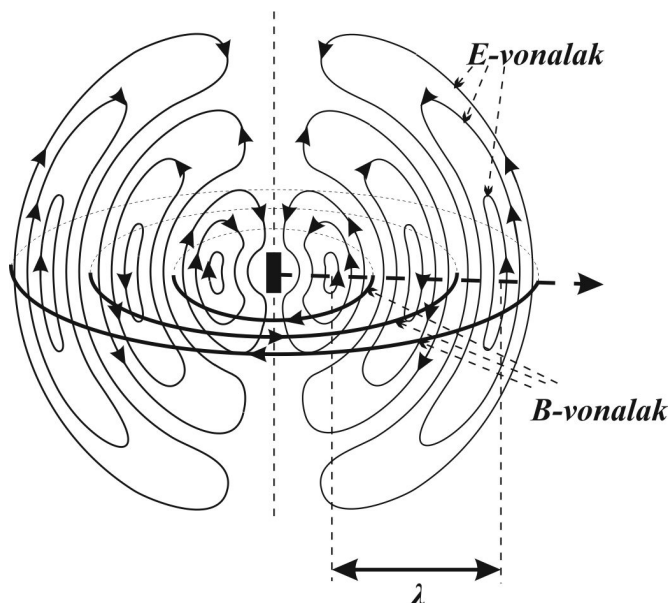
$$E_y(x,t) = E_{y,0} \sin \omega \left(t - \frac{c}{x} \right),$$

és

$$B_z(x,t) = B_{z,0} \sin \omega \left(t - \frac{c}{x} \right).$$

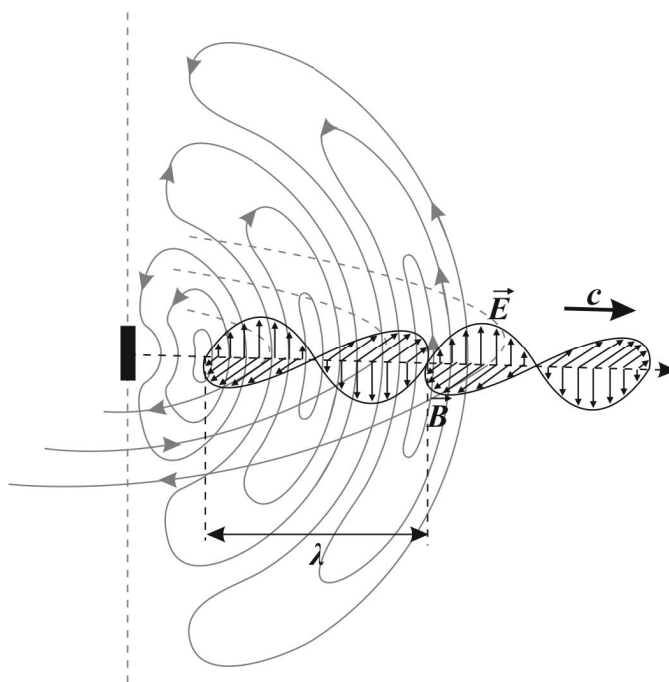
Láthatjuk, hogy a dipólsugárzási mező egy adott helyén az \vec{E} és \vec{B} vektorok nagyságát egymásra és a hullám terjedésének irányára egyaránt merőleges harmonikus rezgések írják le, amelyek *azonos fázisban* vannak egymással.

A dipólantenna állandó teljesítményű sugárzásának feltétele, hogy energia-utánpótlásról kell gondoskodni, amely váltakozó feszültségű áramforrás (oszillátor) rákapcsolásával lehetséges. A 3.62. ábra állandó sugárzási teljesítményű dipólantenna körül kialakuló és fénysebességgel távolodó elektromos mezőnek az erővonalait és az ezek által indukált, az antenna tengelyére merőleges mágneses indukcióvonalakat szemlélteti.



3.62. ábra: Dipólsugárzás E - és B -vonalai

A hullámnak az antenna tengelyére merőleges irányban kijelölt x tengelyen vizsgált haladási irányában berajzolt y irányú elektromos erővonalak és arra merőleges z irányú mágneses indukcióvonalak érintői, \vec{E} és \vec{B} vektorok, a szinuszos elektromágneses rezgések hullámképét rajzolják ki (3.63. ábra):



3.63. ábra: Szinuszos elektromágneses hullám

3.8.2. Az elektromágneses hullámok energiasűrűsége

A elektromágneses hullámban terjedő *rezgési energiát* számértékileg az egységnyi felületen egységnyi idő alatt áthaladó rezgési energiával, vagy ún. felületi *teljesítménysűrűséggel* jellemezzük:

$$S = \frac{1}{\mu_0} E_y B_z.$$

A felületi teljesítménysűrűség jele: S , SI-beli mértékegysége: $\frac{W}{m^2}$. A felületi teljesítménysűrűség-vektort, vagy más néven *Poynting-vektort* a \vec{E} és \vec{B} vektorok vektoriális szorzataként kapjuk:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B},$$

amelynek nagysága a felületi teljesítménysűrűség, iránya a hullám terjedésének irányával egyezik meg. E_y és B_z szinuszosan váltakozó értékeinek felhasználásával az \vec{S} Poynting-vektor abszolút értéke:

$$S = \frac{1}{\mu_0} E_{y,0} B_{z,0} \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{c} \right),$$

ami azt jelenti, hogy egy periódusidő alatt kétszer éri el a maximumát.

3.8.3. A rádióhullámok alkalmazásai

Néhány esettől eltekintve a rádióhullámokat *információátvitelre* használják. Ehhez a továbbítani kívánt információt (pl. hangot, képet) hordozó elektromos jelet a rádióhullámra kell szuperponálni, azaz a rádióhullámot információhordozóvá kell alakítani. A továbbítani kívánt információt *modulációval* visszük a nagyfrekvenciás vivő hullámra, amelynek valamely jellemzőjét változtatjuk meg az információt tartalmazó jellel. Eszerint beszélünk

- *Amplitúdómodulációról*, amikor a továbbítani kívánt információnak megfelelően a vivőrezgés *amplitúdóját* változtatjuk meg.
- *Frekvenciamodulációról*, amikor a továbbítani kívánt információnak megfelelően a vivőrezgés *frekvenciáját* változtatjuk meg.
- *Fázismodulációról*, amikor a továbbítani kívánt diszkrétén változó információnak megfelelően a vivőrezgés *fázisát* változtatjuk meg.

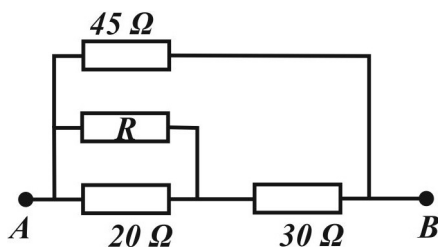
Orvosi alkalmazásban kiemelkedő jelentőséggel bír a rádióhullámok felhasználása a *képalkotás* és a *terápia* területén. A mag-mágneses rezonancián alapuló képalkotás során hidrogén atommagok mágneses térrel történő kölcsönhatásakor ultrarövid hullámhosszú rádióhullámok sugárzásának analizálásával nyernek információt a szövetek víztartalmáról és vízmozgásáról. A mikrohullámú tartomány hőfejlődésen alapuló hatását sugárterápiás céllal alkalmazzák gyulladások kezelésére.

A rádióhullámoknál rövidebb hullámhosszú (nagyobb frekvenciájú) elektromágneses hullámok is léteznek, pl. fény stb. Ezek keletkezéséről, természetéről és kölcsönhatásaikról az Atomfizika c. részben lesz szó.

3.9. Megoldandó feladatok

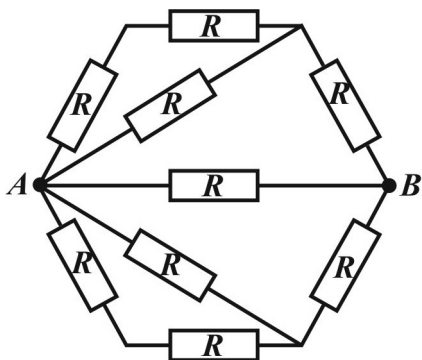
- Mekkora távolságra van egymástól az a két pontszerű test, amelynek töltése $2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ és $3 \cdot 10^{-8} \text{ C}$, és 60 N nagyságú erővel taszítják egymást?
- Mekkora két egyenlő nagyságú töltés taszítja egymást 10 m távolságból 100 N nagyságú erővel?
- $2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ és $-3 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ nagyságú pontszerű töltések távolsága 10 cm . Mekkora erő hat a $6 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ nagyságú töltésre, ha azt az előbbi két töltés közötti távolság felezőpontjában helyezzük el?
- $6 \cdot 10^{-5} \text{ C}$ töltésű, rugóhoz erősített test 15 cm -t mozdul el, ha a $-8 \cdot 10^{-5} \text{ C}$ töltésű testet az A pontban rögzítjük. Ekkor a két töltés távolsága 60 cm . Számítsuk ki a rugóállandót!
- Két elektromosan töltött pontszerű test távolsága 1 m , töltésük $2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ és $-5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$. Számítsuk ki, hogy a térnek melyik pontjában lesz a két töltéstől származó térerősség eredője zérus!
- Mekkora a térerősség abban az elektromos mezőben, amelyben egy elektron gyorsulása $2,5 \cdot 10^{14} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ nagyságú?
- Milyen előjelű és mekkora töltést kell elhelyezni egy $2 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ pozitív pontszerű töltéstől 1 m távolságban, hogy a két töltést összekötő egyenes mentén, a megadott töltéstől 25 cm távolságban a térerősség nagysága zérus legyen?
- Szalaggenerátorral feltöltött, egymástól 10 cm távolságban levő párhuzamos lemezek között homogén erőter van. Mekkora a térerősség, ha a lemezek között a feszültség 5000 V ?
- Mekkora sebességre tesz szert a kezdetben nyugvó elektron két pont közötti elmozdulása közben, ha a két pont közötti feszültség 5000 V ?
- Mekkora a feszültség az elektromos mező azon két pontja között, amelyeknél egy 10 C nagyságú töltést 600 J munka árán mozgat?
- Mekkora a munkavégzés, ha egy $0,01 \text{ C}$ nagyságú töltés 1000 V feszültségen halad át? Mekkora a térerősség? Mekkora erő hat a töltésre, ha a feszültség 10 cm úton egyenletesen növekszik?
- Mennyi munkát végez az elektrosztatikus mező, miközben a $3 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ töltést a 8 V potenciálú helyről 4 V potenciálú helyre mozgatja?
- A $10 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ térerősségű, homogén elektromos mező két pontja között a feszültség 25 V .
Mekkora erő hatása alatt mozog a két pont között az a töltés, melyen a mező 200 J munkát végez?
- Mekkora lesz az eredő kapacitás, ha $1 \mu\text{F}$ és $5 \mu\text{F}$ kapacitású kondenzátorokat először párhuzamosan, majd sorba kapcsoljuk egymással?
- Mekkora feszültséget kell egy $16 \mu\text{F}$ -os kondenzátorra kapcsolni, hogy energiája 20 J legyen?
- Sorosan kapcsolunk egy $4 \mu\text{F}$ -os és egy $6 \mu\text{F}$ -os kondenzátort. Mekkora töltéstől töltődik fel a rendszer 220 V -ra?
- Egy 150 V -ra töltött $2 \mu\text{F}$ -os és egy 100 V -ra töltött $3 \mu\text{F}$ -os kondenzátort párhuzamosan kapcsolunk úgy, hogy az egynemű töltéseket tároló fegyverzeteket kötjük össze. Mekkora a feszültség az így kapott kondenzátor fegyverzetei között?
- Ugyanaz a töltésmennyiség a $10 \mu\text{F}$ kapacitású kondenzátoron kétszer akkora feszültséget hoz létre, mint a C_2 kapacitásún. Mekkora a C_2 kapacitás?
- Síkkondenzátor vízszintes fegyverzeteinek távolsága 1 cm , feszültsége 1000 V . A fegyverzetek közötti légtérben töltött olajcsepp lebeg, a lemezekről egyenlő távolságban. A feszültség hirtelen 995 V -ra csökken. Mennyi idő múlva jut az olajcsepp az alsó lemezre?

20. Egy kondenzátor lemezei között a távolság 8 cm . A lemezek között lévő homogén elektromos mező térerősségének értéke $2 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$. A lemezeket 6 cm -re közelítjük egymáshoz. Mennyivel változott meg a lemezek közötti feszültség?
21. Mekkora az R ellenállás értéke, ha a 3.64. ábrán látható kapcsolásban az A - B pontok között $15\ \Omega$ ellenállást mérhetünk?



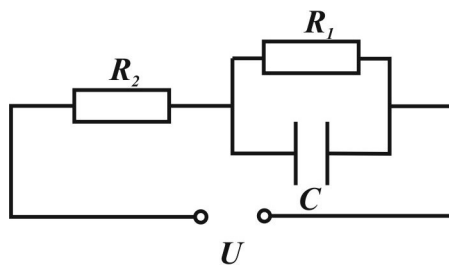
3.64. ábra: 21. Feladathoz

22. Számítsuk ki a 3.65. ábrán látható áramkör eredő ellenállását az A - B pontok között!



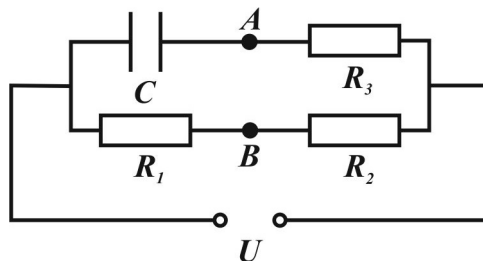
3.65. ábra: 22. Feladathoz

23. A 3.66. ábrán vázolt áramkörben $U = 4,5\text{ V}$, $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 12\ \Omega$, $C = 300\ \mu\text{F}$. A telep belső ellenállása elhanyagolható. Mekkora a feszültség az R_2 ellenálláson? Mekkora a kondenzátor töltése?



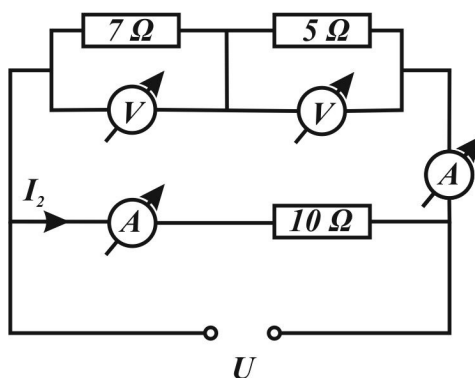
3.66. ábra: 23. Feladathoz

24. Az ábrán látható kapcsolásban $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $U = 60\text{ V}$. Mekkora a feszültség az A és a B pontok között?



3.67. ábra: 24. Feladathoz

25. A 3.68. ábra szerinti kapcsolásban az egyik ampermérő $I_2 = 2\text{ A}$ erősségű áramot jelez. Az ampermérők ellenállása elhanyagolható, a voltmérők ellenállása végtelennek tekinthető. Mit mutatnak a voltmérők, és a másik ampermérő?



3.68. ábra: 25. Feladathoz

26. Homogén, $3 \cdot 10^{-3}\text{ T}$ indukciójú mágneses mezőbe helyezett egyenes vezetőben 10 A erősségű áram folyik. Mekkora erővel hat a mágneses mező a vezetőre?
27. Egyenes vezető 20 cm hosszú szakasza $0,1\text{ T}$ indukciójú mágneses mezőben van. Mekkora és milyen irányú erő hat erre a vezetőre, ha az indukcióvonalakra merőlegesen helyezkedik el és benne 5 A erősségű áram folyik.
28. Homogén $0,8\text{ T}$ erősségű mágneses mezőben 150 menetes lapos tekercset helyeztünk el. A tekercsben $0,5\text{ A}$ áram folyik, síkja az indukcióvonalakkal párhuzamos, keresztmetszete 10 cm^2 . Mekkora forgatónyomaték hat a tekercsre?
29. Mekkora sugarú pályán mozog egy 500 eV kinetikus energiájú elektron $0,01\text{ T}$ mágneses indukciójú homogén mágneses mezőben az indukcióvonalakra merőleges irányban?
30. Százas menetszámú, 20 cm^2 felületű, lapos tekercset $0,45\text{ T}$ indukciójú, a tekercs síkjára merőleges mágneses mezőbe helyezzük. Számítsuk ki a tekercs végpontjai közötti indukált feszültség nagyságát, ha a mágneses indukció nagysága $0,05\frac{\text{T}}{\text{s}}$ sebességgel változik!
31. Két párhuzamos vízszintes síkban fekvő egymástól $0,6\text{ m}$ -re lévő sín egyik végét $1\ \Omega$ ellenállású vezetékkel kötjük össze. A sínekre fém rudat fektetünk, amelyre a sínekkel párhuzamosan 1 N erőt fejtünk ki. A rúd 1 T indukciójú homogén mágneses mezőben mozog. A súrlódástól és a közegellenállástól tekintünk el. Mekkora sebességre gyorsulhat fel a rúd?
32. Számítsuk ki az 1 cm^2 keresztmetszetű 10 cm hosszú és 1000 menetszámú tekercs öninduktivitását! Mekkora az indukált ellenfeszültség, ha a tekercsen átfolyó áram erőssége egyenletesen $15\frac{\text{A}}{\text{s}}$ sebességgel nő?
33. Mennyi a 220 V effektív feszültségű váltakozó feszültség pillanatnyi értéke 27° -os fázisban?

-
34. Mennyi idő alatt emelkedik a hálózati váltakozó feszültség nulláról a maximális érték harmadára?
35. Mekkora frekvenciájú váltakozó feszültséggel szemben mutat 70Ω induktív ellenállást a $0,8 H$ önindukciós tekercs?
36. $50 Hz$ -es áramkörbe 50Ω ohmos ellenállást és ismeretlen önindukciós együtthatójú tekercset kapcsolunk sorba $\varphi = 45^\circ$. Mekkora L értéke? Mekkora kapacitású kondenzátor soros kapcsolása szünteti meg a fáziseltolódást?

4. Fénytan (optika)

A *Fénytan* a fizikának a fényjelenségekkel foglalkozó része. Feladata a fény érzetét keltő jelenségek törvényszerűségeinek vizsgálata. A *fény elektromágneses hullám*, amelynek fényérzetet keltő hullámhossz-intervalluma: $380 \text{ nm} < \lambda < 780 \text{ nm}$.

Fényérzékelésünk egy jellegzetes tulajdonsága, hogy a különböző hullámhosszúságú fénysugarakat különböző színűnek érzékeljük (vöröstől ibolyáig). Tágabb értelemben, amikor eltekintünk a fényérzetet keltő hatástól, fénynek nevezzük a 380 nm -nél rövidebb és a 780 nm -nél hosszabb hullámhosszú elektromágneses sugárzást is, melybe a nem látható, de műszerekkel jól detektálható sugárzások, mint az infravörös (hő), az ultraibolya, a röntgen, a γ - és a kozmikus sugárzás is beletartoznak.

A *fény* mint hullám a hullámokra általánosan jellemző tulajdonságokat mutat, ilyenek az *interferencia*, az *elhajlás* és a *polarizáció*. Számos jelenség (pl. fotoemisszió) során a fény úgy viselkedik, mint fénysebességgel haladó részecskék (fotonok, fénykvantumok) áramlása. Ebben áll a *fény ún. kettős természete*. Azt mondhatjuk, hogy a fény hullámként, illetve fotonok áramaként való leírása a fény valódi természetének csupán *modelljei*. Valamely fényvel kapcsolatos jelenség értelmezésénél a fényre mindig annak a modellnek a keretében érdemes tekinteni, amelynek segítségével a jelenség a legegyszerűbben megérthető és leírható.

Egy harmadik (és egyben legegyszerűbb) közelítésben az ún. *Geometriai optikában* az átlátszó közegben történő fényterjedést vizsgáljuk, a fényt vonalak mentén (homogén és izotróp közegben egyenes mentén) terjedőnek tekinthetjük. A geometriai optika a hullámoptika azon határesetete, amikor $\lambda \rightarrow 0$, illetve a hullámhossz elhanyagolhatóan kicsiny azokhoz a testekhez képest, amelyen a fény áthatol (pl. lencsék). A geometriai optika mindaddig jó közelítést ad az optikai rendszerek vizsgálatában, míg a fény hullámhossza a térben eléje kerülő akadályok és nyílások lineáris méretéhez képest elég kicsi.

4.1. Geometriai optika

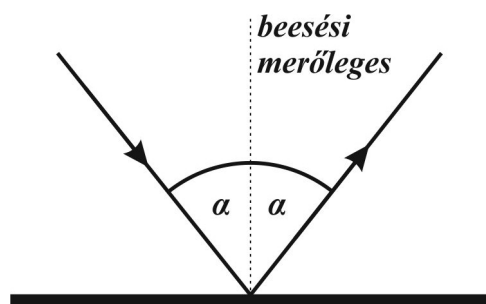
A geometriai optika axiómái:

1. Homogén közegben a fénysugarak egyenes vonalban terjednek és vákuumban a fénysebesség $2,99792458 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.
2. A fénysugarak útja megfordítható.
3. A fénysugarak függetlenek egymástól (nem lépnek kölcsönhatásba egymással).

A geometriai optika két alapvető törvénye a *visszaverődés* és a *törés*, amelynek részletes tárgyalása a Mechanika c. rész Mechanikai hullámok című fejezetében volt. Itt a két jelenségnek csak tapasztalati törvényeit és alkalmazásait foglaljuk össze a fény szempontjából.

4.1.1. A fényvisszaverődés

A közegethatárhoz érkező fénysugár *egy része* a határfelületen *visszaverődést* szenved. A beeső fénysugár beesési merőlegessel bezárt α szöge és a visszavert fénysugár beesési merőlegessel bezárt α' szöge egyenlő nagyságú. A beeső fénysugár, a beesési merőleges és a visszavert fénysugár egy síkban van (4.1. ábra):



4.1. ábra: Fényvisszaverődés

4.1.2. Leképezés visszaverődött fénynyalábokkal

A Geometriai optika modellje jól alkalmazható az *optikai leképezésekre* (fényvisszaverő, fénytörő testekre, készülékekre).

Egy tárgy, vagy fénykibocsátó test *valódi képéről* beszélünk akkor, ha a tárgy egyes pontjaitól kiinduló fénysugarak az optikai rendszer (tükrök, lencsék stb.) hatására újra *egyesülnek* (egy-egy pontban találkoznak). A valódi kép *ernyőn felfogható* (pl. fényképezőgép, szemünk).

Egy tárgy *látszólagos* (virtuális) *képéről* van szó, ha a tárgy egyes pontjaiból kiinduló fénysugarak az optikai rendszer hatására *széttartanak*, mintha a tér egy pontjából (nem a kibocsátó vagy visszaverő testből) indultak volna ki. A látszólagos kép *nem fogható fel ernyőn*, de a szem képes érzékelni azáltal, hogy a széttartó fénysugarak látszólagos metszéspontjában látja a fényt kibocsátó vagy az azt visszaverő helyet.

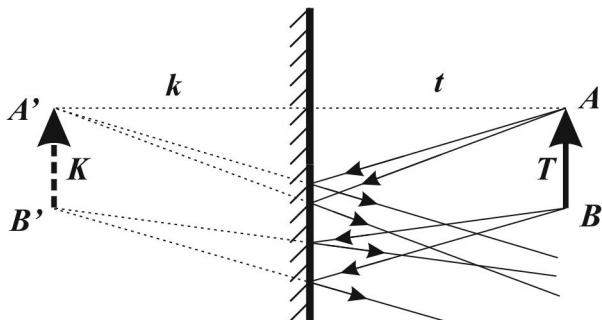
A képalkotás vizsgálatánál (szerkesztésénél) egy tárgy végtelen sok pontja (tárgypontok) közül elegendő néhány jellemző pontot kiválasztani (gyakran egy is elég), hogy az optikai rend-

szeren történő sugárterjedést tanulmányozhassuk. Egy tárgypontra esetében elegendő két (leg-egyszerűbben nyomon követhető) fénysugár útjának megfigyelése, mert a leképezés után a metszéspontban találkoznak, ami alkalmas a képpont megszerkesztésére.

Az *optikai leképezés* a tárgyat alkotó tárgypontról kiinduló fénysugaraknak az optikai elemek (síktükrök, gömbtükrök, lencsék) segítségével történő átalakítása a képpontokba.

4.1.2.1. A síktükör képalkotása

A síktükör szabályosan visszaverő (reflektáló) felület.

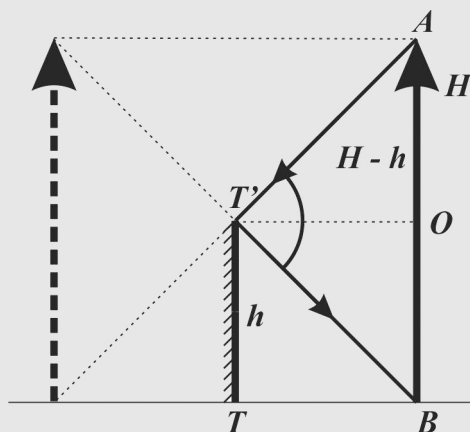


4.2. ábra: Síktükör képalkotása

A 4.2. ábra és a fényvisszaverődés törvénye alapján belátható, hogy a szembe érkező, visszavert fénysugarak meghosszabbításai a síktükör mögött találkoznak, tehát a *síktükör látszólagos* (virtuális) *képet alkot*. Továbbá: a tárgynak a tükörtől mért *t tárgy távolsága* megegyezik a látszólagos kép tükörtől mért *k képtávolságával*. Ebben az esetben $k < 0$, ami a látszólagos képre utal. A *kép K* lineáris mérete a tárgy *T* lineáris méretével megegyezik, a tárggyal *egyál-*
lású.

4.1. Példa: A tükör mérete

Mikor látja a szemlélő az ábra szerinti $h = \overline{TT'}$ magasságú síktükörben a $H = \overline{AB}$ magasságú tárgyat teljes magasságban?



4.3. ábra: Tükör mérete

Megoldás:

A 4.3. ábra alapján:

Mivel a $T'OA$ csúcsokból álló háromszög és a TBT' csúcsokból álló háromszög egybevágó, ezért $h = H - h$, vagyis

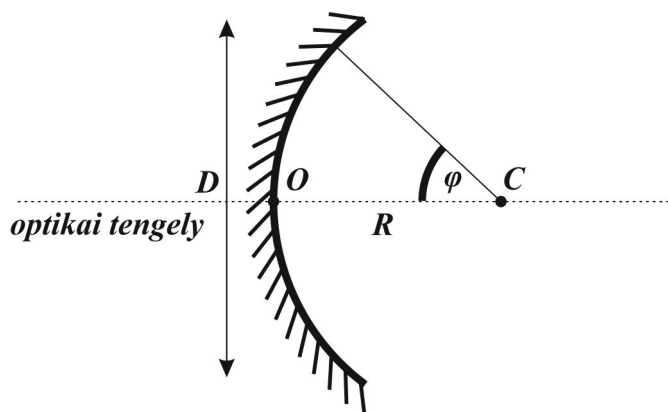
$$h = \frac{H}{2}$$

esetén látszik a tárgy teljes magasságában. Ez a tükör T' pontját és a tárgy B pontját összekötő egyenes irányában teljesül.♣

4.1.2.2. A gömbtükrök képképzése

Ha a tükröző felület nem sík, hanem görbe, akkor azokat *görbe tükröknek* nevezzük. A gömb alakú tükrök a *gömbtükrök*, amelyek a tükröző felület hollététől függően (homorú oldal vagy domború oldal) *homorú* vagy *domború gömbtükrőről* beszélünk. A gömbtükör görbületi középpontja a gömbtükör C *geometriai középpontja*. A gömbüvegen lévő szimmetriapont a gömbtükör O *optikai középpontja*. Az OC egyenes a gömbtükör *optikai főtengelye*, és $\overline{OC} = R$ a gömbtükör *görbületi sugara*. A tükör széléhez a C geometriai középpontból húzott egyenes és az OC optikai főtengely által bezárt φ szög a tükör *nyílásszöge* (4.4. ábra).

4.1.2.2.1. A homorú gömbtükör



4.4. ábra: Homorú gömbtükör

A 4.4. ábra alapján a D magasságú tükör radiánban mért nyílásszöge nagy R görbületi sugár esetén az

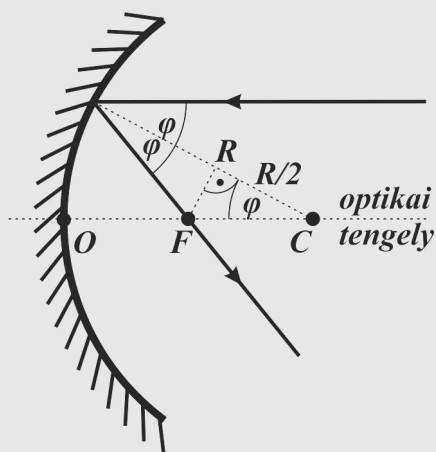
$$R\varphi = \frac{i}{2} \approx \frac{D}{2}$$

alapján:

$$R \approx \frac{D}{2\varphi}.$$

4.2. Példa: A gömbtükör fókuszpontjának helyének meghatározása

A homorú gömbtükör tengelyével párhuzamosan érkező fénysugár visszaverődés után az F pontban metszi a főtengelyt. Határozzuk meg a pont helyét a főtengelyen!



4.5. ábra: Homorú gömbtükör fókuszpontja

Megoldás:

A 4.5. ábra alapján:

$$\cos \varphi = \frac{R}{FC},$$

és ebből:

$$\overline{FC} = \frac{R}{2 \cos \varphi}.$$

Ha $\varphi \rightarrow 0$, akkor $\cos \varphi \rightarrow 1$, akkor:

$$\overline{FC} \rightarrow \frac{R}{2}.$$

Ez a határérték már $\varphi < 5^\circ$ esetén is elenyészően kis hibával teljesül, vagyis a nagyon kis φ nyílásszögű gömbtükör optikai főtengelyével párhuzamosan érkező, ún. *paraxiális* fénysugarak a tükörről való visszaverődés után ugyanabban az F pontban, az ún. *fókuszpontban* (vagy gyújtópontban) metszik egymást, melynek helyét az optikai tengelyen az

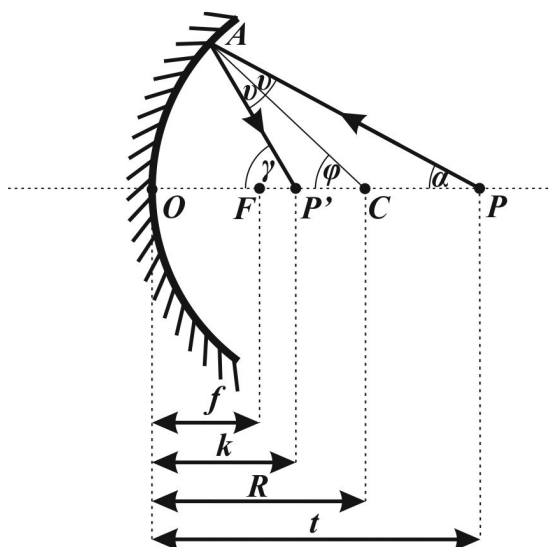
$$\overline{FC} = \overline{OF} = \frac{R}{2}$$

összefüggés határozza meg. ♣

Paraxiális sugarak esetében tehát a gömbtükör F fókuszpontja felezi a C geometriai középpont és az O optikai középpont közötti R távolságot (a gömb sugarát). Ennek megfelelően az \overline{OF} távolság, vagyis a gömbtükör f fókusz távolsága:

$$\overline{OF} = f = \frac{R}{2}.$$

4.1.2.2.2. Leképezési törvény paraxiális sugarak esetén



4.6. ábra: Homorú tükör leképezési törvénye

A 4.6. ábrán látható geometriai elrendezésű homorú gömbtükör optikai tengelyén lévő P pontban található tárgyról érkező fénysugár visszaverődés után a P' pontban metszi az optikai tengelyt. A φ szög a PCA háromszög külső szöge, ezért:

$$\varphi = \alpha + \nu,$$

valamint hasonló megfontolással igaz a $CP'A$ háromszögre, hogy:

$$\gamma = \varphi + \nu,$$

amiből:

$$\alpha + \gamma = 2\varphi$$

adódik. Ha $\alpha \leq \varphi$, akkor jó közelítéssel igaz, hogy:

$$\alpha = \frac{\widehat{OA}}{t}, \quad \varphi = \frac{\widehat{OA}}{R} \quad \text{és} \quad \gamma = \frac{\widehat{OA}}{k}.$$

Ezekből:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{2}{R}$$

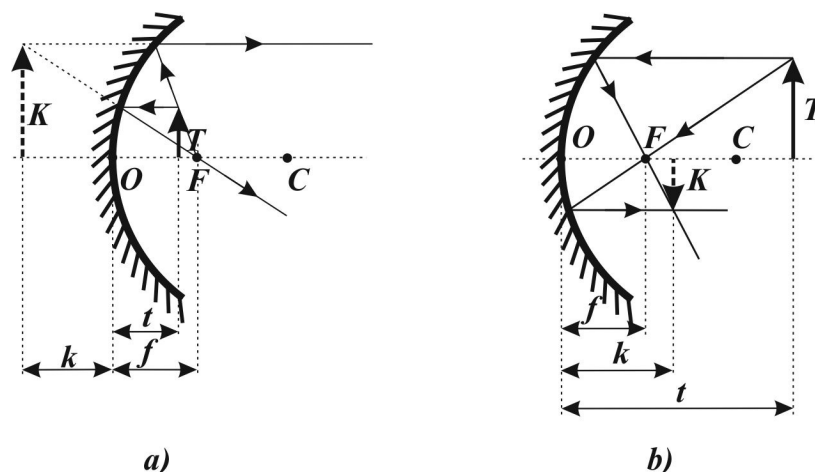
összefüggést kapunk, azaz az f fókusz távolságú gömbtükrő által leképezett az O optikai középponttól t tárgytávolságban lévő tárgy k képtávolsága a következő összefüggés alapján számítható ki:

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t}}.$$

A homorú gömbtükrőre vonatkozó legfontosabb sugármeneti tulajdonságok a fentiekből következően:

1. Az optikai tengellyel párhuzamosan beérkező fénysugarak visszaverődés után az F fókuszpontra mennek át.
2. Az F fókuszról kiinduló fénysugarak a tükröt az optikai tengellyel párhuzamosan hagyják el (reflektor-hatás).

Egy tükör előtt álló tárgy képét ezen ismeretek birtokában speciális szerkesztősugarakkal tudjuk megszerkeszteni (4.7. ábra, [14. Animáció: Homorú gömbtükrő képalkotása](#))



4.7. ábra a) és b): Homorú gömbtükrő képalkotása

A tárgy T tárgyméretének és a kép K képméretének arányát N *lineáris nagyításnak* nevezzük és megegyezik a k képtávolság és a t tárgytávolság arányával:

$$N = \frac{K}{T} = \frac{k}{t}.$$

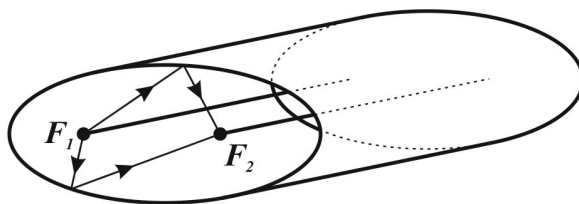
Ha $N > 1$, nagyításról, míg $N < 1$ esetén kicsinyítésről beszélünk.

A leképezés törvényében szereplő mennyiségek *előjeles* mennyiségek. Homorú gömbtükrőnél $t > 0$, $f > 0$ és $k > 0$ esetén a kép valódi és fordított állású, míg $t > 0$, $f > 0$ és $k < 0$ esetben látszólagos, egyenes állású és mindig nagyított.

Nagyobb nyílású tükrőknél (ahol $\varphi < 5^\circ$ nem teljesül) az optikai tengellyel párhuzamosan beérkező fénysugarak nem mind ugyanazon fókuszpontba verődnek vissza. Az ilyen tükrőnek számos fókuszpontja van, ez az ún. *gömbi eltérés* (szférikus aberráció). Ez fényhatárolókkal, ún. *diafragmákkal* javítható, korrigálható.

A D átmérőjű és f fókusztávolságú tükrő *fényerősségén* a $\frac{D}{f}$ hányadost értjük. A gömbi eltérés a tükrő fényerejével növekszik és egyre nagyobb képtorzuláshoz vezet.

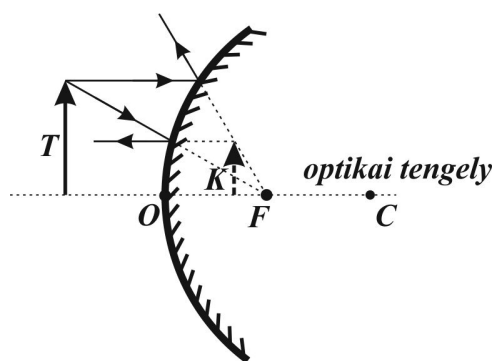
Az elliptikus henger alakú, belül tükröző tükrő fókuszvonalába helyezett vonal alakú fényforrásból (pl.: fénycsőből) kiinduló fénysugarakat a tükrő a másik fókuszvonalában lévő tárgyra gyűjti össze (4.8. ábra), ami pl. lézerek pumpálására alkalmassá teszi.



4.8. ábra: Elliptikus henger alakú homorú tükrő

4.1.2.2.3. A domború gömbtükrő

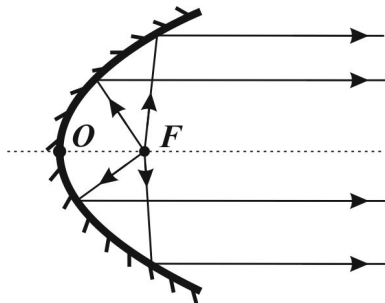
A domború gömbtükrő képalkotását a 4.9. ábra szemlélteti:



4.9. ábra: Domború gömbtükrő képalkotása

A domború gömbtükrő mindig egyenes állású, kicsinyített, virtuális képet ad. A leképezési törvényben $t > 0$, $f < 0$ és $k < 0$. ([15. Animáció: Domború gömbtükrő képalkotása](#))

Főként a nagyobb nyílású gömbtükrök képalkotási hibáinak kiküszöbölésére más felületű (általában forgásfelületű) tükröket is szokás használni. Például a *forgási paraboloid* alakú tükör a fókuszpontjában lévő pontszerű fényforrásból kiinduló fénysugarakat tökéletesen párhuzamos nyaláb formájában tükrözi vissza (és viszont), tökéletes reflektor (4.10. ábra):



4.10. ábra: Homorú parabolatükör

Bizonyítható, hogy a forgó folyadék felszíne forgási paraboloid. Jól tükröző forgatott folyadékkal (pl. *Hg*) a fordulatszám függvényében *változtatható fókuszú* parabolatükör készíthető.

4.1.3. A fénytörés

A közegethatárhoz érkező fénysugár *másik része* a határfelületen átlép, azonban haladásának *iránya* általában nem egyezik meg a beeső fénysugár haladási irányával, vagyis *törést szenved*. A fény törésének tapasztalati törvénye a **Snellius–Descartes-törvény**, mely szerint:

„A beeső fénysugár beesési merőlegessel bezárt α szögének szinusza úgy aránylik a megtört fénysugár beesési merőlegessel bezárt β szögének szinuszához, mint a két közegben mért terjedési sebesség.”

Vagyis matematikailag:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21} = \text{állandó},$$

ahol n_{21} a 2-es közegnek az 1-es közegre vonatkoztatott törésmutatója, vagy *relatív törésmutató*. A beeső fénysugár, a beesési merőleges és a megtört fénysugár egy síkban van. Mivel a fénysugár útja megfordítható, ezért

$$n_{21} = \frac{1}{n_{12}}.$$

Ha a fény valamely közegből (1-es közeg) vákuumba (2-es közeg) lép, akkor az adott közeg vákuumra vonatkoztatott törésmutatója:

$$\frac{c_1}{c_0} = n_1,$$

amit a l -es közeg *abszolút törésmutatójának* nevezünk. Ha a Snellius–Descartes-törvény jobb oldalát $\frac{1}{c_0}$ -al bővítjük, a relatív törésmutatóra

$$n_{21} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\frac{c_1}{c_0}}{\frac{c_2}{c_0}} = \frac{n_1}{n_2}$$

adódik, vagyis a relatív törésmutató az abszolút törésmutatók hányadosa. Mivel a levegő elektromos szempontból, és ezért a fény terjedése szempontjából gyakorlatilag nem különbözik a vákuumtól, ezért a levegőből más közegbe való lépéskor az abszolút törésmutatóval számolhatunk, és n -nel jelöljük. A vákuum vagy a levegő törésmutatója ezért:

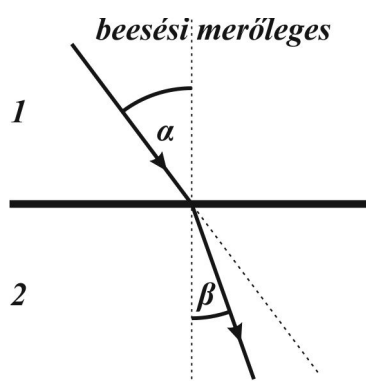
$$n_0 = 1.$$

4.1.4. A fénytörés speciális esetei

4.1.4.1. Fénytörés közeghatárnál

4.1.4.1.1. Optikailag ritkább közegből optikailag sűrűbb közegbe

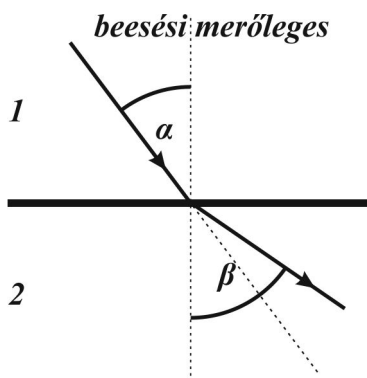
Abban az esetben, ha a fénysugár l -es közegben mért c_1 terjedési sebessége nagyobb, mint a 2 -es közegben mért c_2 terjedési sebesség, ezért az n_{21} törésmutató értéke l -nél nagyobb, akkor $\alpha > \beta$, vagyis a fény a *beesési merőlegeshez* törik (4.11. ábra).



4.11. ábra: Fénytörés a beesési merőlegeshez

4.1.4.1.2. Optikailag sűrűbb közegből optikailag ritkább közegbe

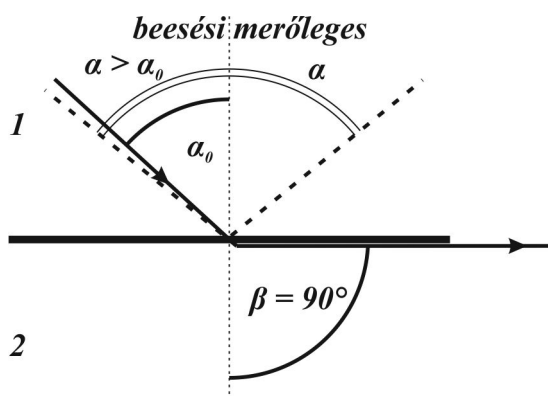
Ha a fénysugár l -es közegben mért c_1 terjedési sebessége kisebb, mint a 2 -es közegben mért c_2 terjedési sebesség, azaz az n_{21} törésmutató értéke l -nél kisebb, akkor $\alpha < \beta$, vagyis a fény a *beesési merőlegestől* törik (4.12. ábra).



4.12. ábra: Fénytörés a beesési merőlegetől

4.1.4.1.3. Teljes visszaverődés határszöge

Az $n_{21} < 1$ esetben létezik egy beesési szög, amelynél a törési szög értéke pontosan $\beta = 90^\circ$. Ennél a szögnél még éppen törés következik be, azonban ha a fény bármilyen kicsivel nagyobb beesési szögben esik a határfelületre, teljes visszaverődést szenved, a határfelület tükröként viselkedik (4.13. ábra).



4.13. ábra: Teljes visszaverődés határszöge

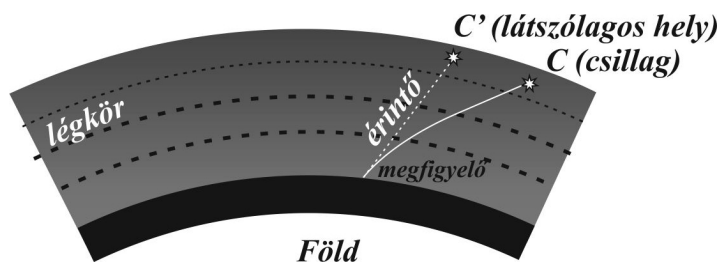
A $\beta = 90^\circ$ törési szöghöz tartozó α_0 beesési szöget a *teljes visszaverődés határszögének* nevezzük, értéke a Snellius–Descartes-törvény felhasználásával:

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha_0}{\sin 90^\circ (=1)} = \sin \alpha_0 = n_{21}.$$

Optikailag ritkább közegnek nevezzük azt a közeget, amelyben a fénysebesség nagyobb. Tehát teljes visszaverődés (totális reflexió) csak *optikailag sűrűbb* közegből optikailag ritkább közeg felé haladó fénysugár esetén következhet be (*l.* optikai szálak).

Megjegyzés:

A törésmutató függ a közeg sűrűségétől, hőmérsékletétől és a közegen áthaladó fény hullámhosszától. Ezért inhomogén közegben a törésmutató a hely függvénye. A Föld légköre inhomogén, ezért a csillagokból a Földre érkező fénysugár a légkörben folyamatos törést szenved (a pillanatnyi beesési merőlegeshez törik). Ezért a csillagot (égítéstet) „magasabban” látjuk (C'). Ez az inhomogenitás okozza a csillagok „pislogását”, mivel a levegő még állandó áramlásban is van, így a törésmutató hely és időfüggő is (4.14. ábra).

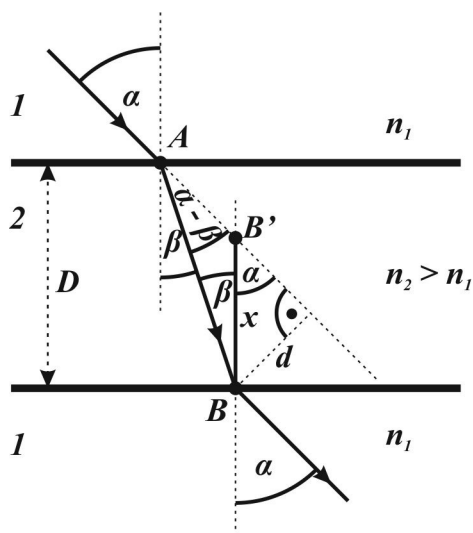


4.14. ábra: Csillag látszólagos helye a földi megfigyelő számára

4.1.4.2. Fénytörés síkokkal határolt közegekben

4.1.4.2.1. Fénytörés plánparallel lemezen

A *plánparallel lemez* párhuzamos síklapok által határolt fénytörő közeg. Ha a lemez mindkét oldalán ugyanazon közeg van (pl. levegő), akkor a lemezből kilépő fénysugár a belépőhöz képest *eltolódik*.



4.15. ábra: Eltolódás plánparallel lemezen

A D vastagságú, n törésmutatójú lemezen áthaladó fénysugár d eltolódása a 4.15. ábra alapján kiszámítható, ugyanis:

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{d}{AB},$$

ahonnan:

$$d = \overline{AB} \sin(\alpha - \beta),$$

ami $\overline{AB} = \frac{D}{\cos \beta}$ behelyettesítésével:

$$d = \frac{D}{\cos \beta} \sin(\alpha - \beta).$$

A Snellius–Descartes-törvény felhasználásával:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n,$$

ahonnan:

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n},$$

ezért:

$$d = \frac{D}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta),$$

és ezzel:

$$d = \frac{D}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} \left(\sin \alpha \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}} - \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{n} \right) = D \sin \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right).$$

A D vastagságú lemez látszólagos x vastagsága pedig az ábra alapján:

$$x = \frac{d}{\sin \alpha} = D \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right).$$

Ha $\alpha = 0^\circ$, akkor merőleges beesésnél:

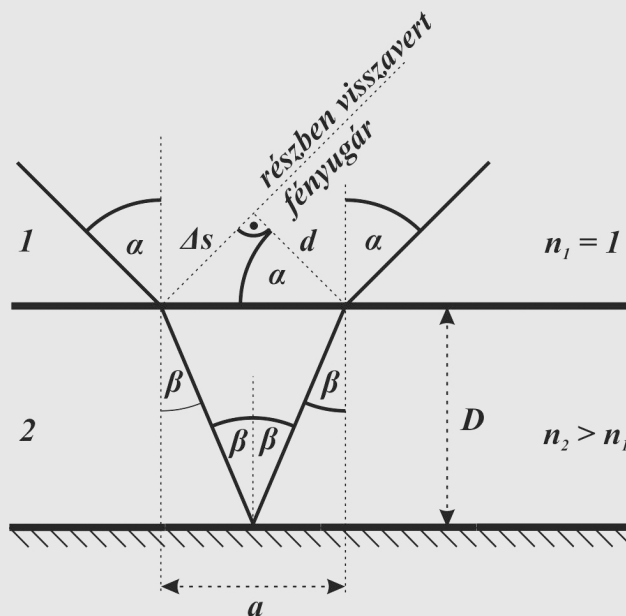
$$x = D \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

Ezért látjuk például sekélyebbnek a tó vizét is, ha a felületére merőlegesen nézünk a fenekére.

A fentiekből következik, hogy ha több különböző törésmutatójú plánparallel lemez van egymásra helyezve (pl. mikroszkópban), a beeső fénysugár akkor is csak párhuzamosan tolódik el, azaz a fény nem szenved irányváltást.

4.3. Példa: Párhuzamos eltolódás

Mekkora a fénysugár D vastagságú n törésmutatójú plánparallel lemez alsó tükröző felületéről történő visszaverődéskor a 4.16. ábra szerint elszenvedett d párhuzamos eltolódásának a mértéke?



4.16. ábra: Párhuzamos eltolódás

Megoldás:

A 4.16. ábra alapján:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a}{2D},$$

vagyis:

$$a = 2D \operatorname{tg} \beta.$$

A Snellius–Descartes-törvény felhasználásával:

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}.$$

Ezekből:

$$a = 2D \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = 2D \frac{\frac{\sin \alpha}{n}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}},$$

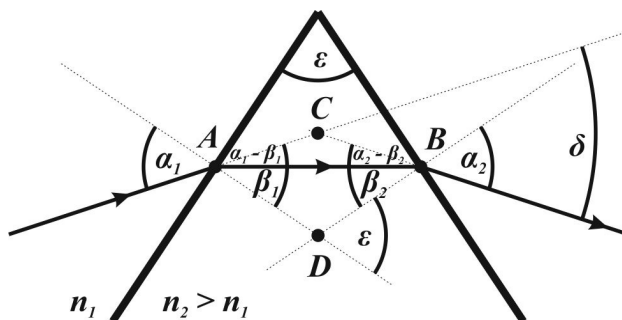
és mivel $d = \frac{a}{\cos \alpha}$, ezért:

$$d = 2D \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}}.$$

Ebből d már meghatározható. ♣

4.1.4.2.2. Fénytörés prizmában

A *prizma* egymással szöget bezáró síklapok által határolt fénytörő közeg. A síkok metszésvonal a törőél. A prizma határoló síkjainak hajlásszöge az ε *törőszög*. A rajta áthaladó fény a prizma vastagabb része felé törik, ha a prizma optikailag sűrűbb az őt körülvevő közegnél. A be- és a kilépő fénysugarak által bezárt δ szög az *eltérítési (deviációs) szög*.



4.17. ábra: Prizma törőszöge és eltérítési szöge

A 4.17. ábra alapján a δ eltérítési szög az ABC háromszög külső szöge és ezért egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével:

$$\delta = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2).$$

Ehhez hasonlóan az ABD háromszög külső szögének nagysága megegyezik a nem mellette lévő belső szögek összegével és a matematika merőleges szárú szögeinek tétele értelmében egyenlő a prizma ε törőszögével:

$$\varepsilon = \beta_1 + \beta_2.$$

Ezek figyelembe vételével az eltérítési szög:

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \varepsilon.$$

Kísérletileg kimutatható (de szélsőérték-számítással ki is számolható), hogy a δ eltérítési szög szimmetrikus sugármenet esetén a legkisebb. Ekkor:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \text{ és } \beta_1 = \beta_2 = \beta = \frac{\varepsilon}{2},$$

ahonnan:

$$\delta_{min} = \alpha_1 + \alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2) = 2\alpha - 2\beta = 2\alpha - \varepsilon,$$

és ebből:

$$\alpha = \frac{1}{2}(\delta_{min} - \varepsilon).$$

Ezek ismeretében a Snellius–Descartes-törvény alapján a prizma törésmutatója:

$$n_{21} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \left(\frac{1}{2}(\delta_{min} - \varepsilon) \right)}{\sin \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)}.$$

Kis törőszögű prizmák esetén és kis beesési szögnél felhasználjuk azt a matematikai közelítést, hogy a szög szinusza közelítően megegyezik a szög radiánban mért értékével:

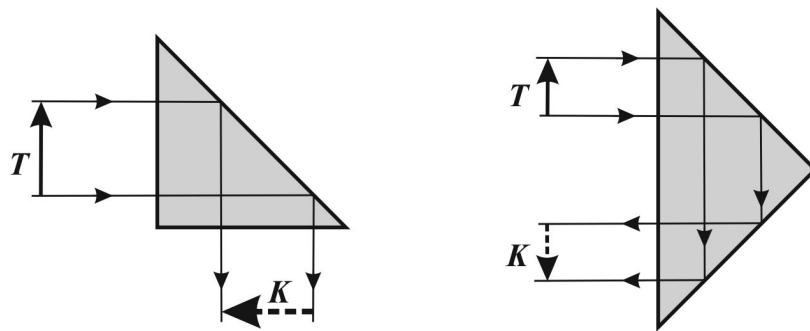
$$\sin \alpha \approx \alpha .$$

Ebből kifolyólag a Snellius–Descartes-törvény ebben az esetben $\alpha_1 \approx n\beta_1$ és $\alpha_2 \approx n\beta_2$ alakban írható, és a deviációs szögre

$$\delta \approx (n-1)\varepsilon$$

adódik, amelyet a „vékony lencsék” képzéskorlatásánál fel fogunk használni.

A prizmák egyik gyakori és közismert alkalmazási területe a képfordítás, amelyet két esetben a 4.18. ábra szemléltet.



4.18. ábra: Prizma képfordítása

4.1.4.2.3. Az optikai szálak

Az optikai szálak fő felhasználási területei a *hírközlés*, információtovábbítás (számítógépes hálózatok), *fénycső* világítási célból (pl. testüregekbe), passzív képtovábbítás sokszálas rendezett *kötélt fényszálakban*.

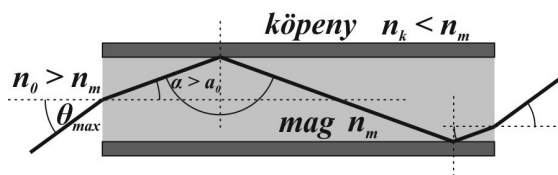
A teljes visszaverődésen alapul az a lehetőség, hogy az egyik végén megvilágított üveg vagy műanyag optikai szálból a fény nem tud kilépni a palást mentén, hanem gyakorlatilag gyengítetlenül felfogható a másik végén. A hírközlési optikai kábel hossza természetesen itt is korlátot jelent, noha a csillapítás nagyon kicsiny és csak nagy távolságok esetén szükséges erősítés. Az optikai szál átmérője μm nagyságrendű, azaz nagyfokú hajlékonysággal rendelkezik.

Hogy a paláston a teljes visszaverődés megvalósuljon, alapvetően kétfajta megoldás terjedt el:

1. A 4.19. ábra alapján meghatározható az a θ_{max} beesési szög, amelynél kisebb szögű beesésnél a fénysugár az optikai szálban terjed. Ha a fény az $n_0=1$ törésmutatójú levegőből lép az n_m abszolút törésmutatójú magba, akkor

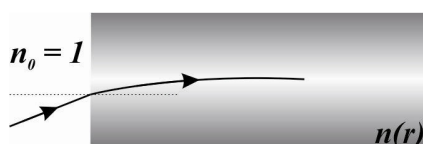
$$\theta_{max} = \sqrt{n_m^2 - n_k^2} ,$$

ahol n_k a köpeny abszolút törésmutatója.



4.19. ábra: Optikai szál

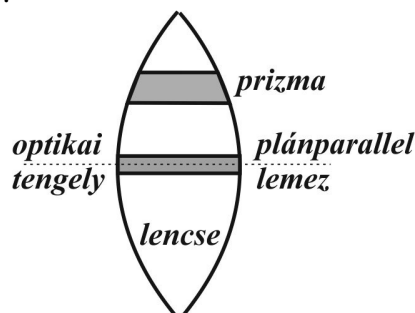
2. Megoldható, hogy a mag és a köpeny törésmutatója közötti változás nem ugrásszerű legyen, hanem a törésmutató a tengelytől mért r távolság függvényében változzon: csökkenjen (optikailag ritkuló közeg). Ebben a közegben a fénysugarak nem egyenes vonalban haladnak, hanem jól meghatározott görbén (4.20. ábra).



4.20. ábra: Változó törésmutatójú optikai szál

4.1.5. Leképezés lencsékkel

A *gömblencsék* két gömb, vagy egy gömb- és egy síkfelülettel határolt átlátszó testek, amelyek vékony lencsék esetén plánparallel lemezből és prizmákból álló összetett fénytörő testeknek tekinthetők (4.21. ábra).

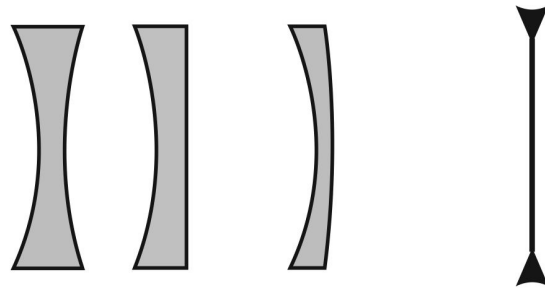


4.21. ábra: Gömblencse felépítése

Geometriai felépítésük szerint *domború* és *homorú* lencséket különböztetünk meg. Abban az esetben, amikor a lencse abszolút törésmutatója a környezet törésmutatójánál nagyobb, akkor a domború lencsék egyúttal gyűjtőlencsék is (4.22. ábra), a homorú lencsék pedig szórólencsék (4.23. ábra). Mi csak az ún. *vékony lencsékkel* foglalkozunk, és azzal az esettel, amikor a lencse anyagának abszolút törésmutatója nagyobb a környezeténél (pl. levegőben lévő üveg lencse).



4.22. ábra: Vékony gyűjtőlencsék

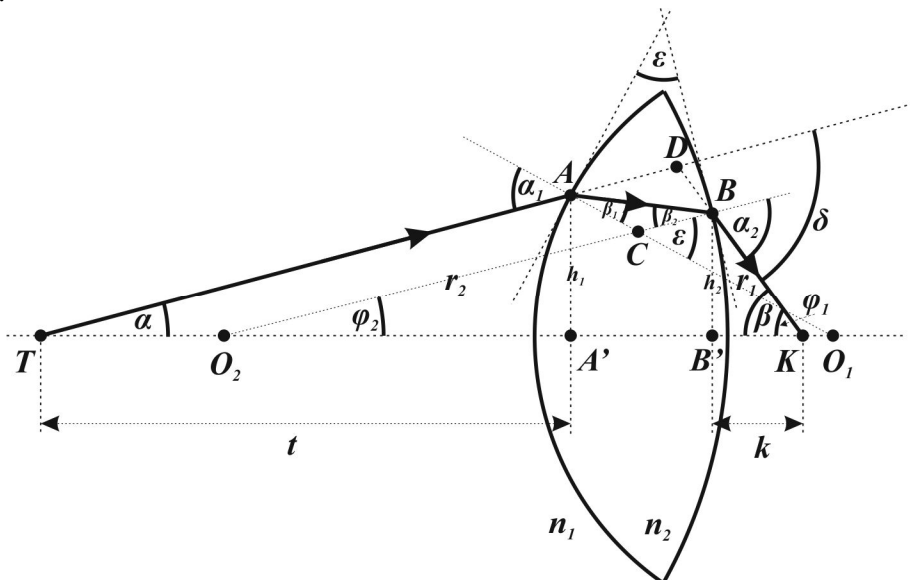


bikonkáv pláinkonkáv konvex-konkáv rajzjel

4.23. ábra: Vékony szórólencsék

4.1.5.1. Leképezési törvény bikonvex lencsékkel

A leképezési törvényt egy *bikonvex* (kétszer domború) lencse példáján a 4.24. ábra alapján vezetjük le.



4.24. ábra: Leképezési törvény bikonvex lencsénél

A bikonvex lencse két, r_1 és r_2 görbületi sugarú gömbcikk által határolt, $n > 1$ törésmutatójú (pl. üvegből készült) test. A lencsét kis törőszögű prizma egészítettük ki a fénysugár A belépési és B kilépési és pontjaihoz húzott érintők segítségével, melyek a sugárra merőlegesek. A kis törőszögű prizmánál kapott összefüggést alkalmazva az eltérítés szöge:

$$\delta \approx (n-1)\varepsilon.$$

A δ eltérítési szög a TKD háromszög külső szöge, ezért δ nagysága a T tárgypontról induló fénysugár és az optikai tengely által bezárt α szögnek, valamint a δ eltérítést szenvedett, K képpontba érkező fénysugár és az optikai tengely által bezárt β szögnek az összege:

$$\delta = \alpha + \beta.$$

Legyen a lencse bal oldalát határoló gömbcikknek a jobb oldalon található O_1 optikai közép-pontjából az A belépési ponthoz húzott r_1 görbületi sugara és a lencse optikai tengelye által bezárt szög φ_1 . Hasonlóan definiáljuk a lencse jobb oldalát határoló gömbcikknek a bal olda-

Ion található O_2 optikai középpontjából a B belépési ponthoz húzott r_2 görbületi sugara és a lencse optikai tengelye által bezárt szöget, φ_2 -t. Az O_1O_2C háromszög külső szöge a merőleges szárú szögek tétele szerint megegyezik az ε törőszöggel és ezért

$$\varepsilon = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Mindezekből az adódik, hogy

$$\alpha + \beta \approx (n-1)(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Mivel vékony lencsék leképezését vizsgáljuk, ezért a görbületi sugár nagy, tehát φ_1 és φ_2 kis szögek. Kis szögekre érvényes radiánban, hogy:

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha,$$

ezért az O_1AA' derékszögű háromszögből:

$$\sin \varphi_1 = \frac{h_1}{r_1} \approx \varphi_1,$$

és az O_2BB' derékszögű háromszögből:

$$\sin \varphi_2 = \frac{h_2}{r_2} \approx \varphi_2.$$

A TAA' derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_1}{t} \approx \alpha,$$

és a KBB' derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h_2}{k} \approx \beta.$$

Az ábrán t a fénysugár A belépési pontjának az optikai tengelyen található A' vetületének és a T tárgypontnak a távolsága, a tárgytávolság, k pedig a fénysugár B kilépési pontjának az optikai tengelyen található B' vetületének és a K képpontnak a távolsága, az ún. képtávolság.

Ezek alapján:

$$\frac{h_1}{t} + \frac{h_2}{k} = (n-1) \left(\frac{h_1}{r_1} + \frac{h_2}{r_2} \right),$$

ahonnan a vékony lencsék esetén érvényes $h_1 \approx h_2$ felhasználásával:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

Ha a tárgytávolság elég nagy, vagyis $t \rightarrow \infty$, akkor:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

vagyis a *leképezési törvény* f fókusz távolságú vékony gömblencse esetén:

$$\boxed{\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \equiv D},$$

ahol a D *dioptria* a méterben mért f fókusz távolság reciproka.

A lencse lineáris nagyítása:

$$N = \frac{K}{T} = \frac{k}{t} = \frac{k-f}{f} = \frac{f}{t-f}.$$

Gyűjtőlencsének nevezzük a lencsét, ha $f > 0$, *szórólencsének*, ha $f < 0$ és síklap esetén $f \rightarrow \infty$ és ezért $D \rightarrow 0$. Érintkező vékony lencsék esetén a dioptriaszámok összeadódnak:

$$D = D_1 + D_2.$$

Két, egymástól d távolságban lévő vékony lencséből álló lencserendszer eredő dioptriája:

$$D = D_1 + D_2 - 2D_1D_2.$$

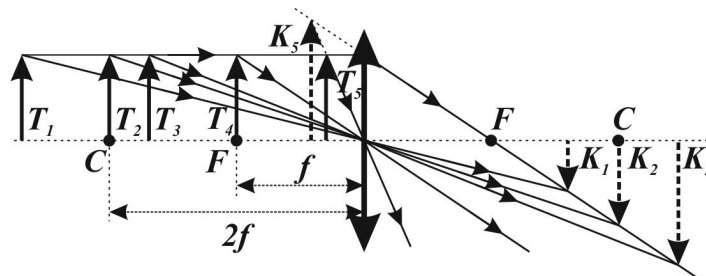
4.1.5.2. Példák lencsék képalkotására

4.1.5.2.1. A vékony gyűjtőlencse képalkotása

A *vékony gyűjtőlencsére* vonatkozó legfontosabb sugármeneti tulajdonságok a következők.

1. Az optikai tengellyel párhuzamosan érkező fénysugarak az F fókuszpontra haladnak tovább.
2. Az F fókuszpontról érkező fénysugarak az optikai tengellyel párhuzamosan haladnak tovább.
3. Az optikai középponton át haladó fénysugarak irányváltoztatás nélkül haladnak tovább.

A gyűjtőlencse T tárgyról alkotott képe az optikai középponttól mért távolságának függvényében különböző esetekben a 4.25. ábra ([16. Animáció: Vékony gyűjtőlencse képalkotása](#)) alapján határozható meg:



4.25. ábra: Vékony gyűjtőlencse képalkotása

- Ha a T_1 tárgy a kétszeres fókusz távolságán kívül helyezkedik el, a valódi, kicsinyített, és fordított állású K_1 kép az egyszeres és kétszeres fókusz távolság között van.

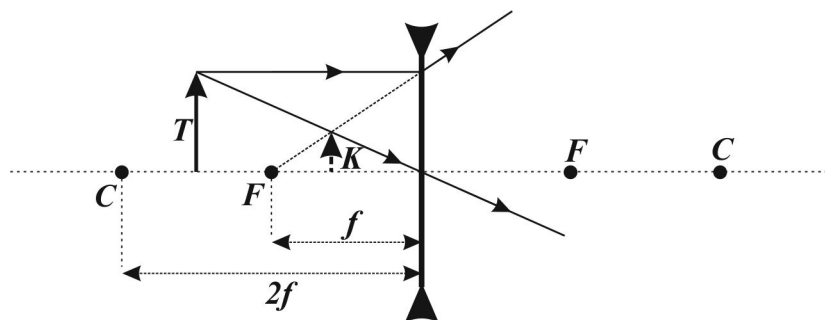
- Ha a T_2 tárgy a kétszeres fókusz távolságban van, a tárggyal egyenlő nagyságú, valódi és fordított állású K_2 kép a lencse másik oldalán szintén a kétszeres fókusz távolságba kerül.
- Ha a T_3 tárgy az egyszeres és a kétszeres fókusz távolság között van, a valódi, nagyított és fordított állású K_3 kép a kétszeres fókusz távolságon kívülre kerül.
- Ha a T_4 tárgy éppen a fókusz távolságban van, a pontjaiból kiinduló sugarak a lencse után párhuzamosan haladnak tovább, így kép nem keletkezik.
- Ha a T_5 tárgy a fókusz és az optikai középpont között van, a pontjaiból kiinduló sugarak széttartóak lesznek, és úgy haladnak tovább, mintha a lencse előtt egy pontból indultak volna ki. A keletkező K_5 kép a tárggyal azonos állású, nagyított, de ernyőn nem fogható fel, azaz látszólagos (virtuális), ez az egyszerű nagyító (lupe).

4.1.5.2.2. A vékony szórólencse képalkotása

A vékony szórólencsére vonatkozó legfontosabb sugármeneti tulajdonságok a következők.

1. Az optikai tengellyel párhuzamosan érkező fénysugarak úgy haladnak tovább, mintha az F fókuszpontból indultak volna ki.
2. Az optikai középponton át haladó fénysugarak irányváltoztatás nélkül haladnak tovább.

A szórólencse T tárgyról alkotott képe az optikai középponttól mért távolságának függvényében (4.26. ábra) ([17. Animáció: Vékony szórólencse képalkotása](#)):

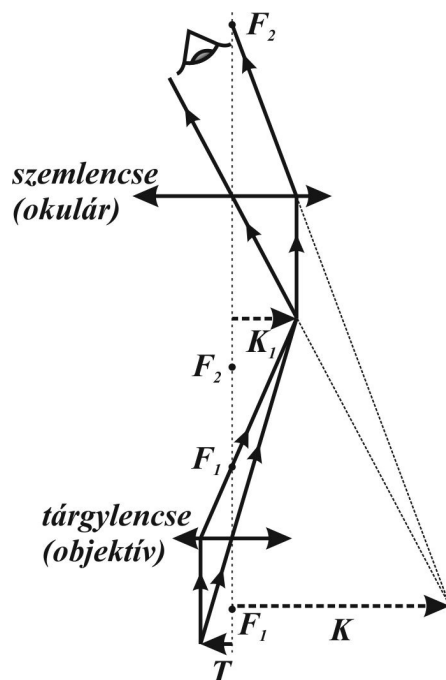


4.26. ábra: Vékony szórólencse képalkotása

A homorú lencse a T tárgyról érkező fénysugarakat széttartóvá teszi, ezért azok meghosszabbítása a tárggyal azonos oldalon metszik egymást, vagyis a homorú lencse a tárgy helyétől függetlenül egyenes állású, látszólagos és kicsinyített képet állít elő.

4.1.5.2.3. A mikroszkóp képalkotása

A 4.27. ábra szerinti felépítésű *fénymikroszkóp* f_1 fókusz távolságú tárgylencséből (*objektív*) és $f_2 > f_1$ fókusz távolságú szemlencséből (*okulár*) áll.



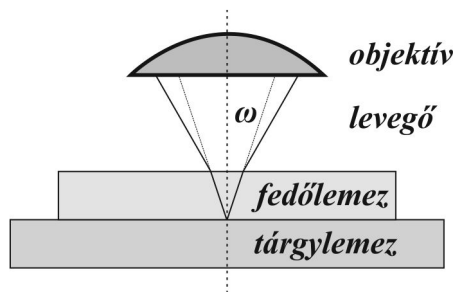
4.27. ábra: Mikroszkóp képalkotása

Az objektív F_1 fókuszpontja az okulár F_2 fókuszpontján kívül esik. Az objektív elé, annak egyszeres és kétszeres fókusz távolságán belül elhelyezett T tárgyról az objektív fordított állású, látszólagos K_1 képet alkot a kétszeres fókusz távolságon kívül. Ha ez a K_1 kép az okulár F_2 fókusz távolsága és optikai középpontja között helyezkedik el, akkor az okulár egyenes állású, nagyított, látszólagos képet alkot róla. Az emberi szem ezt úgy érzékeli, mintha a fénysugarak az objektíven túl elhelyezkedő nagyított K képből indultak volna ki.

A mikroszkóp jóságát a *felbontási határ* jellemzi, amin azt a legkisebb δ távolságot értjük, amelynek végpontjait a mikroszkópon keresztül még különálló pontoknak látjuk és az alábbi összefüggés írja le:

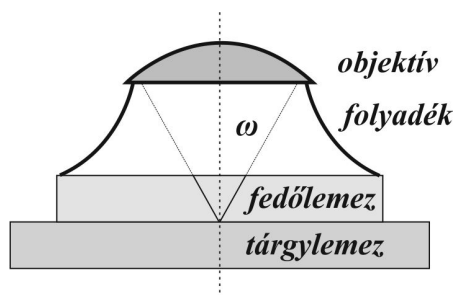
$$\delta = 0,61 \frac{\lambda}{n \sin \omega},$$

ahol λ a fény hullámhossza, n az objektív és a T tárgy közötti közeg törésmutatója, az ω apertúraszög pedig a tárgypontból kiinduló, majd a teljes objektív-keresztmetszetet kitöltő fénykúp nyílásszögének a fele (4.28. ábra).



4.28. ábra: Apertúraszög levegővel

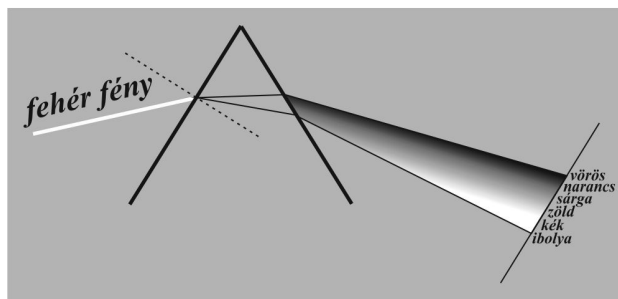
A δ felbontási határ mellett szokás még definiálni az $\frac{1}{\delta}$ *felbontóképességet*, más néven tér-frekvenciát is, melynek mértékegysége a $\frac{\text{vonalpár}}{\text{mm}} = \frac{VP}{\text{mm}}$. A mikroszkóp felbontási határa csökkenthető a levegőnél nagyobb törésmutatójú folyadék alkalmazásával (4.29. ábra). A fénymikroszkópok felbontási határa kb. $200 \mu\text{m}$.



4.29. ábra: Apertúraszög folyadékkal

4.1.6. A színlátás

A fénytörő testeknél eddig mindig azt feltételeztük, hogy a „fehér fény” sugárnyalábja a fénytörés után is ugyanolyan sugárnyaláb marad. Prizmával könnyen kimutatható, hogy a *fehér fény összetett*, több szín együttes hatására látszik fehérnek. A szín a bizonyos hullámhossztartományokba eső fény által kiváltott érzet (4.30. ábra). ([18. Animáció: Fehér fény felbontása színekre prizmával](#))



4.30. ábra: Fehér fény felbontása színekre prizmával

Az emberi szem által látható színtartomány ($380 \text{ nm} < \lambda < 780 \text{ nm}$) a vöröstől az ibolyáig terjed. A szem által még nem látott ($\lambda > 780 \text{ nm}$) tartományt vörösön inneni (*infravörös*), a már nem látott ($\lambda < 380 \text{ nm}$) tartományt ibolyán túli (*ultraibolya*) sugárzásnak nevezzük.

A fehér fénynek fénytörés utáni színekre bontása a képalkotó rendszerben, eszközökben hibákhoz, torzuláshoz vezet, ezek mérésére speciális lencserendszereket alkalmazunk az egyszerű vékonylencsék helyett.

A fentiekből következik, hogy a törésmutató „színfüggő”, vagyis a fény hullámhosszának (frekvenciájának) függvénye. *Monokromatikusnak* nevezzük azt a fényt, amelyben csak azonos hullámhosszúságú fénysugarak fordulnak elő. Jó közelítéssel ilyen fényforrások a lézerek.

Megemlítjük, hogy az emberi szem a sárgászöld színre ($\lambda \approx 550 \text{ nm}$) a legérzékenyebb, ezért több alkalmazásban az ilyen fényt kibocsátó fényforrásokat alkalmaznak.

4.2. Fizikai fénytán (hullámoptika)

A *Hullámoptika* is a fény terjedésének törvényeivel foglalkozik, de a fényt úgy tekinti, mint *elektromágneses hullámot*. Ezúttal olyan terjedési jelenségekkel foglalkozunk, amelyeket a geometriai optika eszközeivel nem lehet értelmezni. Ezek a fény *interferenciája*, *elhajlása* és *polarizációja*. Megjegyezzük, hogy a Geometriai optika jelenségei, törvényei a fény hullám-elméletével is értelmezhetők.

A fény természetére vonatkozó vizsgálatok a XVII. századra nyúlnak vissza. Newton értelmezése szerint a fény *részecskékből* áll, korpuszkuláris természetű jelenség. Christiaan HUYGENS nevéhez kötődik a fény *hullámtermészettel* való magyarázata. A kor ismert fénytani jelenségeinek többségét mindkét elmélettel lehetett magyarázni. Newton óriási tekintélyének következménye, hogy az ő elgondolásai voltak az uralkodóak.

Thomas YOUNG 1801-ben kísérletileg *igazolta* a fény *hullámtermészetét*, sőt később annak transzverzális tulajdonságára is talált kísérleti bizonyítékot.

Az Elektromágnesség Maxwell-féle értelmezése szerint fény olyan elektromágneses hullám, amelyben az elektromos térerősség és a mágneses indukció a terjedés irányára és egymásra is merőleges irányú rezgést végez. A hullám terjedési sebessége a közeg elektromos és mágneses jellemzőitől, a permittivitástól és a permeabilitástól függ:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}}.$$

Vákuumban, és az attól elektromos és mágneses szempontból gyakorlatilag nem vagy csak alig különböző levegőben $\epsilon_r = \mu_r = 1$, és így ott a fény sebessége:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,99792458 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}.$$

A fénykibocsátás helyétől x távolságban a fényhatás:

$$\Psi = A \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right) = A \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

alakú *hullámfüggvénnyel* írható le, ahol $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ az ún. hullámszám. A változó fizikai mennyiség az \vec{E} elektromos térerősség és a \vec{B} mágneses indukció.

Megjegyzés:

Az MRI képképzéskor a mágneses mezőben lévő szövet által kibocsátott rádióhullámú sugárzást frekvenciák szerinti eloszlását először a hullámhossz reciprokával arányos $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ hullámszám szerint, az ún. *k-térben* ábrázolják.

Fényjelenségeknél az *elektromos térerősség* változását vesszük figyelembe és az \vec{E} elektromos térerősséget fényvektorként kezeljük. A mágnes térerősség elhanyagolhatóságát az indo-

kolja, hogy a fény, vagyis az adott időpillanatban a fénykibocsátás helyétől x távolságban lévő elektromágneses mező az útjába kerülő \vec{v} sebességű és q töltésű részecskére

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$$

elektromágneses Lorentz-erővel hat, amelynek *döntő része* a $q\vec{E}$ tagból származik. Mivel $q(\vec{v} \times \vec{B}) \ll q\vec{E}$, ezért a részecskékre ható elektromágneses erő *elsősorban az elektromos erővel* kapcsolatos.

Ebből következik, hogy a például x irányban terjedő *monokromatikus fény* síkhullámát leírhatjuk az x irányra merőlegesen (transzverzálisan), y irányban rezgő elektromos térerősséggel:

$$E_y(x, t) = E_{0,y} \sin(\omega t - kx + \varphi),$$

ahol $E_{0,y}$ az y irányú \vec{E} elektromos térerősség maximális értékének nagysága.

Az elektromágneses hullámban terjedő energia kiszámításánál figyelembe kell venni azt is, hogy az elektromágneses hullám az elektromos és mágneses mező rezgési energiájának időben és térben való terjedése. Az energia áramlását vákuumban az

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$$

Poynting-vektor írja le. Az energiaáramlás irányára merőleges egységnyi felületen, egységnyi idő alatt

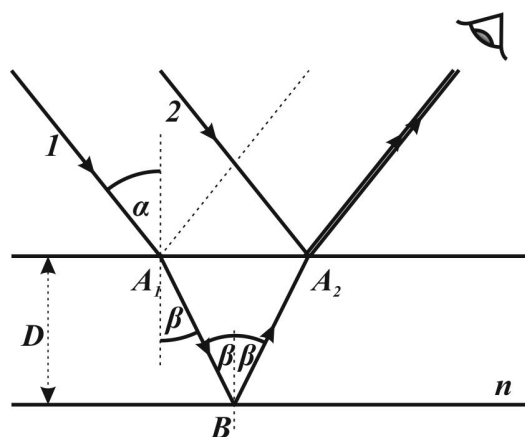
$$S = \frac{1}{\mu_0} EB$$

nagyságú energia áramlik át (felületi teljesítménysűrűség).

4.2.1. Fényhullámok interferenciája

A hullámok egyik legjellemzőbb tulajdonsága, hogy *interferenciára* képesek, azaz képesek egymást *erősíteni* és *gyengíteni* vagy *kioltani*. Azt várhatjuk, hogy két fényforrás segítségével megvilágított felületen sötét és világos területeket lássunk. A fénykibocsátás (ld. az Atomfizika c. részben) az atomok véletlenszerű (spontán), igen rövid ideig tartó ($\sim 10^{-8}$ s), egymástól független folyamata. A megvilágított felület egy-egy pontjába ezért tehát rendszertelenül érkezik a fényhullámok sokasága. Rendkívül rövid időközönként változik az interferencia eredménye, így ez nem is detektálható. Az interferencia észlelhetőségének feltétele, hogy a fényhullámok egy adott helyen állandó fáziskülönbséggel találkozzanak, koherensek legyenek.

Ez megvalósul pl. egy vékony szappanhártyán vagy szétterült olajfolton (4.31. ábra):



4.31. ábra: Fény interferenciája szappanhártyán

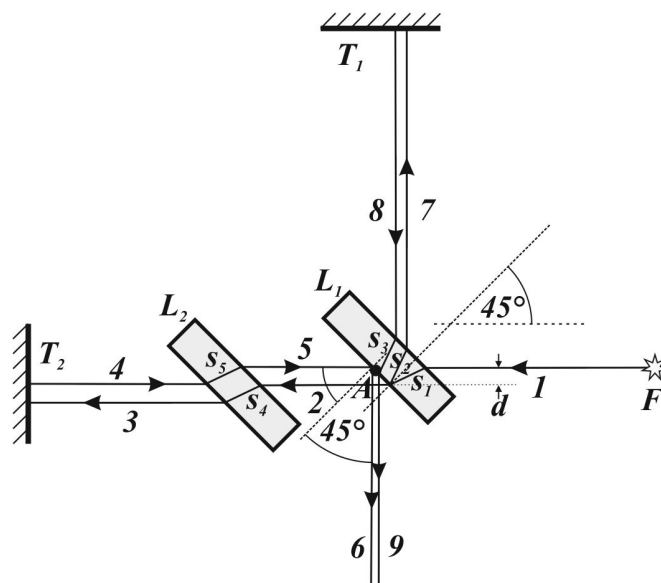
Az A_2 pontban találkozó 1-es és 2-es fénysugár

- erősíti egymást, ha azonos fázissal találkoznak, ekkor az A_2 találkozási pontig megtett optikai úthosszuk különbsége a fény hullámhosszának egész számú többszöröse,
- gyengíti egymást, ha ellentétes fázissal találkoznak, ekkor az A_2 találkozási pontig megtett optikai úthosszuk különbsége a fény hullámhosszának felének páratlan számú többszöröse.

Fényinterferenciát tehát a természetben is megfigyelhetünk, de általában kísérleti eszközökkel állíthatjuk elő. A fényinterferencia segítségével nagyon pontos hullámhossz-méréseket, törésmutató mérést, spektroszkópiai vizsgálatokat lehet végezni.

4.2.1.1. A Michelson-féle interferométer

Az ún. Michelson-féle interferométer segítségével sikerült bizonyítani, hogy az elektromágneses hullámoknak (így a fénynek is) a megfigyelőhöz viszonyított sebessége vákuumban (vagy levegőben) független a megfigyelő sebességétől, amely Einstein *relativitáselméletében* játszik fontos szerepet. A Michelson-féle interferométer felépítését és működését a 4.32. ábra alapján szemléltetjük:



4.32. ábra: Michelson-féle interferométer

Az interferométer F fényforrásból kiinduló, az egyszerűség kedvéért monokromatikus (pl. lézer) fényforrást tartalmaz. Az I -es úton kiinduló fénysugár a rá 45° -os szögben elhelyezett L_1 féligáteresztő plánparallel lemezhez érve törést szenvedve s_1 úton a lemez belső határfelületéhez ér, ahol részben visszaverődést szenved (s_2), részben pedig kilép a lemezből és az eredeti haladási irányához képest d eltolódással, azzal párhuzamosan halad tovább (2).

A 2-es úton továbbhaladó fénysugár az L_2 plánparallel lemezhez érve s_4 úton d eltolódással áthalad azon, majd a 3-as úton továbbhaladva a merőlegesen elhelyezett T_2 síktükrökhöz érve onnan visszaverődést szenved. Visszaverődés után a 4-es úton haladva ismét az L_2 plánparallel lemezen halad át (s_5), majd d eltolódás után az 5-ös úton az L_1 plánparallel lemez A pontjához ér, ahonnan 45° -os beesési szöge miatt 45° -os visszaverődést szenvedve 6-os úton a megfigyelőhöz ér.

Az L_1 plánparallel lemez belső felületéről s_2 úton visszavert fénysugár a lemezből törés után kilépve a 7-es úton a merőlegesen elhelyezett T_1 síktükrökhöz érve teljes egészében visszaverődik. Visszaverődés után a 8-as úton ismét az L_2 plánparallel lemezhez ér, amelyen s_3 úton történő d eltolódást szenvedett áthaladása után a lemez A pontján lép ki, és 9-es úton haladva ér a megfigyelőhöz.

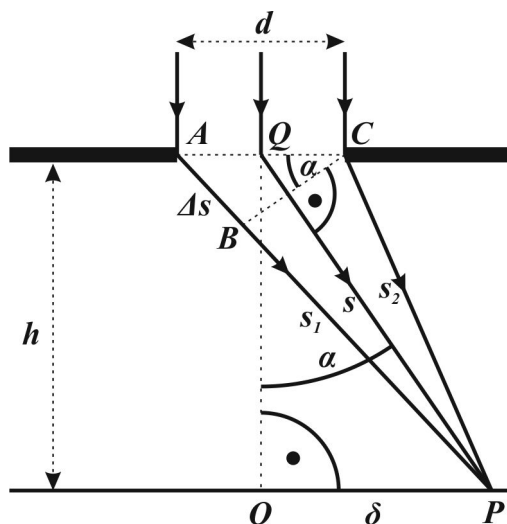
Az L_1 féligáteresztő tükör belső felületén kettéosztott fénysugár közül a T_1 tükrőről visszavert sugár $s_1 + s_2 + s_3 = 3s$ hosszúságú utat, valamint a T_2 tükrőről visszavert sugár ugyanakkora $s_1 + s_4 + s_5 = 3s$ utat tett meg a plánparallel lemezekben (ezért van szükség L_2 -re), megtett útkülönbségük pedig csak a T_1 és T_2 tükrök centrumtól mért távolságától függ. Az A találkozási ponttól kezdve együtt haladnak tovább és interferenciaképet hoznak létre.

A T_2 finoman (mikrométercsavarral) mozgatható tükör $\frac{\lambda}{2}$ -vel való elmozdítása az azonos és ellentétes fázis felcserélődése miatt éppen a világos és sötét csíkok „felcserélt” helyzetét eredményezi. Így az interferenciacsíkok eltolódásának megfigyelésével igen pontos *távolság- vagy elmozdulásmérés* valósítható meg.

4.2.2. Fényhullámok elhajlása (diffrakció)

4.2.2.1. Egyrése elhajlás

A hullámok tulajdonságai közül megismert *elhajlás* fény esetében is előidézhető. Monokromatikus fényt bocsátva keskeny résre (4.33. ábra), a messzebb elhelyezett ernyőn a résnek megfelelő fénycsík mellett kétoldalt világos és sötét csíkok csökkenő intenzitású sorozatát kapjuk. A réshez érkező párhuzamos fénynyaláb a rés minden pontján rezgési középpontot hoz létre, amelyekből elemi gömbhullámok indulnak ki.



4.33. ábra: Egyrése elhajlás

Ha az s_1 és s_2 úton haladó fényhullámok Δs útkülönbsége megegyezik a λ hullámhosszal, akkor az A pontból induló hullám és a Q pontból induló hullám P pontig megtett útkülönbsége:

$$s_1 - s = \frac{\lambda}{2},$$

ahol s a Q pontból kiinduló hullám útja. Ekkor a két hullám ellentétes fázissal találkozik és kioltja egymást. Ehhez hasonlóan a közvetlenül az A pont mellől kiinduló és a közvetlenül a Q pont mellől kiinduló hullámok útkülönbsége is a λ hullámhossz fele, ezért kioltják egymást. Ez a párosítás a hullámfront minden pontjára megtehető, ezért kijelenthető, hogy P pontban

$$s_1 - s_2 = \lambda$$

feltétel mellett kioltás következik be. Ekkor az ABC háromszög és az OPQ háromszög hasonlósága miatt:

$$\frac{\Delta s}{d} = \frac{\lambda}{d} = \frac{\delta}{h},$$

amiből a kioltás feltétele:

$$\lambda = \frac{d\delta}{h}.$$

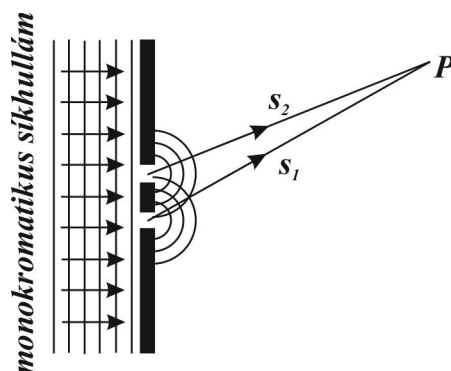
Csökkenő hullámhosszal a sötét csík a réshez közelebb kerül.

A fényelhajlásnak a fény hullámtermészetét figyelembe vevő értelmezése a **Huygens–Fresnel-elv** alapján lehetséges:

„A fényhullámok terében minden egyes felületelem a hullám odaérkezésekor elemi gömbhullámok forrásává válik. A kiinduló elemi hullámok amplitúdója arányos az őket kiváltó hullám amplitúdójával. A hullámtér valamely pontjában létrejövő fényhatást (erősítést, gyengítést) ezen elemi gömbhullámok interferenciája határozza meg.”

4.2.2.2. Kétréses elhajlás

Vizsgáljuk meg a 4.34. ábra szerinti elrendezést.



4.34. ábra: Kétréses elhajlás

Az ábra alapján a P pontban

1. erősítés akkor következik be, ha az s_1 és s_2 úton haladó hullámok azonos fázissal találkoznak, vagyis ekkor az útkülönbségük a hullámhossz egész számú többszöröse:

$$s_1 - s_2 = k\lambda,$$

2. gyengítés (vagy kioltás) akkor következik be, ha az s_1 és s_2 úton haladó hullámok ellentétes fázissal találkoznak, vagyis ekkor az útkülönbségük a hullámhossz felének páratlan számú többszöröse:

$$s_1 - s_2 = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}.$$

Ezek az egyenletek hiperbolák (térben forgási hiperboloidok), tehát az állandó erősítés és kioltás helyei hiperbolaágakon helyezkednek el. Ezek nagyon jól szemléltethetők víz hullámokkal.

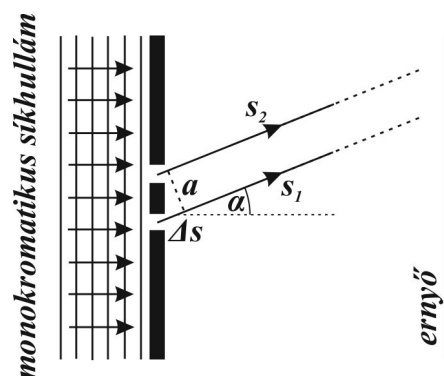
A gyakorlat szempontjából fontos azon eset, amikor az ernyő távolsága nagyságrendekkel nagyobb, mint a rések távolsága (4.35. ábra). Ekkor az

$$s_1 - s_2 = \Delta s$$

útkülönbségre

$$\Delta s \approx a \sin \alpha$$

adódik.



4.35. ábra: Kétséres elhajlás távol lévő ernyőn kivetített képe

Erősítést akkor kapunk, ha:

$$\sin \alpha_k = k \frac{\lambda}{a},$$

illetve kioltást, ha:

$$\sin \alpha_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda}{a}.$$

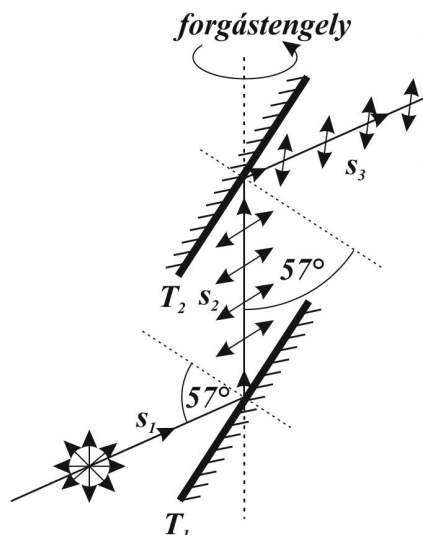
Ebből látszik, hogy akkor fog pl. a $k = 1$ -hez tartozó erősítési irány lényegesen különbözni a fénysugár eredeti iránya haladási irányától, ha α_1 már észlelhető nagyságú, legalább néhány fok. Ez akkor következik be, ha az erősítés összefüggésében szereplő $\frac{\lambda}{a}$ hányados nem nagyon kicsiny, azaz a rések távolsága a fény hullámhosszánál nem sokkal nagyobb. Ekkor ugyanis $\sin \alpha \approx \alpha$ miatt:

$$\alpha_1 \approx \frac{\lambda}{a}$$

is észlelhető mértékű lesz. ([9. Video: Optikai kísérletek](#))

4.2.3. A fény polarizációja

A mechanikai hullámok lehetnek transzverzálisak (a rezgés iránya a haladási irányra merőleges) és longitudinálisak (a rezgés iránya a haladási iránnyal párhuzamos). A transzverzális hullámok egyetlen *diafragmával* (vonalas mozgáshatárolóval) síkban *polarizálttá* tehetők, egymásra merőleges diafragmákkal *kiolthatók*. Ezek a jelenségek longitudinális hullámoknál nem jöhetnek létre. Hogy az elektromágneses hullám transzverzális, annak egyszerű kísérleti bizonyítéka az ún. kéttükrös kísérlet (4.36. ábra):



4.36. ábra: Fény polarizációja kéttükrös kísérlettel

A kísérlet tapasztalatai:

Keskeny, monokromatikus fénysugarat (s_1) ejtünk hátsó felületén feketére festett, T_1 üveglapra, 57° -os beesési szögben. Ekkor az a második, T_2 lapról visszaverődik és s_3 úton halad az ernyő felé. A második üveglapról visszaverődő fény akkor a legnagyobb intenzitású, ha az üveglapok párhuzamosak, vagy a T_2 -t a ráeső fénysugár s_2 útja körül 180° -kal elforgatjuk. A T_2 90° -os vagy 270° -os elforgatása esetén a T_2 tükrőről nem verődik vissza fény.

Magyarázata:

A jelenség csak a fényhullám transzverzális természetével magyarázható. A T_1 lapra beeső fénysugárban a fényt vákuumban lényegében meghatározó \vec{E} elektromos térerősség vektor (röviden: fényvektor) a terjedés irányára merőleges síkban minden irányban véletlenszerűen változik, vagyis *polarizálatlan* (A pont). A T_1 polarizátor üveglap az érkező fényhullámok közül csak azokat veri vissza, amelyeknek a fényvektora a beesési síkban rezeg. T_1 -ről történő visszaverődés után tehát már olyan fényhullám halad tovább s_2 úton, amelynek fényvektora csak egyetlen kitüntetett síkban, a T_1 -re merőleges beesési síkban rezeg. Az ily módon kitüntetett rezgési síkkal rendelkező fényt síkban *polarizált fénynek* nevezzük.

A T_2 analizátornak két olyan helyzete van, amelyeknél a polarizátorból érkező fény rezgési síkja a T_2 -re merőleges beesési síkra illeszkedik: T_1 -gyel párhuzamos, vagy a ráeső s_2 fénysugár körül 180° -ban elforgatott helyzetben. Ebben a két helyzetben az analizátor maximális intenzitással veri vissza a fényt. A T_2 tükröt e két helyzethez viszonyítva az s_2 tengely mentén derékszögben (90° -os vagy 270° -os szögben) elforgatva azt érzük el, hogy az analizátorhoz érkező polarizált fény rezgési síkja a beesési síkra merőleges, ezért ezeket a fénysugarakat a T_2 nem veri vissza.

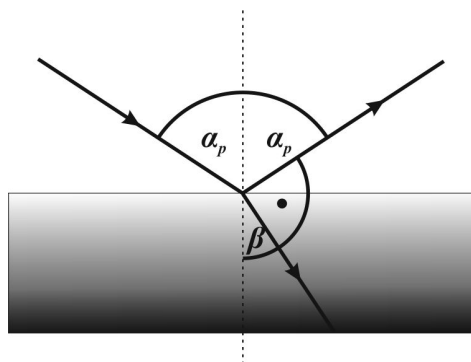
A visszaverő felület polarizáló hatása függ a beesési szögtől. Üveg esetében a teljes polarizáláshoz 57° -os beesési szög szükséges (4.37. ábra). Ezt az ún. polarizációs szöget a **Brewster-törvény** adja meg, amely szerint:

„A polarizáció az egymásra merőleges visszavert és a lemezbe belépő megtört fénysugarak esetén következik be.”

Mivel

$$n = \frac{\sin \alpha_p}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha_p}{\sin(90^\circ - \alpha_p)} = \frac{\sin \alpha_p}{\cos \alpha_p} = \operatorname{tg} \alpha_p,$$

ezért a polarizáció szögének tangense egyenlő a törésmutatóval.



4.37. ábra: Brewster-törvény

Általánosabban poláros fényen nem csak a lineárisan polarizált fényt értjük. Lehetséges, hogy az \vec{E} térerősség vektorok a fénysugárban, arra merőleges síkban úgy forognak, hogy végpontjuk ellipszist ír le. Az ilyen sugarat *elliptikusan polarizáltak* nevezzük. Ha a térerősség nagysága forgás közben nem változik, akkor *cirkulárisan polarizált* fénysugárról beszélünk.

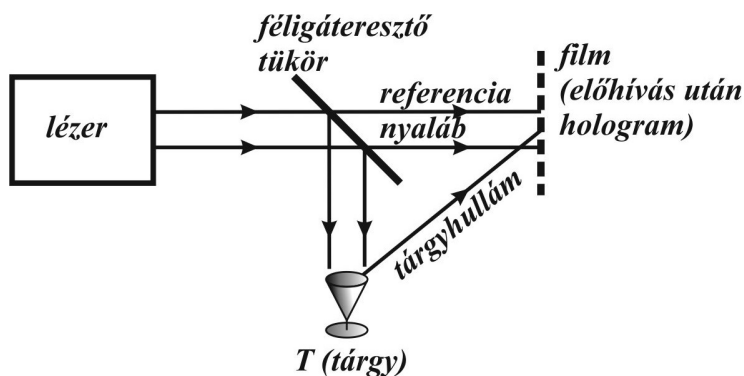
Vannak anyagok, amelyek belső sajátos szerkezetük következményeként a lineárisan polarizált fénysugár síkját elfordítják. Oldatoknál ez az α elfordulási szög arányos a fényt közvetítő réteg d vastagságával és

$$\alpha = \alpha_2 \rho_b d,$$

ahol α_2 az oldat fajlagos forgatóképessége, ρ_b pedig az optikailag aktív oldat tömegkoncentrációja (oldott anyag tömege osztva az oldat térfogatával). Az anyagok ezen tulajdonságát optikai aktivitásnak nevezik. Ezt a hatást fel lehet használni a tömegkoncentráció meghatározására.

4.2.4. Holográfia

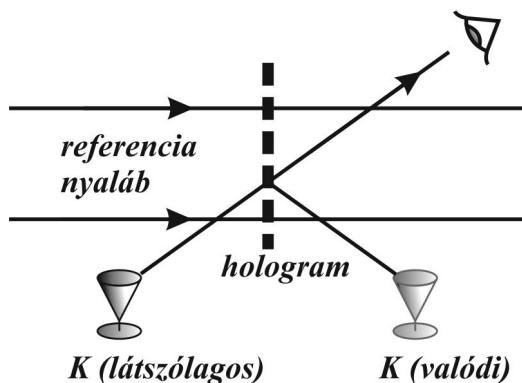
A *holográfia* (görögül a „holosz” teljest, a „grapho” írást jelent) alapelvét 1947-ben GÁBOR Dénes fogalmazta meg (Nobel díj; 1971), amely csak a *koherens fényforrások* (lézerek) megjelenésével vált megvalósíthatóvá. A 4.38. ábra alapján leírható a holográfia jelensége:



4.38. ábra: Hologram készítése

A filmen a két koherens fénycsugár interferenciája fényes és sötét gyűrűk interferenciaképe hozza létre. Az előhívott filmen átlátszó (világos) és átlátszatlan (sötét) tartományok lesznek, ezt nevezik Gábor-féle zónalemeznek. A film az intenzitást (amplitúdót) és a fázist egyaránt rögzíti, szemben a klasszikus filmezéssel, amely csak a tárgyról érkező fény amplitúdóját rögzíti. A fázisviszonyok (mint plusz információ) rögzítése úgy lehetséges, hogy a tárgyról szórt hullámok (tárgyhullám) fázisait egy adott fázisú – az előzővel koherens – referenciacsugárhoz képest rögzítjük.

Ha az előhívott filmet, az ún. hologramot koherens monokromatikus fényvel megvilágítjuk, akkor a megfelelő helyen lévő megfigyelő a hologramon elhajló fényt nézve virtuális képet lát (4.39. ábra):



4.39. ábra: Hologram megtekintése

A valódi háromdimenziós képet más-más irányból nézve az eltakart részek is láthatóvá válnak. Minthogy az eljárás során sehol sem használtunk képalkotó lencsét, a klasszikus felbontóképesség-korlátok elkerülhetők. A kép élesebb, jobb felbontású, mint a lencsés eszközökkel készített fotografikus eljárással készülteké. A hologram bármely töredék része az egész tárgyról tartalmaz információt, belőle az egész kép rekonstruálható.

4.3. Megoldandó feladatok

1. A gyűjtőlencse fókusz távolsága $f = 40 \text{ cm}$. Számítsuk ki a lencse görbületi sugarát!
2. Két síktükör egymással δ szöget zár be. Egy fénysugár T_2 -vel párhuzamosan az A pontba esik be. Rajzoljuk meg a fénysugár útját, ha $\alpha = 30^\circ, 45^\circ$, illetve ha 60° . Határozzuk meg a beeső és a második visszavert sugár által bezárt eltérítés szögét!
3. Egy vékony, homorú tükör az 1 m tárgy távolságú tárgyat 3 m -re képezi le. Mekkora a tükör fókusz távolsága?
4. Egy homorú tükör görbületi sugara 90 cm . Mekkora tárgy távolság esetén kapunk háromszoros nagyítású valódi és virtuális képet?
5. Egy gyűjtőlencse valódi, háromszoros nagyítású képet ad, ha a tárgy és a kép egymástól mért távolsága 1 m . Hányszoros lesz a nagyítás, ha a tárgy és a kép egymástól mért távolsága 80 cm -re csökken?
6. Egy szórólencse fókusz távolsága -12 cm . Hol és mekkora kép keletkezik, ha a tárgy nagysága 10 cm , távolsága pedig 18 cm ?
7. Egy gyűjtőlencse az elé helyezett tárgyról 4-szeres nagyítású képet ad. Ha a lencsét 2 cm -rel eltávolítjuk, akkor a nagyítás 3-szoros. Mekkora a lencse fókusz távolsága?
8. Fénynek üvegből levegőbe való átlépésekor a határszög 42° . Milyen szög alatt lép ki egy 30° -os beesési szögben érkező fénysugár?
9. Víz alatt függőleges oszlop áll, melynek árnyéka 1 m , amikor a napsugarak 45° -os beesési szöggel érkeznek a víz felszínére. Milyen magas az oszlop, ha a víz törésmutatója $\frac{4}{3}$?
10. Egy 20 cm magas akvárium aljára tükröző felületével fölfelé néző síktükört fektetünk, majd az akváriumot félig töltjük vízzel, melynek levegőre vonatkoztatott törésmutatója $1,33$. Az akvárium oldalának tetejénél a vízszintessel 40° -os szöget bezáró irányból érkező lézerefénnyel világítjuk meg a víz felszínét. Kiindulási helyétől mérve, milyen távol éri el ismét a lézerefény az akvárium tetejét? Mennyi idő alatt teszi meg a fény az akváriumba történő belépésétől az akvárium tetejének eléréséig terjedő utat?
11. Plánparallel üveglemezre 45° -os szögben fénysugár esik. Az üveg törésmutatója $1,5$. Mennyivel tolódik el a fénysugár az eredeti útvonalától, ha a lemez 3 cm vastag?
12. Plánparallel üveglemezre 45° -os szögben fénysugár esik. Az üveg törésmutatója $1,5$. Milyen vastag az üveg, ha a fénysugár áthaladás következtében 2 cm -rel tolódik el?
13. Egy prizma egyik oldallapjára merőlegesen beeső fénysugár a másik oldallapon 75° -os törési szöggel lép ki. A prizma anyagának törésmutatója $1,5$. Mekkora a prizma törőszöge?
14. Egy prizma törésmutatója $\sqrt{2}$, törőszöge, pedig 75° -os. Mekkora lehet az a legkisebb beesési szög, amely esetén a fénysugár még elhagyja a prizmat a második törőfelületen?
15. Egy $\sqrt{2}$ törésmutatójú üvegből készült félkör alapú egyenes hasáb sík felületére párhuzamos fénysugarak merőlegesen esnek. A sugarak egy, a félhenger tengelyére merőleges síkban vannak. A hengeres felület mely részein lépnek ki sugarak a félhengerből?
16. A víz felszíne alatt 2 m -rel izzólámpa világít. A vízre átlátszatlan korongot helyezünk. Mekkora legyen a korong sugara, hogy ne jusson ki a fény a vízből?
17. 630 nm hullámhosszú fénynyalábok 945 nm útkülönbséggel találkoznak. Mi lesz az interferenciájuk eredménye?
18. Mekkora emelkedési szögben látszik a Nap, amikor a tó felszínéről visszavert fénye teljesen polarizált? A víz törésmutatója $\frac{4}{3}$.
19. 630 nm hullámhosszú fény 500 nm szélességű résen halad át. Milyen messze lesz az első elhajlási csúcs a fősugártól, ha 2 m -re elhelyezett ernyőn vizsgáljuk?
20. Milyen színűnek látjuk szabad levegőn a $\frac{4}{3}$ törésmutatójú víz alatt sárgának (550 nm -es fényt visszaverő) halat?

5. Atomfizika

Az atomok szerkezetével és az atomokkal magyarázható tulajdonságokkal tágabb értelemben az *Atomfizika* foglalkozik. Az Atomfizika felöleli az atommag és a körülötte található elektronok kapcsolatát kifejező *Atomhéjfizikát* (röviden: Héjfizikát), az atommag szerkezetével foglalkozó *Atommagfizikát* (röviden: Magfizikát) és a belőle kifejlődött *Részecskefizikát*.

Az előző részekben az ún. *Klasszikus fizika* néhány válogatott fejezetét tekintettük át, amelyek betetőzése volt a maxwelli Elektromágnességtan. A XIX. sz. végére a fizikát a „legbefejezetebb” tudományterületnek tartották számon, amelyben már csak néhány „részletkérdés” tisztázása volt hátra, ezek viszont valamennyien az anyag építőelemeivel, az atomokkal voltak kapcsolatosak. A fizika „teljességében” való hitre jellemző, hogy Jolly professzor már 1867-ben azt tanácsolta az érettségiző – és kitűnő képességű – Max PLANCKnak, hogy ne a Fizikát válassza, mert a még „elűzendő homály” olyan csekély, hogy azokat rövidesen tisztázzák. Ennek ellenére Planck fizikus lett és 1900-ban olyan Nobel-díjjal jutalmazott felfedezést tett, amittől kezdve számítjuk a modern fizikát egészen napjainkig. Ez volt a kvantumhipotézis, azaz az energia kvantált természete, ami teljesen ellentétes a klasszikus fizikával. A XIX. század utolsó öt éve még olyan felfedezéseket hozott, mint a röntgensugárzás, a radioaktivitás és az elektron fajlagos töltésének $\left(\frac{e}{m}\right)$ meghatározása. ([10. Video: Az elektron fajlagos töltésének meghatározása](#))

A XIX. századi felfedezések egyértelművé tették az atomhipotézis – mint az anyag legkisebb építőelemének – elfogadását. Joseph John THOMSON a katódsugarakkal végzett kísérletei során – az elektron fajlagos töltését vizsgálva – jutott arra a következtetésre, hogy az elektron az atom része. Mivel az atom egészében semleges, ezért az atomban pozitív töltésnek is kell lenni. Az atomok oszthatatlansága elleni döntő érv a természetes radioaktivitás felfedezése volt. Bebizonyosodott, hogy az atomok olyan részecskék kibocsátására képesek, amelyek során más kémiai elemmé válnak (más szóhasználattal: rendszámuk megváltozik.)

5.1. Atomhéjfizika

Az *Atomhéjfizika* az atomburokban, az ún. elektronfelhőben lejátszódó jelenségekkel foglalkozik. Modern korszakát a XX. századból, a Kvantummechanika kialakulásától számítjuk.

Az Atomhéjfizikát az alábbi felosztás szerint tárgyaljuk:

- A *Kvantumfizika kialakulásának előzményei* (hőmérsékleti sugárzás, fényelektromos jelenség, a fény kettős természete)
- A *Kvantummechanika alapjai* (anyaghullámok, Heisenberg-féle határozatlansági reláció, atommodellek, a Kvantummechanika kialakulása, röntgensugárzás,)

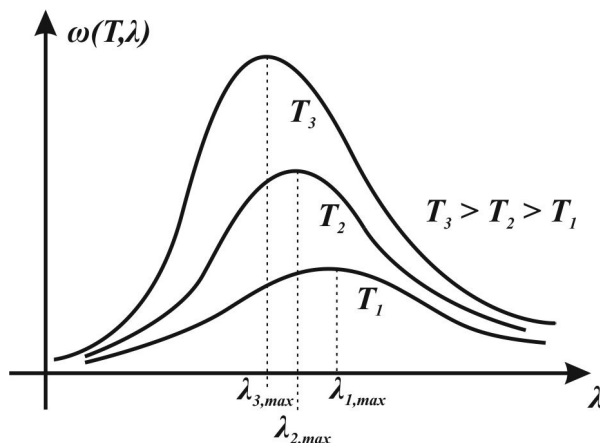
5.1.1. A hőmérsékleti sugárzás

Régi felismerés, hogy minden test elektromágneses hullámokat (pl.: hősugarakat) bocsát ki, függetlenül a környezete hőmérsékletétől, melyet *hőmérsékleti sugárzásnak* nevezünk. Ha két különböző hőmérsékletű testet vákuumba helyezünk (megakadályozva ezzel a hővezetést és a hőáramlást a testek között), akkor a hőmérsékletük bizonyos idő elteltével kiegyenlítődik. Mindkét test elektromágneses sugárzást bocsát ki (emittál) és mindkét test elnyel (abszorbeál) elektromágneses sugárzást, csak a hidegebb többet abszorbeál, mint emittál és fordítva.

A hőmérsékleti sugárzásra vonatkozó alapvető megfigyelések:

- Az elektromágneses kisugárzás hullámhossza széles tartományban változik.
- A sugárzás intenzitása a hőmérséklet növelésével erősen növekvő.
- A sugárzás $\omega(\lambda)$ speciális eloszlása adott testnél csak a hőmérséklettől függ és maximummal rendelkezik.

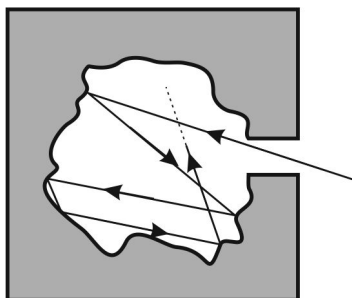
A leírtakat a 5.1. ábra szemlélteti:



5.1. ábra: Hőmérsékleti sugárzás

A *spektrális emisszióképesség* $\omega(\lambda, T)$ számértéke megmutatja az egységnyi felületről egységnyi térszögbe, időegység alatt sugárzott energia egységnyi hullámhossz intervallumra eső részét. SI-beli mértékegysége: $\frac{W}{m^3}$.

Abszolút fekete testnek nevezzük azt az idealizált testet, amely a ráeső elektromágneses sugárzást teljes egészében elnyeli. Ilyen test jó közelítéssel a 5.2. ábrán látható üreges test, amely a résen behatoló sugárzást a sokszoros visszaverődések következtében teljesen elnyeli.



5.2. ábra: Abszolút fekete test

Ha ezt a testet melegítjük, akkor a kilépő sugárzást *üregsugárzásnak*, vagy az *abszolút fekete test sugárzásának* nevezzük. Az abszolút fekete test emisszióképességének hullámhossz- és hőmérsékletfüggése, vagyis $\omega(\lambda, T)$ meghatározása a XIX. sz. végének egyik legvitatottabb témája volt, amely elvezetett a *Kvantummechanika* megalapozásához.

A hőmérsékleti sugárzásra vonatkozó ismert törvények voltak;

1. A *Stefan–Boltzmann-törvény*, amely az önemisszió-képességre az $\frac{1}{A} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \epsilon \sigma T^4$ összefüggést tartalmazza, ahol $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$.
2. A *Wien-féle eltolódási törvény*, amely az $\omega(\lambda, T)$ emisszióképesség λ_{max} maximumhelyének változását tartalmazza, miszerint:

$$\lambda_{max} T \approx 2,9 \cdot 10^{-3} m \cdot K = \text{állandó},$$

azaz a hőmérséklet növelésével az $\omega(\lambda, T)$ emisszióképességet leíró függvény λ_{max} maximumhelye a kisebb hullámhosszok felé tolódik el.

5.1. Példa: A Nap felületi hőmérséklete

A Nap hőmérsékleti sugárzása $0,5 \mu m$ hullámhosszon a legnagyobb. Mekkora a Nap felületi hőmérséklete?

Megoldás:

A Wien-féle eltolódási törvény:

$$\lambda_{max} T \approx 2,9 \cdot 10^{-3} m \cdot K,$$

ahonnan:

$$T = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{0,5 \cdot 10^{-6}} K \approx 5800 K \clubsuit$$

Az $\omega(\lambda, T)$ függvény grafikonja az elvégzett mérésekből ismert volt, de analitikus (matematikai) levezetésére a klasszikus fizika keretében csak részleges eredmények születtek, csak bizonyos hullámhossz-intervallumra voltak illeszthetők.

Planck feltételezte, hogy az f frekvenciával rezgő oszcillátor ε energiája nem lehet folytonosan változó tetszőleges érték, hanem egy legkisebb egységnek, az energiakvantumnak egész számú többszöröse:

$$\varepsilon = n\varepsilon_0,$$

ahol $n=1, 2, 3, \dots$ Planck hipotézise szerint ε_0 a frekvenciával arányos:

$$\varepsilon_0 = hf,$$

ahol $h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, a Planck-állandó. Ezzel, a Klasszikus fizikától teljesen idegen hipotézissel Planck le tudta vezetni a tapasztalattal teljesen egyező

$$\omega(\lambda, T) = 2c^2 h \frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

összefüggést, ahol k a Boltzmann-állandó, h a Planck-állandó, c pedig a fénysebesség vákuumban.

Planck forradalmian új hipotézise – a kvantumhipotézis – azt mondja ki, hogy az elektromágneses sugárzás nem folytonosan nyelődik el, vagy keletkezik, hanem hf adagokban, energia-kvantumokban. Ez ellentétes a maxwelli elmélettel, miszerint az elektromágneses energia folytonosan oszlik el a térben, az elektromágneses mezőben. Planck a hipotézisét 1900. dec. 14-én publikálta, ezt a dátumot tekintjük a modern fizika születésnapjának, amiből a XX. sz. fizikája szól napjainkig is.

Megjegyzés:

A Planck-féle sugárzási törvényből a korábbi korlátozott érvényű sugárzási törvények, mint speciális esetek levezethetők.

5.1.2. A fényelektromos hatás

A *fotoeffektusnak* is nevezett fényelektromos hatás jelensége során fény hatására a fémek felületéből elektronok lépnek ki. (Wilhelm HALLWACHS, 1888.). A fény hullámtermészete alapján az lenne várható, hogy:

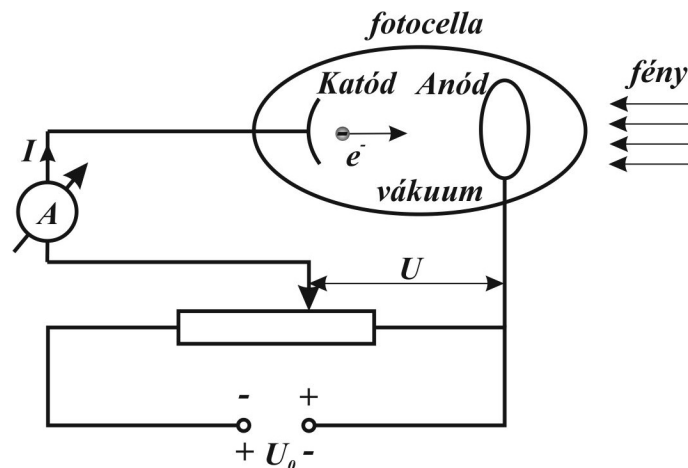
1. A fény intenzitásának növelésével a kilépő elektronok sebessége nőjön.
2. Kellően nagy fényintenzitás és várakozási idő elteltével a fény frekvenciájától függetlenül jöjjön létre a fotoeffektus.

LÉNÁRD Fülöp fotocellás mérései szerint viszont a következő tapasztalatok születtek:

1. A kilépő elektronok sebessége csak a fény *frekvenciájától* és a fémre jellemző ún. kilépési munkától függ.

2. Az elektronkilépés csak akkor jön létre, ha a fény frekvenciája nagyobb egy minimális értéknél, az ún. f_h *határfrekvenciánál* és az elektronkilépés bármilyen gyenge megvilágításnál, de a határfrekvenciánál nagyobb fényfrekvencia esetén is létrejön.

A mérések vázlatja:



5.3. ábra: Fotoeffektus fotocellában

A jelenség magyarázata Albert EINSTEINTŐL származik (1905) Planck *kvantumhipotézisének* felhasználásával. Eszerint a fényben az energia a hullámszerű terjedéssel szemben nem egyenletes (folytonos) elosztásban terjed, hanem

$$\boxed{\varepsilon = hf}$$

nagyságú energiaadagokban, amelyeket *fotonoknak* (fényrészecskéknek) nevezünk. A fotoeffektus, vagyis a foton-elektron kölcsönhatás során a fotonok átadják energiájukat a fémbe lazán kötött elektronoknak. Az átadott energia fedezi egyrészt a fémből való kilépéshez szükséges W_k kilépési munkát, másrészt az elektron mozgási energiáját, azaz:

$$\boxed{hf = W_k + E_k = W_k + \frac{1}{2}mv^2}$$

Einstein 1921-ben a fotoeffektus magyarázatáért fizikai Nobel-díjat kapott.

Einstein fotonelméletét Robert MILLIKAN mérései (1916) igazolták. A kilépő elektronok maximális mozgási energiáját ún. *ellentéres módszerrel* (l. polaritáscsere a fenti ábrán) határozhatjuk meg. A katódból kilépő elektronok egyre növekvő feszültségű elektromos mezőbe jutnak. A legnagyobb sebességű elektronok lefékezését az I fotoáram megszűnése jelzi, az ehhez tartozó feszültség az U_z *zárófeszültség*. A munkatétel szerint:

$$W = \Delta E,$$

azaz:

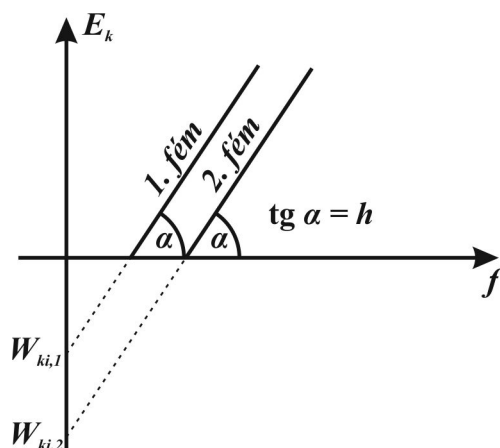
$$eU_z = \frac{1}{2}mv^2.$$

A kilépő elektronok E_k mozgási energiáját a frekvencia függvényében ábrázolva egyeneseket kapunk, amelyek *meredeksége* éppen a h Planck-állandó. A katód anyagát változtatva (W_k

változik) párhuzamos egyenesek adódnak (5.4. ábra), ugyanis az Einstein-egyenlet átrendezésével:

$$E_k = hf - W_k,$$

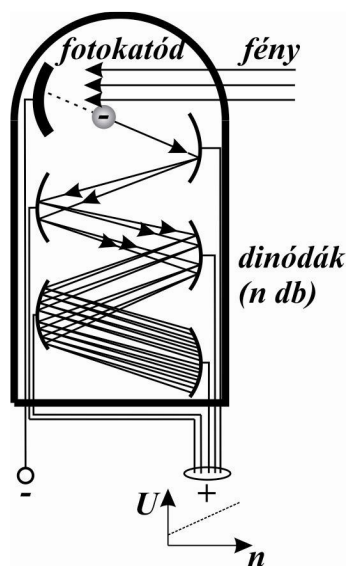
amely matematikailag az $y = mx + b$ alakú egyenes egyenlete, ahol az egyenes m meredeksége a h Planck-állandónak felel meg.



5.4. ábra: A Planck-állandó meghatározása

5.1.3. Fotoelektron-sokszorozó

A fényelektromos jelenség egyik alkalmazási területe az ún. *fotoelektron-sokszorozó* (5.5. ábra), amely a fotocellánál érzékenyebb fénymérő eszköz nagyon sok alkalmazási lehetőséggel.



5.5. ábra: Fotoelektron-sokszorozó

A fotokatódra érkező fény hatására az onnan kilépő elektronok számát szaporítják az egyre nagyobb pozitív feszültségre kapcsolt elektródákból (dinódákból) kilépő ún. szekunder elektronok. Ennek hatására jelentős erősségű *anódáram* érhető el, amely egy munkaellenálláson *feszültséget* hoz létre. Ez a feszültség még további erősítőfokozatra kapcsolható. A rendszer akár egyetlen foton detektálására is alkalmas lehet. ([19. Animáció: Fotoelektron-sokszorozó](#))

5.1.4. A Compton-effektus

Ebben az alponban tárgyalandó *Compton-effektushoz* néhány előismeretet kell feltételeznünk, amelyeket vázlatosan érintünk.

5.1.4.1. A Speciális relativitáselmélet posztulátumai és következményei

Einstein a *Speciális relativitáselméletet* két alapfeltevés (posztulátum) felhasználásával ismer-
te fel:

1. A Fizika minden törvényének matematikai alakja minden *inerciarendszerben* (l. Mecha-
nika c. rész) ugyanaz.
2. A vákuumbeli *fénysebesség* értéke minden inerciarendszerben ugyanannyi.

Ebből két alapvető feltevésből a Speciális relativitáselmélet levezethető. Ezen feltevések kö-
vetkezményeként mutatta ki Einstein, hogy a Klasszikus (newtoni) mechanika csak közelítően
helyes és a fénynél sokkal kisebb ($v \ll c$) sebességek esetén alkalmazható. Ebben a határeset-
ben az Einstein-féle Relativisztikus mechanika a newtoni Mechanika összefüggéseire vezet.
Az Einstein által levezetett összefüggésekből hármát emelünk ki a később tárgyaltakra való
tekintettel:

– Egy v sebességgel mozgó test m tömege a *sebesség függvénye*:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

ahol m_0 a test ún. *nyugalmi tömege* ($v=0$ esetén $m = m_0$). A kinetikus energia kifejezése
a klasszikus mechanikában megismert $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ összefüggéshez képest ezzel a felis-
meréssel

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

alakúra módosul, amely a fénysebességnél sokkal kisebb sebességek ($v \ll c$) esetén

$$E \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

közelítést ad. Látható, hogy az energia kifejezésében megjelenik egy mc^2 nagyságú tag,
amellyel minden nyugalomban lévő, m tömegű test rendelkezik.

– Ebből arra a következtetésre jutott, hogy az m tömeg és az E energia ekvivalens, azaz a
testek ún. *nyugalmi energiája*:

$$\boxed{E = mc^2}.$$

– *Fénysebességgel* semmilyen zérustól *különböző tömegű test nem mozoghat*. A relativitás-elmélet csak a zérus nyugalmi tömegű,

$$\varepsilon = hf$$

energiájú, és

$$I = \frac{h}{\lambda}$$

impulzusú objektumok fénysebességgel történő terjedését engedi meg.

5.1.4.2. A röntgensugárzásról

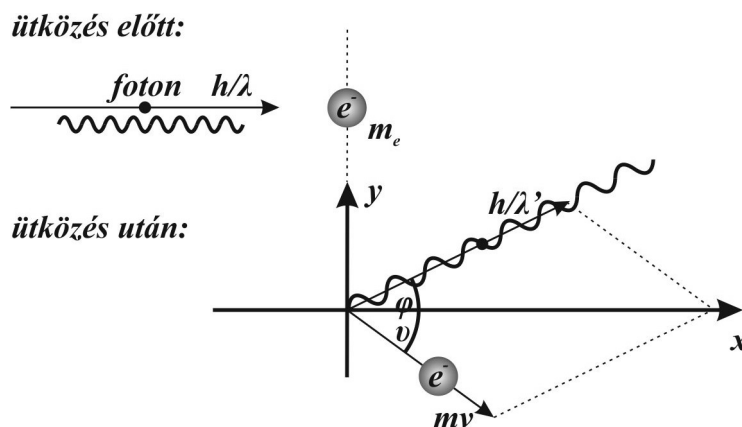
A *röntgensugárzás* az ultraibolya fény hullámhosszánál kisebb hullámhosszú (nagyobb frekvenciájú), nagy áthatólképességű elektromágneses sugárzás. Ilyen sugárzás a természetben is előfordul (pl. a csillagok, így a Nap sugárzásában), de mesterségesen is előállítható. (l. később). A sugárzás hullámtermészetét Max von LAUE (1912) azok kristályokon való elhajlásával kimutatta. Az elhajlásból a kristályt alkotó atomok térbeli elhelyezkedése és a röntgensugarak hullámhossza is meghatározható.

Ezen előismeretek alapján nézzük a Compton-effektus jellemzését.

Arthur COMPTON 1923-ban közölte a nevét viselő effektus felfedezését, amely fotonhipotézist bizonyította. Ennek lényege, hogy nagy hf energiájú röntgensugár szóródását vizsgálta gyengén kötött elektronokon (paraffinon, ill. grafiton) és azt tapasztalta, hogy a *szórt sugárzás f' frekvenciája kisebb*, mint a besugárzó röntgensugárzás f frekvenciája. Ebből

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{c}{f_2} - \frac{c}{f_1}$$

hullámhosszváltozás következik, amelynek értéke függ az eltérítés φ szögétől. A jelenség az elektromágneses hullámok segítségével nem magyarázható. Az elmondottakat az 5.6. ábrán szemléltetjük ([20. Animáció: Compton-effektus](#)):



5.6. ábra: Compton-effektus

A jelenség azzal magyarázható, hogy a röntgensugárzást $\varepsilon=hf$ energiájú részecskék (fotonok) áramlásának fogjuk fel. Ütközés előtt a foton impulzusa a fotonhipotézis $\varepsilon=hf$, valamint a relativitáselmélet $E=mc^2$ összefüggéseiből meghatározható:

$$mc^2 = hf,$$

és ebből:

$$I = mc = h \frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Ütközés után a szórt foton impulzusa:

$$I' = h \frac{f'}{c} = \frac{h}{\lambda'}.$$

A szórás a fotonok és az anyagban lévő elektronok ütközésével magyarázzuk. Az ütközés rugalmasnak tekinthető, így érvényes rá az *impulzusmegmaradás* és az *energiamegmaradás* törvénye is. Az energiamegmaradás törvénye értelmében az elektronnal ütköző primer foton energiájának és az elektron nyugalmi energiájának összege megegyezik a szórt (szekunder) foton energiájának és a v sebességgel kilévő elektron mozgási energiájának összegével:

$$\varepsilon + E_{e^-} = \varepsilon' + E_{k,e^-}.$$

Az impulzusmegmaradás törvényét alkalmazva az elektron és a foton ütközése előtt és ütközése után:

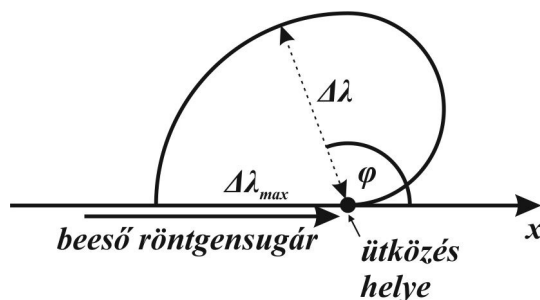
$$I_f = I_{e^-} + I'_f.$$

Az energiamegmaradást és az impulzusmegmaradást kifejező egyenletekbe behelyettesített összefüggések felhasználásával a primer és szekunder foton hullámhosszának különbségére, a hullámhossz növekedésre:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_{e,0}c} (1 - \cos\varphi) = \lambda_C (1 - \cos\varphi)$$

összefüggés adódott, ami jól egyezett a mérésekkel és a kísérletek során ködkamrában készített felvételekkel. A $\frac{h}{m_{e,0}c} = \lambda_C = 2,43 \cdot 10^{-10} m$ állandót Compton-hullámhossznak nevezzük.

A szórt (szekunder) foton hullámhosszának a φ szóródási szögtől való függést az 5.7. ábra szemlélteti:



5.7. ábra: A szórt foton hullámhosszának növekedése a szóródási szög függvényében

Látható, hogy a szórt foton hullámhossz-növekedésének maximális értéke $\varphi=180^\circ$ -os szóródási szögnél van, amely:

$$\Delta\lambda_{max} = \frac{h}{m_{e,0}c} (1 - \cos 180^\circ) = \frac{2h}{m_{e,0}c} = 2\lambda_C.$$

A foton hullámhosszának $\Delta\lambda$ Compton-eltolódásának nagyságrendje miatt az effektus csak kis hullámhosszúságú (nagyenergiájú) fotonok (röntgen- és γ -fotonok) esetén észlelhető, a látható fénytartományban nem.

5.1.5. A hullám-részecske kettősség problémája

A fényvel kapcsolatos jelenségek egy része:

- *Hullámtulajdonsága* alapján értelmezhető. Ilyenek az elhajlás, az interferencia és a polarizáció (*l. fénytan*).
- *Részecske tulajdonsága* alapján értelmezhető. Ezek közé tartozik a hőmérsékleti sugárzás, a fotoeffektus és a Compton-szórás.
- *Mindkét tulajdonsága* alapján értelmezhető. Ilyen az itt nem részletezendő fénynyomás.

A fény (és a mikrovilág többi részecskéje *l. később*) bizonyos körülmények között hullám, más körülmények között részecske tulajdonságot mutat, ezt nevezzük a fény kettős természetének. Az elméleti számítások és a kísérleti bizonyítékok alapján el kell fogadnunk, hogy a fény leírására olyan modellt kell keresni, amelyben a fény egyszerre rendelkezik részecske- és hullámtulajdonságokkal. Compton túllépett az eredeti (Planck-féle) kvantumhipotézisen, miszerint az elektromágneses hullámokhoz részecsketulajdonságot rendelt.

5.1.6. Az anyaghullámok

A makroszkopikus testek általában jól definiált körvonalakkal és méretekkkel rendelkeznek, így viszonylag pontosan lokalizálhatók a térben. Jogosnak tűnt az a feltételezés, hogy az elemi részecskék (elektron, proton, neutron stb.) is határozott körvonalakkal rendelkeznek és adott sugarú, tömegű és töltésű kis golyókhoz hasonlóak. (*l. Statisztikus fizika*). A kísérletek azt mutatták, hogy ez a feltételezés az anyag elemi alkotórészeiről hibás, csak speciális esetekben szolgáltat kielégítő eredményeket.

A mikrorészecskék dinamikai viselkedésének leírása azt kívánja meg, hogy minden *részecskéhez* egy *hullámteret* társítsunk, de fordítva, mint a fényvel kapcsolatban tettük. Ott az elektromágneses mezőhöz rendeltünk fotonokat, itt a részecskékhez rendelünk hullámokat. Louis de BROGLIE 1924-ben állította fel azt a hipotézist, hogy minden részecskéhez hozzárendelhető egy hullám, melynek fizikai jellemzői (hullámhossz, frekvencia) ugyanolyan kapcsolatban állnak a részecske impulzusával és energiájával, mint a foton esetében. Ezt a de Broglie-féle hullámot *anyaghullámnak* nevezzük. Tehát egy m tömegű, v sebességű részecskéhez tartozó anyaghullám hullámhossza:

$$\lambda = \frac{h}{I} = \frac{h}{mv},$$

frekvenciája pedig:

$$f = \frac{E}{h} = \frac{mc^2}{h}.$$

Ha a feltevések helyesek, akkor azt várhatjuk, hogy olyan esetekben, amikor a részecske mozgását korlátozzuk, pl. keskeny résen engedjük csak áthaladni, akkor a hozzá tartozó hullám nem tud szabadon terjeszkedni a térben és interferencia-, ill. elhajlási jelenségek lépnek fel.

5.2. Példa: Az elektron hullámhossza

Számítsuk ki a 150 V feszültségű elektrosztatikus mezőben felgyorsított elektron de Broglie-hullámhosszát!

Megoldás:

Ha egy elektront U feszültségű elektromos mezőben felgyorsítunk, akkor az elektron energiaváltozása a munkatétel szerint:

$$W = \Delta E,$$

ahonnan:

$$eU = E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{I^2}{2m},$$

vagyis:

$$I = \sqrt{2meU}.$$

A haladó elektronhoz rendelt de Broglie-hullám hullámhossza innen:

$$\lambda = \frac{h}{I} = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 150} m \approx 10^{-10} m,$$

ami a röntgensugarak hullámhossztartományába esik.♣

Ha a feltevés igaz, akkor az elektronsugaraknak kristályokon elhajlási és interferencia jelenséget kell mutatni. Ennek a kísérleti bizonyítékát 1927-ben Clinton DAVISSON és Lester GERMER kimutatták, és később más mikrorészecskékre is igazolódott a feltevés.

Makroszkopikus testeknél az anyaghullámok nem észlelhetők, mert a hullámhossz jóval kisebb az észlelhetőség és mérhetőség határánál.

5.3. Példa: Makroszkopikus méretű test de Broglie-hullámhossza

Számítsuk ki a $v = 1 \frac{m}{s}$ sebességgel mozgó $m = 1$ g tömegű test de Broglie-hullámhosszát!

Megoldás:

Az $m = 1$ g tömegű és $v = 1 \frac{m}{s}$ sebességű golyó esetén:

$$\lambda = \frac{h}{I} = \frac{h}{mv} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{10^{-3} \cdot 1} m \approx 6,62 \cdot 10^{-31} m,$$

ami a mérhetőség határán kívül eső kicsiny érték.♣

Ha feltételezzük, hogy az elektronhoz $\lambda = \frac{h}{mv}$ hullámhosszúságú hullám tartozik, akkor például a H -atom esetében – *körpályát* feltételezve – stacionárius hullámjelenség, ún. *állóhullám* csak akkor jöhet létre, ha a kör kerülete a hullámhossz egész számú többszöröse:

$$2r\pi = n\lambda = n \frac{h}{mv}.$$

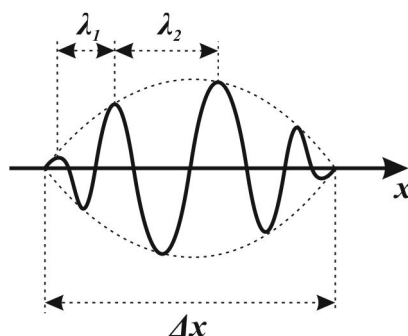
Ebből a pályaimpulzus-momentum:

$$L = rmv = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar,$$

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ -nek egész számú többszöröse (\hbar -t ejtsd: h -vonás, l . Bohr-féle kvantumfeltétel).

5.1.6.1. Az anyaghullámok tulajdonságai

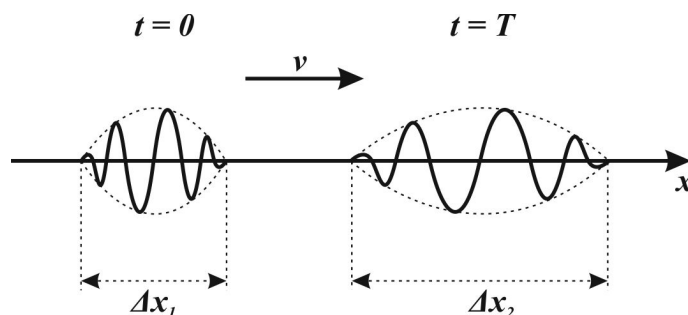
Az anyaghullám hipotézis az $I=mv$ impulzusú részecskékhez $\lambda = \frac{h}{mv}$ hullámhosszúságú, végtelen kiterjedésű síkhullámot rendel, amely viszont ellentmond annak, hogy a mozgó *részecske kiterjedése véges*, amit számos tapasztalat igazol. Az ellentmondás feloldható, ha a részecskéhez véges kiterjedésű *hullámcsomagot* (hullámcsoportot, hullámvonulatot) társítunk az 5.8. ábra szerint:



5.8. ábra: Anyaghullám

Ebben az esetben a hullámfüggvény amplitúdója csak a tér egy véges Δx tartományában különbözik zérustól, és matematikailag több, különböző hullámhosszú hullám szuperpozíciójának (összetevésének) tekinthető. Bebizonyítható, hogy amennyiben a hullámcsomag λ_1 és λ_2 tartományban folytonosan tartalmaz minden hullámhosszt, és minden hullámhosszhoz tartozó síkhullám részt vesz a hullámcsomag kialakításában, akkor az eredő hullám a tér egy korlátozott tartományára kiterjedő egyetlen hullámcsoport lesz. A hullámcsoport Δx kiterjedése annál nagyobb, minél kevésbé tér el egymástól λ_1 és λ_2 értéke és fordítva. Az interferenciakísérletekkel igazolt de Broglie-féle összefüggés a hullámcsoporra leginkább jellemző *közelítő λ hullámhosszértéket* határozza meg, amiből az következik, hogy a λ által meghatározott *impulzus is bizonytalanságot* hordoz. A térben lokalizált részecske sebessége az egész hullámcsomag előrehaladási sebességével (csoportsebességével) azonos.

Az 5.9. ábra az x tengely mentén v sebességgel mozgó részecskének megfelelő hullámcsomag terjedését és annak időbeli változását szemlélteti.

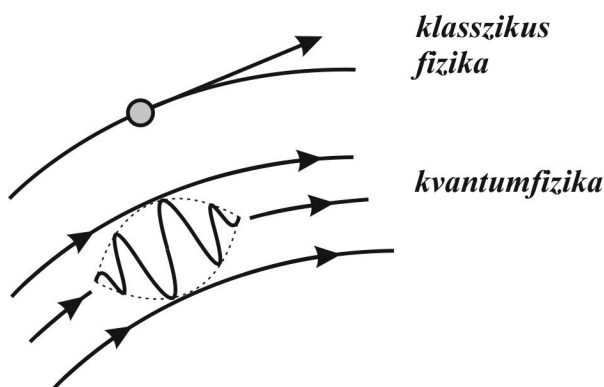


5.9. ábra: Hullámcsomag kiszélesedése

A részecske mozgása során a hullámcsomag *térbeli kiterjedése* megnőtt. Matematikailag bizonyítható, hogy a magára hagyott (erőmentesen mozgó) részecskét jellemző hullámcsomag mindig kiszélesedik, „szétfolyik”. A kiszélesedés annál gyorsabban következik be, minél keskenyebb volt az eredeti Δx_1 szélesség. ([21. Animáció: Anyaghullám haladása](#))

5.1.7. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció

Láttuk, hogy egy szabadon mozgó részecskéhez (pl. elektronhoz) hullámcsomag rendelhető. A részecskét egy hullámcsomaggal jellemezhetjük, amelynek következménye, hogy a részecske pályája is „elmosódik” (5.10. ábra).

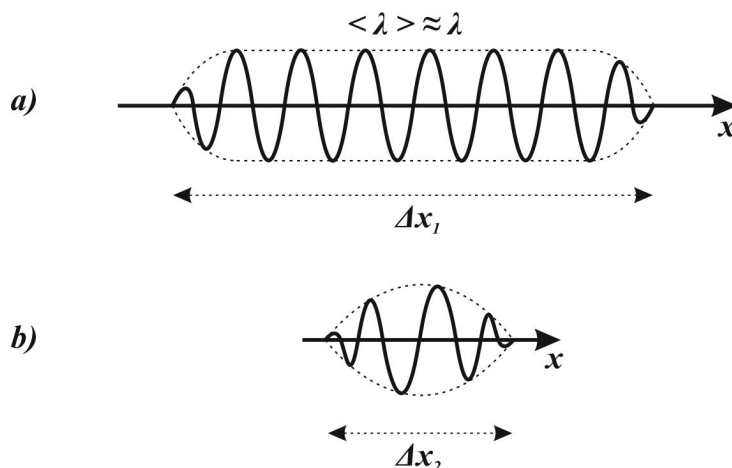


5.10. ábra: Részecske pályája klasszikusan és kvantumfizikailag

A mozgó részecskéhez rendelt hullámcsomagot Δx térbeli kiterjedésével, valamint $\langle \lambda \rangle$ átlagos hullámhosszával lehet jellemezni.

Az 5.11. ábrán látható különböző hullámcsomagok összehasonlításából arra következtethetünk, hogy:

- Az a) ábra szerinti hullámcsomag által meghatározott részecske *helye* Δx nagy kiterjedése miatt *nehezen lokalizálható*, viszont $\langle \lambda \rangle \approx \lambda$ nagy pontossággal ismert ($\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$), tehát a részecske *impulzusa nagy pontossággal megadható*.
- A b) ábrán a részecske *helye* Δx viszonylagosan kisebb kiterjedése miatt pontosabban *ismert* (lokalizálhatóbb), viszont a hullámhossz és ezzel együtt az *impulzus* sokkal *bizonytalanabb*.



5.11. ábra: Heisenberg-féle határozatlansági reláció

Ezekből arra következtethetünk, hogy a részecske helye és impulzusa nem határozható meg egyszerre tetszőleges pontossággal.

Az elméleti levezetések alapján megmutatható, hogy a hely Δx bizonytalansága és az impulzus ΔI bizonytalansága között

$$\Delta x \Delta I \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$$

összefüggés áll fenn. Ez a **Heisenberg-féle határozatlansági reláció**. A makroszkopikus szemléletünk számára szokatlan határozatlansági reláció annak a következménye, hogy a mikrofizikai mérésekben a mérőeszköz mindig befolyásolja a mérés eredményét. A hely és az impulzus mérésekor fellépő bizonytalanság a kettő szorzatára zérustól különböző értéket ad. Ez azt jelenti, hogy:

”Egy részecske helyét és impulzusát nem lehet egyidejűleg tetszőleges pontossággal meghatározni: ha tetszőleges pontossággal megmértük a részecske helyét ($\Delta x \rightarrow 0$), akkor az impulzusáról semmit nem tudunk elmondani ($\Delta I \rightarrow \infty$), és fordítva.”

A határozatlansági reláció fennáll az energia és az idő vonatkozásában is:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2},$$

azaz a részecske valamely állapotának energiájának határozatlansága és az adott állapotban való tartózkodás időtartamának szorzata nem lehet tetszőlegesen kicsiny. Ezen összefüggés segítségével – az energiabizonytalanságot nagy pontossággal mérve – igen rövid részecske- (vagy részecskeállapot-) élettartamok határozhatók meg.

5.4. Példa: Az idő határozatlansága

Egy atomban lévő gerjesztett állapotú elektron (l . később) energiája I eV-tal nőtt. Mekkora az alapállapotba való visszatérésének (foton kisugárzásának) időbizonytalansága?

Megoldás:

Az energia és idő bizonytalanságát felhasználva:

$$\Delta t \geq \frac{\hbar}{2\Delta E} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ s} \approx 3,3 \cdot 10^{-16} \text{ s},$$

melynek tipikus értéke a kapott minimális bizonytalanságnál csak nagyobb lehet, konkrét esetben 10^{-8} s nagyságrendű.♣

5.5. Példa: Makroszkopikus test sebességének határozatlansága

Egy $m = 1 \text{ g}$ tömegű golyó helyét $\Delta x = 10^{-6} \text{ m}$ bizonytalansággal mértük meg. Mekkora bizonytalansággal tudjuk meghatározni a sebességét?

Megoldás:

A test sebességét a hely és az impulzus bizonytalanságát felhasználva:

$$\Delta t \geq \frac{\hbar}{2\Delta E} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ s} \approx 3,3 \cdot 10^{-16} \text{ s},$$

pontosággal határozhatjuk meg, ez pedig sok nagyságrenddel kisebb az elérhető mérési pontosságnál. Más szóval: makroszkopikus testeknél a határozatlansági reláció használata értelmetlen.♣

5.1.8. Klasszikus atommodellek**5.1.8.1. Az atom fogalma**

Görög bölcselek (ANAXAGORASZ, LEUKIPPOSZ, DÉMOKRITOSZ) mintegy két és fél ezer évvel ezelőtt spekulatív úton arra a következtetésre jutottak, hogy minden anyag oszthatatlan részecskékből, atomokból áll („atomosz” = oszthatatlan). Ez a felfogás a XIX. században JOHN DALTON, JOSEPH LOUIS GAY-LUSSAC, AMADEO AVOGADRO, MICHAEL FARADAY és mások kutatási eredményeire támaszkodva tudományos elméletté fejlődött.

5.1.8.2. A Thomson-modell

A XX. század elején már több kísérleti tény utalt arra, hogy az atom, nevével ellentétben nem oszthatatlan, hanem részekből tevődik össze:

- Katódsugarakkal végzett kísérletekből kiderült, hogy az *elektron az atom része*. Mivel az atom semleges, ezért pozitív töltésű részt is kell, hogy tartalmazzon.
- A természetes *radioaktivitás* felfedezésével (1896) kiderült, hogy az ún. radioaktív anyagokból (l. később) háromféle sugárzás léphet ki; melyeket α -, β - és γ -sugaraknak nevezzük. Ezek közül:
 - az α -sugárzás pozitív töltésű He-atommagokból áll,
 - a β -sugárzás általában (lásd később) negatív töltésű és elektronok alkotják,
 - a γ -sugárzás nagyenergiájú elektromágneses hullám.

- Dmitrij Ivanovics MENGYELEJEV 1869-ben megalkotta a róla elnevezett *periódusos rendszert*, ami a növekvő atomtömegek szerint többnyire szakaszosan (periodikusan) ismétlődő kémiai tulajdonságokat mutatott, aminek magyarázatát az atomok szerkezetében kell keresni.

Az atom szerkezetéről szerzett ismeretek birtokában az első tudományos igényességű modellt Joseph John THOMSON írta le 1902-ben. Eszerint az *atomot egyenletes pozitív töltéseloszlású, tömör, rugalmas részbe ágyazott negatív töltésű pontszerű elektronok alkotják*. Az atomok fénykibocsátását az elektronok külső hatásra történő rezgésével magyarázta. Az atomok vonalas színeképek magyarázatára azonban az a modell nem volt alkalmas. Lénárd az atomok tömörségét azzal cáfolta, hogy a katódsugárcsőből az elektronokat fémfólián át (Lénárd-ablak) ki tudta vezetni azok eltérése nélkül a szabadba.

5.1.8.3 A Rutherford-modell

A Thomson-féle atommodellt – a hiányosságai felfedezése után – Ernest RUTHERFORD fejlesztette tovább, aki az α -sugárzás vékony aranyfólián történő szóródását vizsgálta (1911). Rutherford ekkor már tudta, hogy az α -részecskék He^{2+} -ionok. A tapasztalatok arra vezették, hogy azok értelmezéséhez fel kell tételezni az alábbiakat:

- Az atom *pozitív* töltése az atom közepén lévő kicsiny „*magban*” helyezkedik el, és itt koncentrálódik az atom csaknem teljes tömege.
- Az atom belsejének nagy részét a mag körül keringő elektronok töltik ki, a pozitív és negatív töltésnek összege zérus.
- Az elektronok keringéséhez szükséges centripetális erőt a Coulomb-vonzás biztosítja.
- A mag és az α -részecske közötti kölcsönhatás a Coulomb-taszítás.

A *Rutherford-féle atommodell* az atomon belüli tömeg- és töltéseloszlást jól írja le, de a *tapasztalatoknak* több ponton is *ellentmond*. Segítségével sem az atomok elektrodinamikai stabilitása, sem azok vonalas színe nem értelmezhető. A mag körül keringő elektronnak, mint gyorsuló töltésnek folyamatosan elektromágneses hullámokat kellene sugározni, ami energia-vesztést okoz. Ennek következtében az energiát veszítő elektronoknak az atommagba kellene zuhanniuk. A modellnek azonban a legnagyobb érdeme az atommag felismerése volt.

A számítások eredményeként az atommag átmérője 10^{-15} m nagyságrendű, ami öt nagyságrenddel kisebb az egész atom átmérőjénél, 10^{-10} m-nél. A különböző anyagok atommagjának töltése az $e=1,6 \cdot 10^{-19}$ C elemi töltés egész számú többszörösének adódott és ennek száma megegyezett az elem periódusos rendszerbeli Z rendszámával. A modell számos alapvető fontosságú felismerés mellett tehát továbbfejlesztésre szorult.

5.1.9. A Bohr-féle atommodell

5.1.9.1. A vonalas színekép

A XIX. század végén hatalmas tapasztalati anyag állt a fizikusok rendelkezésére az atomok által kibocsátott (és elnyelt) elektromágneses sugárzásokat illetően. Spektroszkópiai módszerekkel vizsgálták a kibocsátott fényt az infravörös tartományból az ultraibolyáig, melyek mindig vonalások (diszkrét hullámhosszúságúak) voltak.

Johann Jakob BALMER a legegyszerűbb atom, a *hidrogén színeképét* vizsgálva tapasztalati képletet talált a színeképét alkotó különböző hullámhosszok reciprokára, miszerint:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

ahol $m = 3, 4, 5, \dots$, és $R \approx 1,1 \cdot 10^{-7} \frac{1}{m}$, az ún. Rydberg-állandó. A Balmer-képlet jó eredményeket adott a *H*-atom színeképvonalainak hullámhosszára, de az adatokat nem tudta értelmezni.

5.1.9.2. A Bohr-modell posztulátumai

A problémára Niels BOHR adta meg a választ azzal, hogy a Rutherford-atommodellt elfogadva, annak hiányosságai kiküszöbölésére bevezetett három spekulatív posztulátumot (elméleti kiindulópontot):

1. Az elektron az atomburokban csak olyan körpályán mozoghat, amelyre érvényes:

$$L = rmv = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar,$$

az ún. *kvantumfeltétel*, amelyben $n = 1, 2, 3, \dots$. Azaz az elektron impulzusmomentuma csak egy elemi impulzusmomentum, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, vagy más néven *hatáskvantum* egész számú többszöröse lehet.

2. Ha az *elektron ezen a pályán* található, akkor ellentétben a klasszikus elektrodinamika törvényeivel, *nem bocsát ki elektromágneses sugárzást*.
3. Az elektron csak akkor sugároz, ha a nagyobb sugarú *m*-edik pályáról a kisebb sugarú *n*-edik pályára ugrik, és ilyenkor

$$\Delta E = E_m - E_n = hf$$

energiájú, *f* frekvenciájú fotont emittál.

5.1.9.3. A hidrogén színeképe

Az elektron atommag (proton) körüli körmozgásához szükséges centripetális erőt a Coulombvonzás biztosítja. Mindezek figyelembevételével a hidrogén esetében a mozgásegyenlet a dinamika alaptörvényéből:

$$\sum F = ma,$$

vagyis az elektron proton körüli mozgása esetében:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} = m_{e,0} a_{cp} = m_{e,0} \frac{v^2}{r}.$$

Az atommag körüli mozgás kvantumfeltétele:

$$rm_{e,0}v = n \frac{h}{2\pi}$$

Ezekből az n -edik pálya r_n sugara:

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_{e,0} e^2} n^2,$$

és az n -edik pályán lévő elektron v_n kerületi sebessége:

$$v_n = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h} \cdot \frac{1}{n}.$$

Az elektron összenergiája a kinetikus és potenciális energia összege:

$$E = E_k + E_p,$$

ami az n -edik pályán a ponttöltés potenciális energiájára kapott összefüggés alapján:

$$E_n = \frac{1}{2} m_{e,0} v_n^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_n}.$$

Ha ide a fenti összefüggéseket behelyettesítjük, akkor:

$$E_n = -\frac{m_{e,0} e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2},$$

adódik, vagyis a mag-elektron rendszer kötött összenergia, az ún. kötési energia negatív, az elektronnak külső energiára van szüksége ahhoz, hogy kiszabadulhasson az atommag vonzó hatása alól. Az n neve: *főkvantumszám*, értékei:

$$\boxed{n=1, 2, 3, \dots, \infty}.$$

Ha ezt alkalmazzuk a Bohr-féle posztulátumra:

$$\Delta E = E_m - E_n = hf,$$

akkor:

$$hf = \frac{m_{e,0} e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

és ezért:

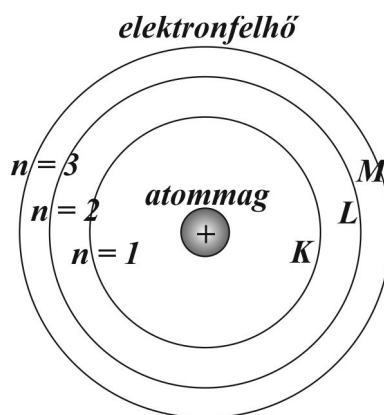
$$\boxed{\frac{1}{\lambda} = \frac{m_{e,0} e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 c} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)},$$

ami megegyezik a tapasztalati Balmer-képlettel, amelyben $R = \frac{m_{e,0}e^4}{8\varepsilon_0^2h^2c}$ a Rydberg-állandó-
nak felel meg. Ez alapján a számított és a mért hullámhosszok (ill. $f = \frac{c}{\lambda}$ frekvenciák) gya-
korlatilag megegyeznek. Ebből látszik, hogy a H -atom *színképében* csak *diszkrét frekvenciák*
(hullámhosszok) fordulhatnak elő, összhangban a vonalas színképekkel.

Megjegyzés:

Ha $m \rightarrow \infty$, akkor a λ_m kontinuitás eléréséhez szükséges hullámhosszt kapjuk meg.

Láthatjuk, hogy a Bohr-modell alapján az elektron az $n = 1$ főkvantumszámú pályánál nem kerülhet közelebb az atommaghoz, ezt nevezzük *alapállapotnak*. További következmény, hogy az elektron összenergiája is csak a kvantumfeltételeknek megfelelő diszkrét értékeket vehet fel, nem változhat folytonosan (5.12. ábra).



5.12. ábra: Főkvantumszámok

5.6. Példa: H -atom

Határozzuk meg a hidrogénatommag körül keringő elektron pályájának sugarát, az elektron kerületi sebességét az alapállapotban, valamint ionizációs energiáját!

Megoldás:

a) Az $n = 1$ főkvantumszámú alapállapotú pálya sugara:

$$r_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_{e,0} e^2} \approx 0,54 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

b) Az elektron kerületi sebessége alapállapotban:

$$v_1 = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h} \approx 2,18 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Az $n = 1$ főkvantumszámú alapállapotú pályán lévő elektron kiléptetéséhez szükséges ionizációs energia a pálya kötési energiájával azonos nagyságú és ellenkező előjelű:

$$E_i = -E = \frac{m_{e,0}e^4}{8\varepsilon_0^2h^2} \approx 2,2 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 13,6 \text{ eV} \spadesuit$$

A diszkrét energiaszintek kísérleti bizonyítását Frank és Gustav HERTZ végezték el 1913-ban (Gustav HERTZ Heinrich HERTZ unokaöccse, aki az elektromágneses hullámokat kimutatta és ekkor már nem is élt). Kimutatták az atom diszkrét energianívóinak létezését a fénykibocsátástól függetlenül.

5.1.9.4. A Bohr-modell hiányosságai

A *Bohr-modell* számos látványos eredménye mellett alapvető hiányosságokkal is rendelkezik:

- Nem magyarázható meg vele a *magasabb rendszámú elemek színeképe*.
- Nem ad magyarázatot a spektrumvonalak közötti *intenzitáskülönbségekre*, még *H*-atomok esetén sem.
- A modell szerint az atomot lapos *korongnak* kellene tekinteni, ami ellentmond a gázmodell jól bevált „*golyó*” hipotézisének.
- A modell nem ad választ a színeképek „*finomszerkezetére*”.
- Nem értelmezhető vele a *kovalens kötés*.

A Bohr-modellt az eredmények és hiányosságok figyelembevételével már a megalkotásától kezdve is továbbfejlesztendőnek ítélték.

5.1.9.5. Kiegészítések a Bohr-modellhez

5.1.9.5.1. A mellékkvantumszám

Arnold SOMMERFELD (1915) a Rutherford-féle „bolygómodell” alapján az elektronok mozgási pályáit *ellipszisekkel* egészítette ki, amelynek egyik *fókuszában* van az *atommag*. Az eddig használt *n* főkvantumszám mellett ez az ún. *l mellékkvantumszám* bevezetését vonta maga után, ahol:

$$l=0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

Ha az ellipszisek nagy- és kistengelyének felét *a*, ill. *b* jelöli, akkor érvényes az

$$\frac{b}{a} = \frac{l+1}{n}$$

összefüggés. Ha $l = n - 1$, akkor $\frac{b}{a} = 1$, azaz az ellipszis körpályába megy át.

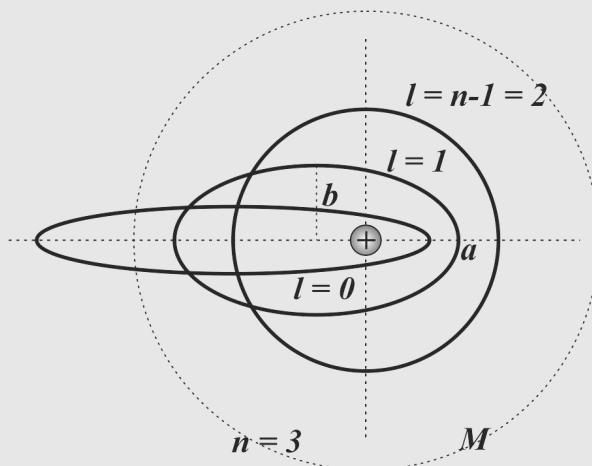
5.7. Példa: Elektronpályák meghatározása

Határozzuk meg az $N = 3$ főkvantumszámhoz tartozó elektronháj lehetséges pályáit!

Megoldás:

A pálya alakja $l = 0$, és $l = 1$ esetben ellipszis, melyeknek egyik fókuszpontjában az atommag van. Az $l = 0$ mellékkvantumszámhoz tartozó pálya alakja elnyújtottabb. Ha a mellékkvantumszám értéke $l = n - 1 = 2$, akkor $\frac{b}{a} = 1$ miatt $a = b$, vagyis az ellipszis körre fajul.

Az 5.13. ábra $n = 3$ esetén szemlélteti a lehetséges pályaalakokat.♣



5.13. ábra: Mellékvantumszámok

Adott n főkvantumszámú héjon az elektron energiája egy adott érték. Az l mellékvantumszám és az L impulzusnyomaték közötti összefüggés:

$$L = rm_e v = mr_e^2 \omega = \hbar \sqrt{l(l+1)},$$

vagyis az azonos n , de különböző l értékű pályákon az *elektronok energiája* megegyezik, de az *impulzusnyomatékuk* különböző.

5.1.9.5.2. A Zeeman-effektus, mágneses kvantumszám

Pieter ZEEMAN kísérletileg kimutatott egy elméletileg már korábban megjósolt jelenséget: erős *mágneses mezőben a színképvonalak több összetevőre bomlanak* (felhasadnak). A Zeeman-effektus értelmezése: a mag körül keringő elektronok kis köráramoknak tekinthetők, amelyek áramerőssége:

$$I = \frac{Q}{t} = -\frac{e}{T} = -e \frac{\omega}{2\pi},$$

és az A felületű körpályához

$$m = IA$$

nagyságú m *mágneses momentum* tartozik (Ampère-dipólus, $N = 1$). A továbbiakban az elektron (és más elemi részek) mágneses momentumát megkülönböztetésül μ betűvel fogjuk jelezni. Ezzel a mag körül keringő elektron mágneses momentuma:

$$\mu = -e \frac{\omega}{2\pi} r^2 \pi.$$

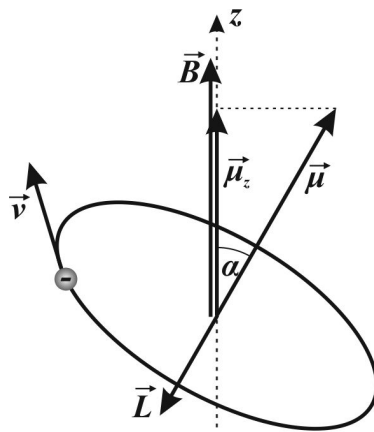
Az elektron impulzusmomentuma:

$$L = rm_e v = mr_e^2 \omega,$$

és ezek összevetéséből az elektron mágneses dipólmomentum vektorára

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$$

összefüggést kapunk, azaz a mágneses dipólmomentum arányos az impulzusmomentummal. A két mennyiség elektronnál ellentétes irányú vektor (5.14. ábra).



5.14. ábra: Mágneses kvantumszám

Az elektron pályamozgásához tartozó mágneses momentum nagysága ebből:

$$\mu = -\frac{e}{2m_e} \hbar \sqrt{l(l+1)} = \mu_B \sqrt{l(l+1)},$$

ahol $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$, az atomi mágneses momentum egysége, a *Bohr-magneton*.

A mágneses mező \vec{B} indukcióvektorának iránya egyezzen meg a koordináta-rendszer z irányával, valamint \vec{B} és az elektron $\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$ mágneses momentum-vektora által bezárt szög legyen α . Ekkor a $\vec{\mu}$ vektornak a \vec{B} mágneses indukció irányába eső komponensének nagysága:

$$\mu_z = \frac{e}{2m_e} L_z = \frac{e}{2m_e} \hbar \cos \alpha = \mu_B m,$$

ahol m a *mágneses kvantumszám*. A Zeeman-effektus azt mutatta, hogy m értéke – szemben a klasszikus fizikai következtetésekkel – nem lehet akármekkora. Elméleti megfontolásokból az következik, hogy a mágneses kvantumszám:

$$m = \pm l, \pm(l-1), \dots, \pm 1, 0$$

lehet, tehát ha az elektron pályájának beállítását megpróbáljuk meghatározni a \vec{B} mágneses indukcióval jellemezhető külső mágneses mezőben, akkor csak diszkrét szögeket kapunk eredményül, nem lehet tetszőleges értékű. Ez a klasszikus elektromágnességgel sehogy sem magyarázható.

5.1.9.5.3. Az elektron saját impulzusmomentuma, a spin

Az elektron saját impulzusmomentumát – *spinjét* – az elektron forgásával próbálták megmagyarázni, de ez ellentmondáshoz vezetett. A spin is kvantált mennyiség, lehetséges értékei a levezetést mellőzve:

$$L_S = s\hbar,$$

ahol

$$s = \pm \frac{1}{2},$$

az ún. spinkvantumszám.

Az elmondottak összefoglalásaként azt mondhatjuk, hogy a Bohr-elmélet alapján kialakított elgondolások szerint az atom elektronállapotát négy kvantumszám jellemzi:

1. Az n főkvantumszám jellemzi az elektron energiáját.
2. Az l mellékkvantumszám határozza meg az adott energiájú ellipszispálya lehetséges impulzusmomentumait, a pálya excentricitását (eltérését a körből).
3. Az m mágneses kvantumszám megadja az impulzusmomentum-vektor lehetséges vetületeit a külső mágneses mező irányához képest.
4. Az s spinkvantumszám az elektron saját impulzusmomentumát jellemzi.

5.1.9.6. A periódusos rendszer

A periódusos rendszer felépítését a **Pauli-féle tilalmi** (kizárási) **elvvel** (1925) lehet megmagyarázni. Ez kimondja, hogy:

„Az atomban nincs két olyan elektron, amelyeknek mind a négy kvantumszáma megegyezik. Azonos főkvantumszámú héjon, azonos mellékkvantumszámú pályán legfeljebb csak két elektron tehet, ellentétes spinnel.”

Az alábbi táblázat az egyes állapotokat szemlélteti, ahol K, L, M, \dots betűk az egyes főkvantumszámokhoz ($n = 1, 2, 3, \dots$) tartozó héjakat jelölik. A pályákat megadó mellékkvantumszámok $l = 0, 1, 2, \dots$ értékei helyett az s, p, d, \dots betűket használják.

5.1. táblázat: Az elektronhéjak feltöltődése

főkvantumszám n	mellék- kvantumszám l	mágneses kvantumszám m	spin- kvantumszám s	állapot	lehetséges állapotok száma	
1 (K héj)	0	0	$\pm \frac{1}{2}$	1s	2	2
2 (L héj)	0	0	$\pm \frac{1}{2}$	2s	2	
	1	-1, 0, 1	$\pm \frac{1}{2}$	2p	6	8
3 (M héj)	0	0	$\pm \frac{1}{2}$	3s	2	
	1	-1, 0, 1	$\pm \frac{1}{2}$	3p	6	
	2	-2, -1, 0, 1, 2	$\pm \frac{1}{2}$	3d	10	18

Látható, hogy adott n főkvantumszámhoz $2n^2$ darab (2, 8, 18, ...) különböző kvantumállapot tartozik.

5.1.10. A kvantummechanika kialakulása

A Bohr-elmélettel kapcsolatos nehézségek és hiányosságok, valamint a részecske-hullám ketősség értelmezése arra vezette a fizikusokat, hogy a mikrorendszerek viselkedése nem írható le a makroszemléletnek megfelelő modellel.

1925-ben Werner HEISENBERG, majd néhány hónappal később Erwin SCHRÖDINGER egy-egy új, alakilag merőben különböző elméletet állított fel, amelyet az alkalmazott matematikai módszerről *Mátrixmechanikának*, és *Hullámmechanikának* neveztek el. Az egymással fizikai tartalmat tekintve csakhamar egyenértékűnek bizonyult elméletekből fejlődött ki a *Kvantummechanika*.

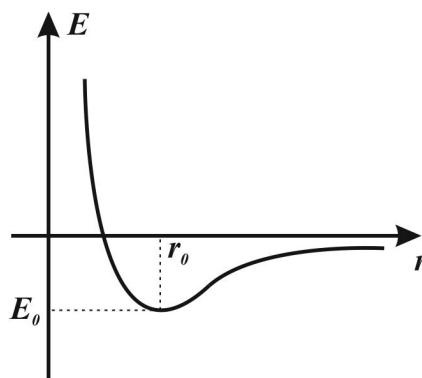
Ez a mikrofizikai jelenségeknek egy olyan rendszeres és ellentmondásmentes elmélete, amely az egész természetszemléletünket módosította. A Kvantummechanika nagy matematikai apparátust és felkészültséget igényel és kevésbé szemléletes elmélet, de szerepe az atomi szintű jelenségek modern értelmezésében nélkülözhetetlen.

A Kvantummechanika kiállta az idők próbáját és segítségével nagyon sok, addig ismeretlen fizikai folyamat előrevetítése (jóslása), ill. leírása vált lehetővé. Alapja:

1. A mikrorészecskék energiája csak diszkrétan (kvantáltan) változhat.
2. A mikrorészecskék hullámtulajdonságokkal rendelkeznek.
3. A határozatlansági reláció érvényes rájuk.

A *Schrödinger-féle hullámegyenletből* a kvantáltság, a kvantumugrások természetszerűen adódnak, vagyis nem posztuláltak (mint a Bohr-elméletben), hanem az egyenlet megoldásá-

nak következményei. A hullámfüggvényből kiszámítható annak valószínűsége, hogy az elektron a mag terében hol tartózkodik, melyik Bohr-sugár a legvalószínűbb, ahol energiája a legkisebb.



5.15. ábra: Elektron legvalószínűbb tartózkodási helye adott energiájú héjon

5.8. Példa: Az elektron energiája a H-atomban

Határozzuk meg az atommag erőterében tartózkodó elektron energiájának minimumát és az ehhez tartozó pályasugarat a kvantummechanika feltevéseiből!

Megoldás:

Az összenergia:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e}{r^2} = \frac{I^2}{2m} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e}{r}.$$

Mivel a Bohr-posztulátumok szerint I legkisebb értéke $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ lehet, és az impulzus

nagysága az impulzusmomentum és a sugár hányadosa: $I = \frac{L}{r}$, ezért az összenergiára fentieket felhasználva a következőt kapjuk:

$$E = \frac{h^2}{8\pi m} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e}{r}.$$

Ennek a függvénynek a

$$\frac{dE}{dr} = 0$$

feltétel által meghatározott helyen van minimuma. A deriválás és rendezés után azt kapjuk, hogy:

$r = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2} \approx 0,53 \cdot 10^{-10} m$ -nél az energiaminimum, melynek értéke:

$$E \approx -13,6 \text{ eV}$$

Ez megegyezik a Bohr-modell szerinti $n = 1$ főkvantumszámú pályához tartozó értékkel. Az elektron r_0 sugarú gömbhéjon tartózkodik a legnagyobb valószínűséggel, ami a határozatlansági reláció figyelembevételével nem zár ki egy $\pm \Delta r$ mértékű ingadozást.♣

5.1.11. Az egydimenziós Schrödinger-féle hullámegyenlet

A hullámegyenlet alapvetően 4 dimenziós: az x , y , és z térkoordináták és a t idő mind változó. Mi csak az ún. időtől független, stacionárius esettel foglalkozunk egy dimenzióban, pl. x irányú mozgás esetén. Az m tömegű mikrorészecskéhez tartozó hullám amplitúdóját jelöljük $\Psi(x)$ -szel. A hullámegyenletből (l. korábban) erre a speciális esetre

$$\boxed{\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\Psi(x)}$$

másodrendű differenciálegyenlet adódik (ami már nem parciális differenciálegyenlet), ahol $\lambda = \frac{h}{mv}$, a részecske de Broglie-hullámhossza. A részecske E teljes energiája az E_k kinetikus és E_p potenciális energia összege. Ekkor:

$$E = E_k + E_p,$$

és ebből a kinetikus energia:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = E - E_p.$$

A részecske sebességére innen

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p)}$$

adódik. Ebben az esetben a de Broglie-hullámhossz:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2}{m}(E - E_p)}}.$$

Ezzel a differenciálegyenlet

$$\boxed{\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}(E - E_p)\Psi(x) = 0}$$

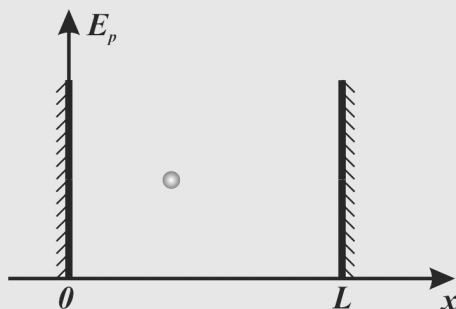
alakra hozható, ami az egydimenziós időtől független **Schrödinger-egyenlet**, és megoldása, a Ψ hullámfüggvény, az m tömegű részecske E_p potenciális és E_k kinetikus energiájú lehetséges állapotait írja le. A Ψ hullámfüggvény megengedett értékei a függvény Ψ_i sajátértékei. Annak a valószínűsége, hogy a részecskét alkalmas mérőeszközzel megmérve a Ψ_i állapotban találjuk:

$$\boxed{P_i = |\Psi_i|^2},$$

mérés után közvetlenül pedig a részecske hullámfüggvénye felveszi a mért Ψ_i állapotot.

5.9. Példa: Részecske egydimenziós „potenciáldobozban”

A Schrödinger-egyenlet alkalmazásaként határozzuk meg az L szélességű, erőmentes, y irányú ($E_p(x) = 0$) potenciálgödörbe (potenciáldobozba, 5.16. ábra) bezárt m tömegű részecske állapotait! Milyen a részecske hullámfüggvénye?



5.16. ábra: Részecske potenciáldobozban

Megoldás:

a) A részecske egy L szélességű, végtelen mélységű potenciálgödörben tartózkodik. $E_p(x) = 0$ miatt a probléma egydimenziós Schrödinger-egyenlete:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\Psi(x) = 0.$$

Ha bevezetjük a $\frac{2m}{\hbar^2} E = k^2$ jelölést, akkor a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\Psi = A \cos kx + B \sin kx.$$

Mivel a peremfeltételek miatt $\Psi(0) = \Psi(L) = 0$, ezért $A = 0$, és:

$$B \sin kx = 0,$$

ami akkor teljesül, ha

$$k = n \frac{\pi}{L},$$

ahol $n = 1, 2, 3, \dots$. Ha a $\frac{2m}{\hbar^2} E = k^2$ és $k = n \frac{\pi}{L}$ egyenleteket rendezzük, akkor a részecske lehetséges energiáira

$$E_n = \frac{\hbar^2}{8mL^2} n^2$$

kifejezést kapunk, a hullámfüggvény pedig:

$$\Psi = \begin{cases} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x & (0 < x < L)\text{-nél} \\ 0 & (x \leq L) \text{ és } (x \geq L)\text{-nél} \end{cases}.$$

A legkisebb energiaérték $n=1$ esetén

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2},$$

vagyis a részecskének nincs zérus energiájú állapota.

b) A részecske impulzusa $E = \frac{I^2}{2m}$ -ből:

$$I = \sqrt{2E_n m},$$

ahová $E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$ -t behelyettesítve

$$I = \frac{h}{2L} n$$

adódik. Ha figyelembe vesszük, hogy $\lambda = \frac{h}{I}$ a de Broglie-hullámhossz, akkor a potenciáldoboz és a részecske állapotait reprezentáló hullámfüggvényekben szereplő hullámhosszok között

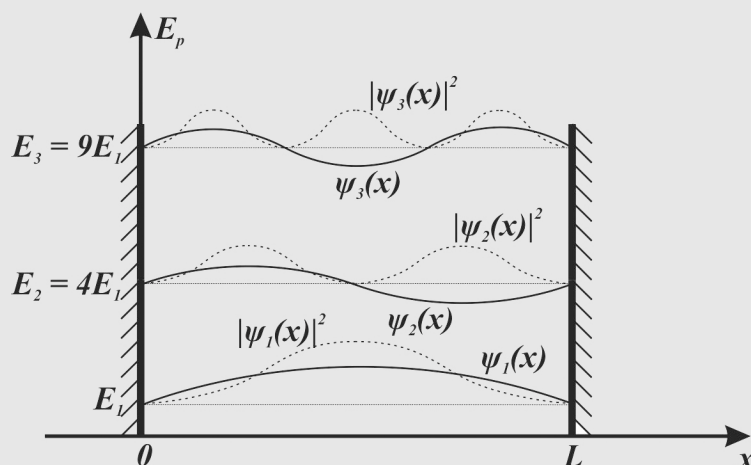
$$L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

összefüggés áll fenn, vagyis az L szakaszon belül állóhullámok alakulnak ki

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

hullámhosszakkal, ahol $n = 1, 2, 3, \dots$

A részecske különböző állapotait leíró $\Psi_n(x)$ hullámfüggvények, és az adott állapotban való részecske megtalálási valószínűségét megadó $|\Psi_n(x)|^2$ az 5.17. ábrán láthatók. ([22. Animáció: Részecske potenciáldobozban](#))



5.17. ábra: Hullámfüggvények és megtalálási valószínűségek

Ebben az esetben az energia kvantáltsága érthető, mert állóhullám csak bizonyos hullámhosszoknál lehetséges, amelyekhez meghatározott impulzusok és meghatározott energiák tartoznak. Ezek olyanok, hogy a hullámhossz fele egész számszor fér bele a potenciál-

doboz L hosszúságába. A legkisebb energiaérték teljes egyezésben van a Heisenberg-féle határozatlansági relációval is, hiszen a helykoordináták bizonytalansága:

$$\Delta x \sim L,$$

az impulzusé pedig:

$$\Delta I \sim 2I,$$

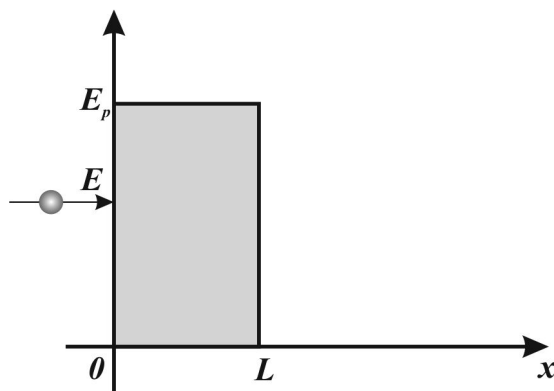
vagyis:

$$\Delta k \Delta I \sim 2IL,$$

ami $I = \frac{h}{2L}n$ miatt minden n -re teljesül.♣

5.1.12. Az alagúteffektus

A klasszikus fizika szerint, ha egy test E teljes energiája kisebb, mint a részecske útjába eső akadály E_p potenciális energiája, akkor nem fordulhat elő, hogy a test megjelenjen az akadály túloldalán (5.18. ábra).

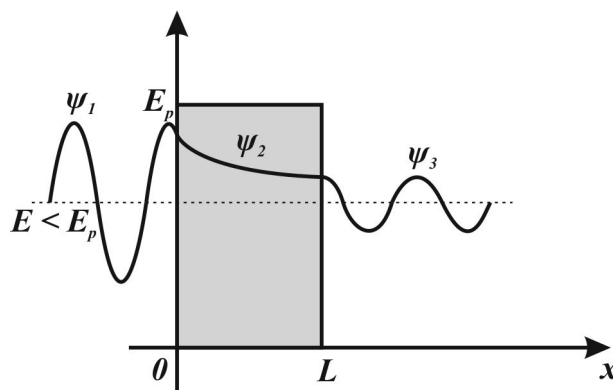


5.18. ábra: Potenciálgát

Ha a Schrödinger-egyenletet felírjuk a három térrészre ($x < 0$, $0 \leq x \leq L$ és $x > L$) külön-külön, akkor a megoldásból az következik, hogy a részecske hullámfüggvénye az $x > L$ térrészben, vagyis a potenciálgát túloldalán nem zérus. Ez azt jelenti, hogy a részecske potenciálgáton való áthaladásának, az $x > L$ térrészbe való bejutásának P valószínűsége nem nulla, hanem a számítások szerint:

$$P = \frac{16E(E_p - E)}{E_p^2} e^{-\frac{2L}{\hbar}\sqrt{2m(E_p - E)}} > 0.$$

Vagyis láthatjuk, hogy a részecske a potenciálgátnál kisebb energia ($E < E_p$) esetén is át tud jutni a potenciálgáton, mintha „alagutat” fúrna magának (innen az elnevezés).



5.19. ábra: Alagúteffektus

A részecske megtalálási valószínűsége annál nagyobb a gát túloldalán, minél kisebb a gát L szélessége, minél kisebb E_p magassága a részecske E energiájához képest (5.19. ábra).
([23. Animáció: Alagúteffektus](#))

Az alagúteffektus fontos szerepet játszik az atommagok α -bomlásánál ($l.$ később) az ún. hidegemisszióknál, fémek érintkezéseken való elektronátmenetnél, a magfúzióknál és más mikrofizikai folyamatnál.

Megjegyzések:

1. Ha az atom állapotát a Schrödinger-egyenlettel akarjuk kiszámítani, akkor az egydimenziós modell már nem alkalmas erre, a probléma gömbszimmetrikus. Ott

$$E = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r},$$

és a háromdimenziós térre érvényes egyenletet kell alkalmazni. A gömbszimmetria miatt célszerű a gömbi koordináták alkalmazása, azaz

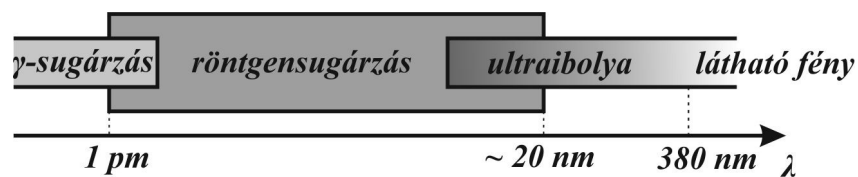
$$\Psi = \Psi(r, \varphi, \vartheta).$$

A megoldás messze túlmutat a meglévő matematikai ismereteken.

2. Az elektron saját impulzusmomentumát és mágneses momentumát a relativisztikus hullámmechanika Dirac-egyenlete szolgáltatja. A teljes Ψ állapotfüggvény nemcsak a három térkoordinátától, hanem a spin-koordinátáktól is függ, vagyis az E_n energiát nem n^2 , hanem $2n^2$ különböző kvantumállapot valósítja meg.
3. A kvantummechanika a diszkrét energiák értékét minden külön önkényes feltevés nélkül matematikai levezetésekkel szolgáltatja.

5.1.13. A röntgensugárzás

Történeti okok miatt a néhányszor 10 nm -nél rövidebb és hozzávetőlegesen 1 pm -nél hosszabb hullámhossztartományba eső elektromágneses hullámokat *röntgensugárzásnak* nevezük (5.20. ábra).

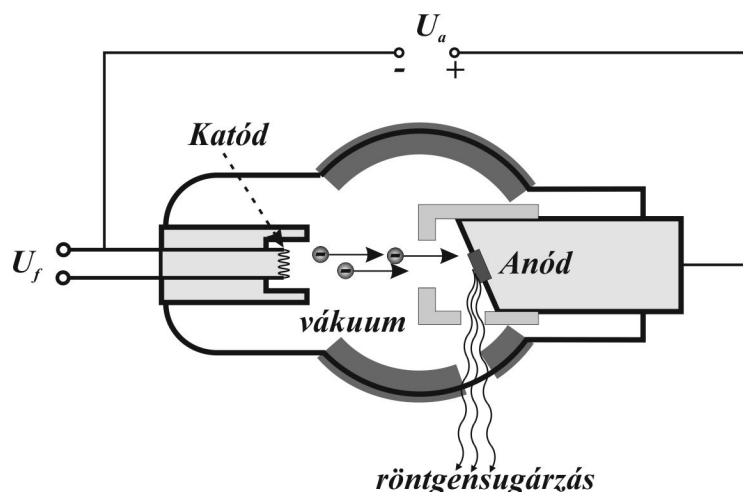


5.20. ábra: Röntgensugárzás tartománya

Az egyes tartományok ábrán látható átfedésénél az elnevezés kétértelmősége nem a hullámhossz, hanem a sugárzás eredete (keletkezési körülménye) szerint történt.

Wilhelm Conrad RÖNTGEN a katódsugárzás tanulmányozása során fedezte fel az általa X-sugárzásnak („ismeretlen, rejtélyes”) nevezett sugarakat 1895-ben. Az X-sugarak (röntgensugarak) rendkívül gyors gyakorlati (orvos-diagnosztikai) alkalmazhatósága nagy szerepet játszott abban, hogy a felfedező rendkívül rövid idő alatt világhírnévre tett szert és elsőként kapott fizikai Nobel-díjat 1901-ben.

A *röntgenső* egy speciálisan röntgensugarak keltése céljából kifejlesztett elektroncső. A röntgensugárzás keltésére szolgáló röntgenkészülékek (röntgensövek) egy változatának vázlatos rajza az 5.21. ábra szerinti.



5.21. ábra: Röntgenső felépítése

A röntgenső a *katódsugárcső*vek egyik fajtája. Zárt üvegburában két elektróda található, a negatív töltésű *katód*, és a pozitív töltésű *anód*. A burán belül nagy *vákuumot* hoznak létre. A fűtött izzókatódból *termikus elektronemisszió* útján kilépő, majd elektromosan nyalábolt elektronok a *kV* nagyságrendű U_a *gyorsítófeszültségű* elektromos mező hatására *felgyorsulnak* és a pozitív töltésű *anódba csapódnak*. (11. Video: [A katódsugárzás Crookes-csőben](#)) Az elektronok kinetikus energiájának döntő hányada az anódban többszörös „lassú fékezés” hatására *hővé* alakul. Ezért az anódot hűteni kell és magas olvadáspontú fémből kell készíteni. Az elektronok kinetikus energiájának kisebb hányada alakul át *röntgensugárzássá*. A számunkra nem kedvező irányú sugárzást megfelelő alakú és elrendezésű anód elektródával és elnyeletéssel (pl. ólomköpennyel) lehet hatástalanítani.

Röntgensugarak nemcsak röntgensőben kelthetők, hanem a természetben is előfordulnak (a világűrben és a Naptól is érkeznek), elemi részecskék kölcsönhatása során is keletkezhetnek.

5.1.13.1. A röntgensugarak tulajdonságai

A röntgensugarakkal végzett kísérlettel azt bizonyították, hogy azok *elektromágneses hullámok*. Az első interferencia kísérletek sikertelenek voltak, mert az optikai rácshoz hasonló, de a röntgensugarak hullámhossztartományába eső rácsállandójú eszközt technikailag nem lehet készíteni. Ebből a szempontból szerencsés körülménynek bizonyult, hogy a röntgensugarak és a kristályok szerkezetének kutatása a XX. század elején egybeesett. Max von LAUE a röntgensugaraknak kristályon való elhajlásával két kérdésre tudott választ adni:

- egyrészt a kristályok szabályos, periodikus rácsszerkezetére,
- másrészt a röntgensugárzás hullámtermészetére és a hullámhossz értékére.

Ma a röntgendiffrakciós eljárást rendkívül széles körben használják, a DNS „feltérképezése” is ezzel a módszerrel történt.

A röntgensugárzást *intenzitásával* (felületi sugárzási teljesítménysűrűségével) is lehet jellemezni. A keletkezett sugárzás intenzitása az anódba csapódó elektronok számától függ, amelyet a katód fűtőáramával lehet szabályozni.

A röntgensugárzásban keletkező röntgensugárzás *áthatolóképessége* (az ún. „keménysége”) az anódba csapódó elektronok sebességétől függ, amit az U_a anódfeszültséggel lehet szabályozni. Bizonyos esetekben a becsapódó elektron

$$eU_a = \frac{1}{2}mv^2$$

nagyságú kinetikus energiája teljes egészében egyetlen foton

$$\varepsilon = hf_{max}$$

nagyságú energiájává alakul, és ezekből az elérhető maximális frekvencia:

$$f_{max} = \frac{eU_a}{h},$$

illetve a minimális hullámhossz:

$$\lambda_{min} = \frac{c}{f_{max}} = \frac{hc}{eU_a} = \frac{1}{U_a}.$$

Ez a **Duane–Hunt-törvény**.

A röntgensugárzás az érzékszerveinkben nem vált ki érzékelhető ingert, így csak indirekt úton, detektáló eszközökkel lehet kimutatni, melyek lehetnek:

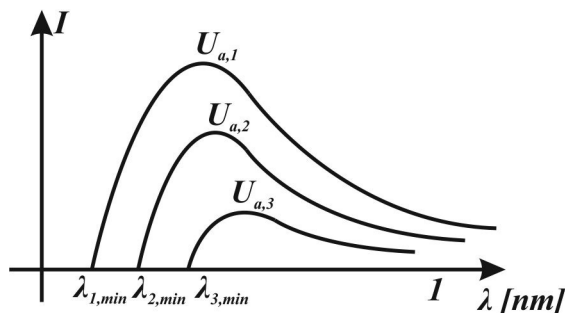
- fotokémiai anyagok (röntgenfilm, emulzió),
- lumineszkáló (fénykibocsátó) anyagok (pl.: képcsőbevonatok),
- ionizációs kamrák (csövek),
- termoelektromos anyagok,
- szcintillációs fotoelektron-sokszorozók és mások.

A röntgensugárzás törését két közeg határfelületén nehéz kimutatni, ugyanis a törésmutató közelítően 1, és szinte független az anyagi minőségtől. Ezért fókuszáló lencsék sem készíthetők és terjedése egyenes vonalú.

5.1.13.2. Röntgenspektrumok

5.1.13.2.1. A fékezési sugárzás

Az ún. „fékezési” sugárzás az anódba csapódott elektronoknak a mag erőterében bekövetkező gyors fékeződése következtében jön létre, azaz a mag és az elektron között fellépő elektrosztatikus kölcsönhatás következménye. A fékezési sugárzás folytonos spektrumát az 5.22. ábra szemlélteti.

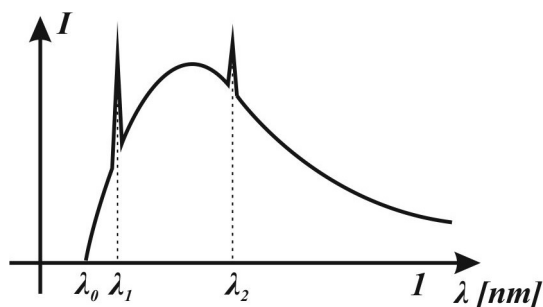


5.22. ábra: Fékezési röntgensugárzás

Az elektron teljes mozgási energiáját általában több lépésben, több atommag mellett való elhaladás során veszíti el. A fékezésből megmaradó „energiamaradékot” az elektron az anód atomjainak *ionizálása* fordítja. Ha az elektron összes energiája negatívvá válik, akkor megszűnik „szabadnak” lenni és valamelyik anódatomhoz kötődik.

5.1.13.2.2. A karakterisztikus sugárzás

A folytonos spektrumú fékezési sugárzás mellett az emissziós röntgenspektrumban éles spektrumvonalak is megjelennek, azaz a fékezési sugárzás folytonos spektrumára egy vonalas spektrum szuperponálódik. A kísérletek azt bizonyítják, hogy a spektrumvonalak az anód *anyagaira jellemzőek* (karakterisztikusak). Kimutatták, hogy a *karakterisztikus* spektrum vonalai növekvő Z rendszámú anódok esetén a rövidebb hullámhosszak felé tolódnak el (Henry MOSELEY, 1913). Az eltolódás mértéke alkalmas új elemek rendszámának megállapítására.



5.23. ábra: Röntgenspektrum karakterisztikus vonalakkal

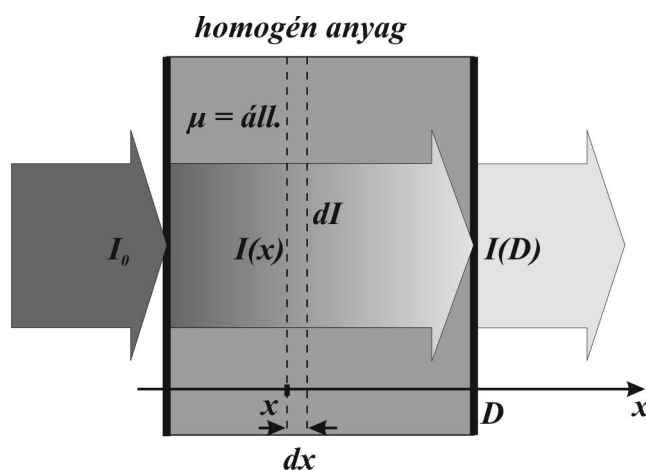
Tájékoztatásul az 5.23. ábrán egy tipikus röntgenspektrumot ábrázoltunk, a λ_1 és λ_2 hullámhosszokhoz tartozó karakterisztikus sugárzás éles spektrumvonalakként látható. Mivel a röntgensugárzáshoz *keV* nagyságrendű fotonenergia tartozik, ebből arra lehet következtetni, hogy ezek a spektrumvonalak nem származhatnak az anód atomjainak legkülső elektronhéjából, amelyhez csak *eV* nagyságrendű fotonenergiák tartoznak. A *karakterisztikus* röntgensugárzás

az *anód atomjainak* belső (betöltött) elektronhéjain lévő elektronok *átmenetei* során keletkezhetnek. Ha az anódba csapódott elektron a belső (betöltött) héjak valamelyikéből képes elektront kiütni (az atomot gerjeszteni), akkor a nagyobb főkvantumszámú pályák valamelyikéről (pl.: L , M) elektron ugrik annak helyére és a pályák közötti energiakülönbség biztosítja a röntgenfoton kibocsátását.

5.1.13.3. A röntgensugár és az anyag kölcsönhatása

5.1.13.3.1. A sugárgyengülési törvény

A tapasztalat szerint a röntgensugár az anyagon való áthaladása közben *gyengül* (egy része elnyelődik), energiája az anyagban más energiává alakul (pl.: hővé, ionizáció fedezésére stb.). Valamely homogén, izotróp közegben a röntgensugár I intenzitásának dI csökkenése arányos az intenzitással és a dx megtett úttal (5.24. ábra):



5.24. ábra: Sugárelnyelés homogén anyagban

Matematikailag:

$$dI \sim -I dx,$$

vagyis:

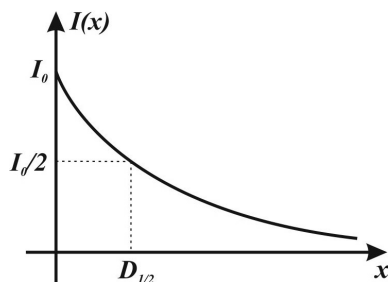
$$dI = -\mu I dx,$$

ahol μ az anyagra jellemző lineáris gyengítési (elnyelési) együttható. SI-beli mértékegysége:

$\frac{1}{m}$. Ez a differenciálegyenlet szétválasztható és $x=0$ -nál $I=I_0$ kezdeti feltétel mellett megoldása:

$$I = I_0 e^{-\mu x}.$$

Ez az ún. *sugárgyengülési törvény*. Az 5.25. ábra a gyengülést szemlélteti.



5.25. ábra: Gyengülési törvény

5.10. Példa: A felezési rétegvastagság

Határozzuk meg a μ lineáris elnyelési együtthatóval jellemezhető anyagnak a belépő röntgensugár intenzitásának felére csökkentéséhez szükséges vastagságát!

Megoldás:

A kezdeti I_0 intenzitás felére csökkentéséhez tartozó rétegvastagságot $D_{\frac{1}{2}}$ *felezési vastagságnak* nevezünk, amely a sugárgyengülési törvényből meghatározható: $\frac{1}{2}$

$$\frac{I_0}{2} = I_0 e^{-\mu D_{1/2}},$$

ahonnan az egyenlet átrendezésével:

$$e^{\mu D_{1/2}} = 2,$$

és így a felezési rétegvastagság:

$$D_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\mu} . \clubsuit$$

5.1.13.3.2. A gyengülés részfolyamatai

A sugárzás gyengülésére kapott összefüggések levezetésénél nem térünk ki azokra az atomi szintű kölcsönhatásokra, amelyek összességében a gyengülést okozzák. Ezek a *fotoeffektus*, a *Compton-szórás* (ezekről korábban már volt szó) a *Rayleigh-féle szórás* és a *párváltás* (l. később).

Rayleigh-szórás alakul ki akkor, ha a foton nem lazán kötött elektronokon szóródik, mint a Compton-szórásnál, hanem az atomhoz erősen kötött elektronokon. Ebben az esetben a rövidebb hullámhosszúságú sugárzás az anyagban erősebben szóródik, azaz a szóródáshoz tartozó μ_{Rayleigh} ún. parciális gyengítési együttható hullámhosszfüggő, rövidebb hullámhosszakra nagyobb.

A párváltásról itt csak annyit jegyzünk meg, hogy a nagyenergiájú röntgenfoton az atommag terében átalakulhat elektron-pozitron részecske párrá. Ennek energetikai mérlege:

$$E = hf \geq 2m_e c^2,$$

ahol m_e az elektron (és pozitron) tömege, és innen a párkeltéshez szükséges minimális fotonenergiára:

$$E_{min} = 2m_e c^2 \approx 1,022 \text{ MeV}$$

adódik, azaz ennél kisebb energiájú röntgenfoton nem alkalmas párkeltésre.

A korábban bevezetett μ gyengítési (elnyelési) együttható a leggyakoribb esetekben a

- fotoeffektusból származó μ_f ,
- a Compton-effektusból származó μ_C és
- a párkeltésből származó μ_p

parciális gyengítési együtthatók

$$\mu = \mu_f + \mu_C + \mu_p$$

összege.

A röntgensugárzás (ionizáló hatása miatt) az élő anyagot, a sejtek életfolyamatait kedvezőtlenül befolyásolja. Ennek következtében:

- a diagnosztikában a lehető legkisebb intenzitású és legrövidebb ideig tartó sugárzások kívánatosak,
- a terápiában a kóros sejtek elpusztítására nagy intenzitású és tartós besugárzást alkalmaznak.

5.2. Atommagfizika

5.2.1. Az atommagok tulajdonságai

A XX. század elején végzett kutatások azt az eredményt hozták, hogy nemcsak az atom, de az *atommag sem oszthatatlan*. A radioaktív sugárzás felfedezése és a sugárzás természetének vizsgálata azt bizonyította, hogy az csak a magból származhat. A háromféle radioaktív sugárzsról kiderültek az alábbiak:

- Az α -sugárzás *He-atommagokból* áll, amelynek tömege csak az atommag tömegével mérhető össze (szórási kísérletek).
- A β -sugárzás *elektronsugárzás* (amely származhatna a héjból is), de mivel ezzel egyidejűleg megváltozik az anyag kémiai viselkedése (rendszáma) is, arra következtetésre jutottak, hogy az nem származhat az atomhéjból.
- A γ -sugárzás a legnagyobb áthatolóképeségű *elektromágneses sugárzás*, aminek az energiája nagyságrendekkel nagyobb, mint az elektronsugárzás közötti átmenetnél várható sugárzásé, tehát az is a magból származik.

Mindezek alapján elmondhatjuk, hogy a Rutherford által felfedezett atommag összetett objektum és mérete hozzávetőlegesen százazerszer kisebb az atom méreténél. Az *atommag protonokból és neutronokból* áll, ezek közös neve: *nukleon*.

A proton pozitív töltése számértékben az elektrónéval azonos, $e=1,6 \cdot 10^{-19}$ C, tömege $m_p=1,673 \cdot 10^{-27}$ kg. A neutron elektromosan semleges, és tömege $m_n=1,675 \cdot 10^{-27}$ kg.

A neutron és a proton sugara hozzávetőlegesen 10^{-5} m = 1 fm (amit Enrico FERMI tiszteletére *ferminek* is szoktak nevezni). Az *elemeket* a protonszám, azaz a Z rendszám jellemzi egyértelműen, amely minden elemre állandó. A proton és a neutronok N számának összege az A tömegszám:

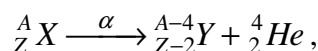
$$\boxed{A = Z + N}.$$

Az *izotópok* az elemek olyan változatai, amelyek csak a neutronszámban, ezzel együtt a tömegszámban különböznek. Egy X elem esetén a szokásos jelölés:

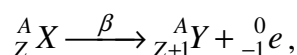
$${}^A_Z X$$

Ezekkel a jelölésekkel a radioaktív sugárzások reakcióegyenletei:

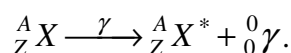
α -bomlás:



β -bomlás:



γ -bomlás:



Megjegyzés:

Természetes radioaktív bomláskor a γ -sugárzás a másik két sugárzástípus kíséretében lép fel, amikor az új mag (Y) gerjesztett állapotban marad, ahonnan γ -foton kibocsátásával jut alapállapotba.

5.2.2. Az atommag mérete és sűrűsége

Az atommagokon végzett szórás kísérletek azt mutatták, hogy a magok közelítően gömb alakúak és R sugaruk:

$$R = R_0 \sqrt[3]{A},$$

ahol $R_0 \approx 1,2 \text{ fm}$.

Mivel a gömb térfogata R^3 -al egyenesen arányos, ebből az következik, hogy a magok sűrűsége is közelítően azonos és nagysága:

$$\rho \cong \frac{Am_p}{V} = \frac{Am_p}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Am_p}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A} = \frac{3m_p}{4\pi R_0^3} \approx 2,3 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

ami a makroszkopikus testek sűrűségénél sok nagyságrenddel nagyobb.

Az atommag tömege az egész atom tömegének több mint 99,9 %-át teszi ki, míg térfogata az atom térfogatának mindössze 10^{-14} -ed része, ebből adódik a rendkívül nagy, 10^{17} nagyságrendű sűrűség.

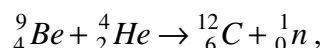
5.2.2.1. A neutron

A neutron 1932-ben James CHADWICK fedezte fel, és neutron-proton ütközésekből számították ki, hogy a neutron tömege csupán 0,14%-kal nagyobb a protonénál.

Megjegyzés:

A radioaktív β -bomlásnál a neutron bomlik elektronra és protonra és az előbbi hagyja el keletkezése pillanatában az atommagot.

A neutronot szolgáló magreakció egyenlete:



amelyre Chadwick a CURIE-házaspár (Irén JOLIOT-CURIE és Frédéric JOLIOT-CURIE) kísérleti eredményeinek helyes értelmezéséből következtetett.

5.2.3. Az atommag kötési energiája

Összetett részecskékből álló rendszer – így az atommag is – tömege kisebb a szabad alkotók (összetevők) tömegének összegénél. Ezzel a tömegkülönbséggel arányos energia szabadul fel, amikor a kötött rendszer az alkotóelemeiből létrejön, és ekkora energiát kell befektetni, amikor a kötött rendszert részecskéire akarjuk bontani. Ezt az energiát a kötött rendszer kötési energiájának nevezzük.

5.11. Példa: Kötési energia

Számítsuk ki, hogy mekkora munka befektetésével lehet a deutérium (2_1H) magjának (a deuteronnak) neutronját és protonját szétválasztani!

Megoldás:

Szétválasztás előtt a 2_1H tömege:

$$m_{{}^2_1H} = 2,014102m_u,$$

ahol $m_u = 1,66054 \cdot 10^{-27}$ kg, az ún. atomi tömegegység.

Szétválasztás után a 1_1H tömege (a proton tömege):

$$m_{{}^1_1H} = 1,007825m_u,$$

és a 1_0n (neutron) tömege:

$$m_{{}^1_0n} = 1,008665m_u.$$

A szétválasztott proton és neutron tömege összesen:

$$m_{{}^1_1H} + m_{{}^1_0n} = 2,016490m_u.$$

A szétválasztás utáni és előtti tömegkülönbség:

$$\Delta m = 0,02388m_u,$$

ami Einstein összefüggésével

$$W = \Delta E = (\Delta m)c^2 \approx 2,22 \text{ MeV}$$

munkát jelent. A neutron és a proton összeépülésekor, a deuteron létrejöttekor ekkora energia szabadul fel. Vessük össze ezt az elektron kötési energiájával, ami „mindössze” eV - keV nagyságrendű különböző rendszámú elemek különböző héjain. Ebből arra lehet következtetni, hogy a magerő az elektromosnál hozzávetőleg 10^2 -szor erősebb kölcsönhatás.♣

A Z rendszámú és A tömegszámú ${}_Z^A X$ atommag kötési energiája általánosan:

$$\Delta E = -(\Delta m)c^2 = -\left[Zm_p + (A - Z)m_n - M \right] c^2,$$

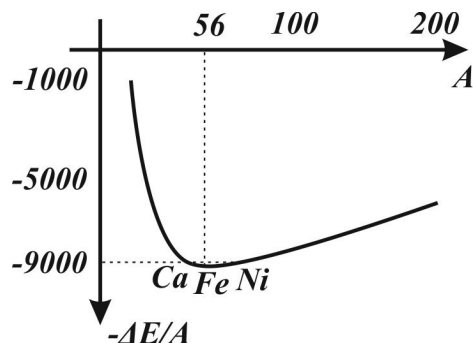
ahol M a kísérletileg mért atomtömeg. Ennek az abszolút értékét,

$$W = \Delta E = (\Delta m)c^2$$

munkát kell befektetni az atommag alkotó részeire való bontásához. Az *egy nukleonra jutó átlagos kötési energia* pedig:

$$\varepsilon = \frac{\Delta E}{A},$$

amit az 5.26. ábra szemléltet a stabil atommagokra.



5.26. ábra: Egy nukleonra jutó kötési energia

Az egy nukleonra jutó kötési energia például néhány atommag esetében:

$${}^2_1\text{H} : -1,11 \text{ MeV}$$

$${}^4_2\text{He} : -7,07 \text{ MeV}$$

$${}^{56}_{26}\text{Fe} : -8,79 \text{ MeV}$$

$${}^{238}_{92}\text{U} : -7,57 \text{ MeV}$$

Az ábrából és a számokból is látható, hogy a vas és a nikkell környezetében legstabilabbak az atommagok. Ebből az is következik, hogy a nehéz atommagok *bomlásából* (radioaktív bomlásból vagy hasadásából), ill. a könnyű atommagok *egyesüléséből* (fúziójából) nukleáris energiát lehet nyerni.

5.2.4. Magmomentumok

5.2.4.1. Az atommag spinje

Az *atommagok spinjét* stabil atommagok alapállapotában atomspektroszkópiai módszerekkel mérték az 5.2. táblázat szerinti eredményekkel:

5.2. táblázat: Atommagok spinje		
protonszám (Z)–	neutronszám (N)	spin
	paritása	
páros	– páros	0
páratlan	– páros	$\left(L + \frac{1}{2}\right)\hbar$
páros	– páratlan	
páratlan	– páratlan	$(L+1)\hbar$

Itt L értéke: 0, 1, 2, ... lehet.

A páros – páros esetben a protonok és a neutronok külön-külön párokba kapcsolódnak úgy, hogy a pár eredő spinje nulla lesz, aminek következménye, hogy a sok pár is nulla eredő spinű lesz. A nem páros – páros atommagok spinje ezek után úgy értelmezhető, hogy azt a páros – páros „törzs” nulla spinjén kívül a törzsön kívüli nukleonok határozzák meg. A páros – párat-

lan (és fordítva) atommagoknál egyetlen ilyen nukleonról van szó (ezért ezek spinje félegész), míg a páratlan – páratlanoknál pedig kettőről (ezért ezek spinje egész).

5.2.4.2. Az atommag mágneses momentuma

A *mágneses momentumot* a héjfizikában (ahol az elektronok játsszák a fő szerepet) a

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

Bohr-magneton egységeken mérjük. A magfizikában az elektromos töltésű részecske a proton, ezért itt az elektron tömege helyett a proton tömege a mérvadó. Ezzel az itt használt egység, az ún. *mag-magneton*:

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ A} \cdot \text{m}^2,$$

amely annyszor kisebb a μ_B értékénél, ahányszor nagyobb a proton tömege az elektronénál (~1830-szor). A mérések eredményeképpen a proton mágneses momentuma:

$$\mu_p = 2,7927 \mu_N,$$

míg a neutroné:

$$\mu_n = -1,9131 \mu_N.$$

A neutron adata azért is meglepő, mert elektromosan semleges részecske és mégis van mágneses momentuma. Ez a neutronon belüli *töltéeloszlásra* utal. A negatív előjel azt jelenti, hogy a mágnesesmomentum-vektor iránya *antiparallel* a perdület irányával. Az atommagok mágneses momentumát

$$\boxed{\vec{\mu} = \gamma \mu_N \vec{J}}$$

alakban szokták kifejezni, ahol γ az ún. *giromágneses tényező*, \vec{J} pedig a spin vektor. A proton giromágneses tényezője:

$$\gamma_p = 5,5856,$$

a neutroné pedig:

$$\gamma_n = -3,8261.$$

A mérések és a kísérletek nehézsége onnan adódik, hogy az atommagra kis értékek várhatók és az elektronhéj sokkal nagyobb mágneses hatást okoz ($\mu_B \approx 2000 \mu_N$).

Az Elektromágnességtan c. részben láttuk, hogy homogén B indukciójú mágneses mezőben a mágneses *dipólus potenciális energiája* a térrel bezárt szög függvényében változik, és a

$$E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}.$$

skaláris szorzattal számolhatjuk ki. A dipólus mágneses momentuma a mágneses mezővel valamilyen szöget bezárva *Larmor-precessziót* is végez (*l.* mechanikus pörgettyű). A $\vec{\mu}$ mágnesesmomentum-vektor a \vec{B} indukciójú mágneses mező iránya körül precesszál

$$f_L = \frac{\gamma}{2\pi} B$$

frekvenciával. A $\vec{\mu}$ mágneses momentum \vec{B} mágneses mezőben való beállításának megváltoztatásához energia szükséges és ezt f_L rezonancia-frekvenciájú elektromágneses mezőből tudja felvenni, amelyhez

$$\Delta E = hf = \gamma \mu_N B$$

energia szükséges, amiből f_L meghatározható. Ez a *mag-mágneses rezonancia* (NMR) alapelve, amely segítségével információt lehet nyerni az anyagot alkotó vegyületekről (MRS, mágneses rezonanciás spektroszkópia), és képet lehet alkotni az anyag belső szerkezetéről (MRI, mágneses rezonanciás képalkotás).

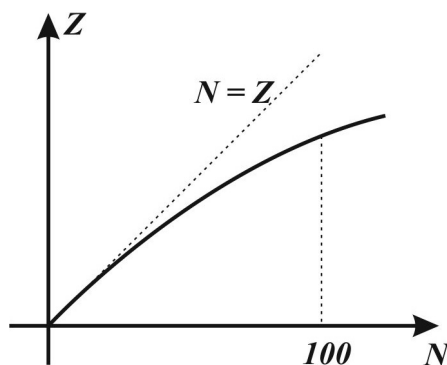
Megjegyzés:

A spinnel rendelkező részecskék mágneses momentumának rezonanciája az elektronhéjakon is megfigyelhető elektronok esetében. Ez az ESR, vagy *elektronspin-rezonancia*. Az ehhez szükséges elektromágneses sugárzás frekvenciája azonban mintegy 2000-szerese a protonok és atommagok esetében használt hullámok frekvenciájánál, ami nagy hőfejlesztése miatt humán diagnosztikai vizsgálatokra alkalmatlanná teszi.

5.2.5. A magerők

A magot igen rövid hatótávolságú, nagyon erős vonzóerő, a *magerő* tartja össze, egyébként a protonok közötti Coulomb-taszítás miatt nem maradna egyben. A neutronok „közbeékelődése” ezt a taszítást mérsékeli. A magerők a nukleonok között egyformán hatnak.

Az atomok rendszám és a neutronszaám viszonya az 5.27. ábrán látható:



5.27. ábra: Atommagok rendszáma és neutronszaám közötti viszony

Kis Z értékeknél $Z \approx N$, növekvő Z értékekre $Z < N$.

Hogy a magerőknek ilyen erősnek kell lenni, abból is következik, hogy a gravitációs vonzás túlságosan gyenge a Coulomb-taszítás ellensúlyozására. Az

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}$$

Coulomb-erő és az

$$F_G \cong G \cdot \frac{m_p^2}{r^2}$$

gravitációs erő hányadosa:

$$\frac{F_C}{F_G} \approx 1,24 \cdot 10^{36},$$

ami azt jelenti, hogy a gravitációs kölcsönhatás a magfolyamatok esetében teljesen figyelmen kívül hagyható. Az alapján, hogy a magok sűrűsége nagyjából egyenlőnek bizonyult, következik, hogy a vonzó magerők rendkívül kicsi hatótávolságúak és csak a szomszédos nukleonra terjednek ki.

A kísérleti tapasztalatoknak legjobban megfelelő magerőelméletet Hideki YUKAWA állította fel 1935-ben. Yukawa úgy vélte, hogy a nukleonok közti erőhatás értelmezéséhez ugyanolyan szerepet játszó közvetítő részecskét kell keresni, mint amilyen a foton az elektromos kölcsönhatás közvetítésében a kvantum-elektrodinamikai értelmezés szerint. Mint majd látni fogjuk, ennek a részecskének a tömege az elektron tömegének hozzávetőlegesen 200-szorosa, így a protonnál kisebb tömegű ún. középnehéz részecske. A magerőt közvetítő részecske a π -mezon. A π -mezon mintegy „kicszerélődik” a nukleonok között. Ez úgy képzelhető el, hogy miután egy nukleon közelében képződött egy π -mezon, az a másik nukleonhoz tart, amely abszorbeálja. Ezen időtartam alatt a π -mezont „szolgáltató” nukleon energiája csökken, a mezont abszorbeálónak nő.

5.12. Példa: A π -mezon tömege

Határozzuk meg a hozzávetőlegesen $1,4 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ hatótávolságú magerőket közvetítő π -mezon tömegét!

Megoldás:

Azt mondhatjuk, hogy a kölcsönhatás Δt időtartama alatt a kölcsönható nukleonok mindegyikének van egy ΔE energiabizonytalansága, azaz nem tudjuk pontosan megmondani, hogy mikor hagyja el a π -mezon az egyik nukleont és mikor csatlakozik a másikhoz. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció szerint:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Mivel a π -mezon két eseményben vesz részt, ezért a bizonytalanság:

$$\Delta E \Delta t \approx \hbar.$$

Mivel az energiabizonytalanság egy π -mezon eltűnéséhez vagy megjelenéséhez kapcsolódik, ez nem lehet kisebb, mint a π -mezon nyugalmi energiája

$$E = m_{\pi,0} c^2.$$

Ezekből:

$$m_{\pi,0} c^2 \Delta t \approx \hbar,$$

vagyis az idő bizonytalansága:

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{m_{\pi,0} c^2}.$$

Feltételezzük, hogy a π -mezonok az atommagban olyan sebességgel mozognak, ami közelít a fénysebességhez. Mivel a π -mezon által létrehozott kölcsönhatás a nukleonok között megy végbe, az r távolság, amit a mezon megtesz, megegyezik a magerő hatótávolságával, ami a kísérleti eredményekből $\approx 1,4 \text{ fm}$. Ekkor:

$$r \approx c \Delta t \approx c \frac{\hbar}{m_{\pi,0} c^2} = \frac{\hbar}{m_{\pi,0} c},$$

amiből a magerőt közvetítő részecske nyugalmi tömegére:

$$m_{\pi,0} \approx \frac{\hbar}{rc} \approx 2,4 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \approx 275 m_{e^-,0}$$

adódik, ahol $m_{e^-,0}$ az elektron nyugalmi tömege.♣

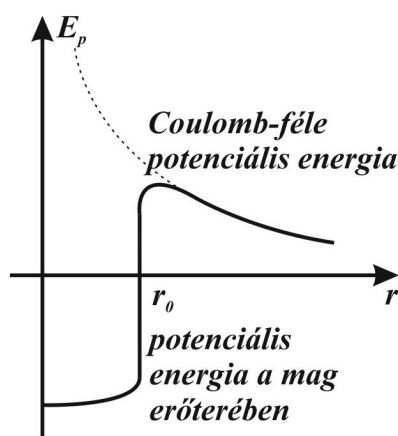
Ezzel értelmezhető az is, hogy az elektrosztatikus mező hatótávolsága végtelen. Mivel a foton nyugalmi tömege zérus, ezért a hatótávolsága $\frac{1}{m}$ -mel arányosan ∞ . A magerőtér hatótávolsága azonban véges, hiszen a közvetítő részecskének zérustól különböző nyugalmi tömege van. A π -mezon tömege az $E = mc^2$ kifejezéssel energiában kifejezve:

$$E \approx 100 \text{ MeV},$$

így ennél nagyobb energia hatására válik kimutathatóvá.

Cecil Frank POWELL 1947-ben kimutatta, hogy a kozmikus sugárzásban a Földre érkező és a légkör atomjaival ütköző nagyenergiájú részecskék az ütközés során keltenek olyan részecskéket, amelyeket azonosítani lehetett a feltételezett π -mezonokkal (pionokkal).

A magban lévő nukleonok Yukawa által feltételezett potenciális energiáját az 5.28. ábra szemlélteti:



5.28. ábra: Nukleon potenciális energiája az atommagban

A potenciálgödörben lévő nukleonok úgy helyezkednek el, hogy – a *Pauli-elv* szerint – egy energiaszintet két ellentétes spinű nukleon tölt be.

5.2.6. Radioaktivitás

5.2.6.1. A bomlástörvény

A *stabilitási völgytől távol* eső atommagok és a reakcióban keletkező gerjesztett rendszerek spontán belső átrendeződéssel, részecskék kibocsátásával *energetikailag kedvezőbb* állapotba kerülhetnek. Az atommagok véletlenszerűen, egymástól függetlenül bomlanak el.

A bomlási törvény szerint, ha λ az egyetlen atommag időegységre eső *bomlási valószínűsége*, az ún. *bomlásállandó*, akkor a még el nem bomlott atommagok N számának dN csökkenése arányos a dt időintervallummal és az atommagok számával:

$$dN \sim -Ndt,$$

és ebből a bomlásra vonatkozó differenciálegyenlet:

$$dN = -\lambda Ndt.$$

Ez a változók szétválasztásával és a határok kijelölésével:

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt,$$

amiből

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t,$$

és innen a bomlástörvény:

$$\boxed{N = N_0 e^{-\lambda t}},$$

ahol N_0 a $t = 0$ időpillanatban még el nem bomlott magok száma. Azt az időt, amely alatt a kezdeti (el nem bomlott) magok száma a felére csökken, $T_{\frac{1}{2}}$ felezési időnek nevezzük. Tehát:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}},$$

amiből a felezési időre átrendezéssel

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

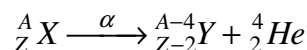
adódik. A felezési idő a különböző atomoknál rendkívül széles határok között változhat. Az atomok bomlási sebességét, vagy A aktivitását az időegység alatt elbomlott magok száma jellemzi:

$$A = \frac{dN}{dt}.$$

SI-beli mértékegysége: $\frac{\text{bomlás}}{s} = \frac{1}{s} = Bq$ (becquerel).

5.2.6.2. Az α -bomlás

Az α -bomlás reakcióegyenlete a következő:

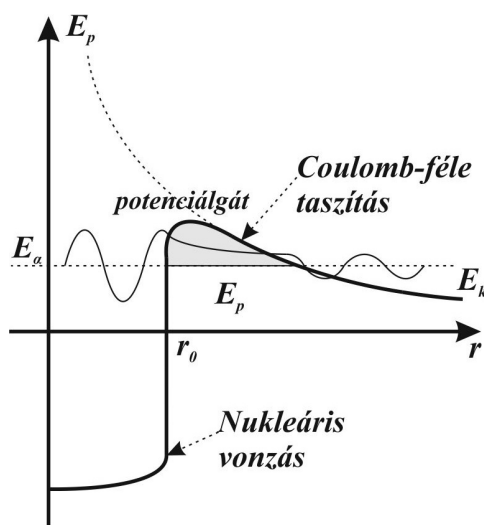


A bomláskor felszabaduló Q_α energia:

$$Q_\alpha = (\Delta m) c^2 = \left\{ m_X(A, Z) - [m_Y(A-4, Z-2) + m_\alpha(4, 2)] \right\} c^2,$$

ahol m -mel a megfelelő tömegeket jelöltük.

Ha az α -bomlás energetikailag kedvező, akkor nem érthető, hogy miért nem következik be azonnal, miért kell az atommagnak akár több ezer évig is várnia, hogy elbomljon. Az energetikai viszonyokat az 5.29. ábra szemlélteti:



5.29. ábra: α -részecske alagúteffektusa potenciálgáton

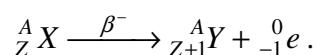
Az α -részecskének a potenciálgáton kell átjutnia *alagúteffektus* révén, amelynek a valószínűségeiről korábban már szóltunk. Az $E_\alpha < E_p$ energiájú α -részecske potenciálgáton való átjutásának, az alagúteffektusnak a valószínűsége nem zérus, ezért az egyes – teljesen azonos – atommagok α -bomlása az idő múlásával nem egyszerre, hanem statisztikailag következik be. Az α -részecske E_p energiájának növekedésével az alagúteffektus, így az α -bomlás valószínűsége nő, ezért érthető, hogy a különböző atommagok felezési idejében nagy különbségek lehetnek.

5.2.6.3. A β -bomlás

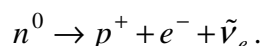
Ez a bomlási mód a nukleonok *gyenge kölcsönhatás* miatti egymásba való átalakulása. A β -bomlás megfigyelése során meglepő volt, hogy a mérések szerint a β -részecskék *energiaeloszlása folytonos*, pedig az átmenetek diszkrét – jól meghatározott tömegű állapotok között történnek. Ezért az α -bomláshoz hasonlóan itt is vonalas energiaeloszlást (spektrumot) lehetett várni. Sérülni látszott az energiamegmaradás törvénye, sőt az atommagok spinjének $0, \pm 1$ változása is érthetetlen volt, mivel az elektron feles spinű részecske. Wolfgang PAULI 1931-ben azzal magyarázta ezt a jelenséget, hogy a visszalökött atommag és az elektron keletkezése mellett egy semleges, feles spinű, tömeg nélküli (vagy nagyon kicsi tömegű) részecske, a ν (nű) neutrínó vagy $\bar{\nu}$ antineutrínó is kibocsátódik. A feltételezést a tapasztalat igazolta.

A β -bomlásnak három formája ismeretes.

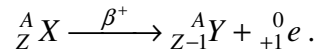
1. Negatív béta-átalakulás (elektron kibocsátás):



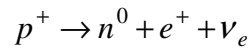
Ilyenkor az atommag egy neutronja bomlik el egy protonra, egy elektronra és egy ún. elektron-antineutrínóra:



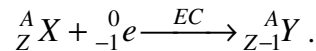
2. Pozitív béta-átalakulás (pozitron kibocsátás):



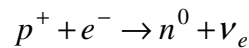
Ebben az esetben az atommagban proton bomlik el egy neutronra, egy pozitronra (az elektron antirészecskéjére) és egy elektron-neutrínóra:



3. Elektronbefogás (EC):

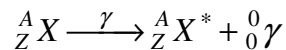


Ekkor az atommag befogja az egyik K (esetleg L , M) héjon lévő elektront. A folyamatot karakterisztikus röntgensugárzás kíséri, mert a hiányzó elektron helyére nagyobb energiájú elektron léphet. Folyamata:



5.2.6.4. A γ -bomlás

A γ -bomlás nagy áthatoló képességű, *nagy energiájú elektromágneses sugárzás*. Az α - és a β -bomlás után a leánymag alap- és gerjesztett állapotban egyaránt keletkezhet. A legerjesztődés elektromágneses sugárzással történik és *diszkrét energiájú γ -átmenet* jön létre:



A γ -részecske frekvenciája meghatározható a mag E_g kezdeti gerjesztett energiájának és E_v végállapotbeli energiája különbségéből:

$$E_g - E_v = hf,$$

ahonnan

$$f = \frac{E_g - E_v}{h}.$$

5.2.6.5. Kormeghatározás

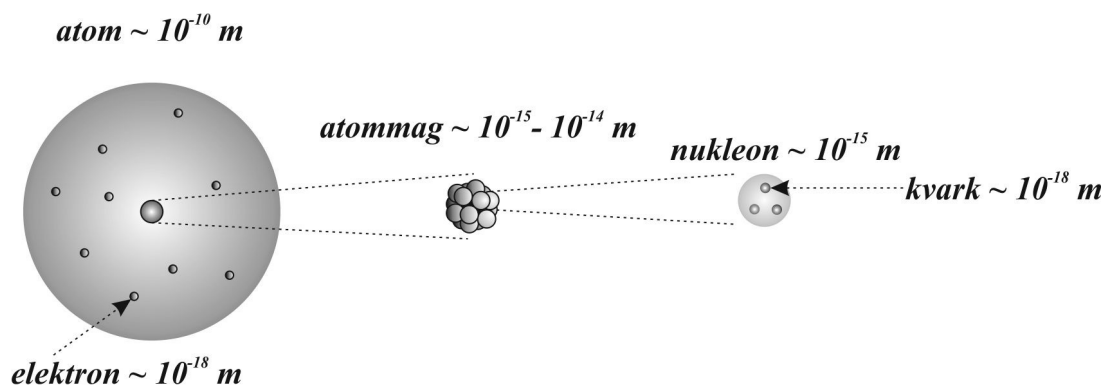
A légkörben a kozmikus eredetű neutronok hatására nitrogénből radioaktív, 5730 év felezési idejű ${}^{14}_6 C$ *szénizotóp* (radiokarbon) képződik. A légköri szén-dioxidban dinamikus egyensúly áll be: időegység alatt ugyanannyi új radiokarbon atommag keletkezik, mint amennyi elbomlik. A ${}^{14}_6 C$ a tápláléklánccal az élő szervezetbe folyamatosan beépül. Az élő szervezet pusztulása után a légkörből származó szén utánpótlása megszűnik, a szövetekben a radioaktív szén folyamatosan bomlik. Az $\frac{A_{{}^{14}_6 C}}{A_{{}^{12}_6 C}}$ aktivitás-koncentrációk összehasonlításából *radioaktív kormeghatározás* lehetséges.

5.3. Részecskefizika

5.3.1. A részecskefizika alapjai

Alapvető, *elemi* vagy *szubnukleáris részecskéknek* nevezzük az anyag olyan kicsiny darabjait, amelyeknél összetett jelleg nem fedezhető fel, más elemi részecskékkel és mezőkkel való kölcsönhatásban egységes egészként viselkednek. Az *elemi* elnevezés arra utal, hogy kezdetben csak az anyagok „elemi építőköveit”, tovább nem osztható részecskéit gondolták annak (pl.: elektron, proton, neutron). Ma azonban már több száz részecskét ismerünk, ezek nagy többsége nem stabil, sőt némelyek létezésére csak közvetetten lehet következtetni.

A *részecskefizika* legfontosabb kutatási területei: az anyag legalapvetőbb sajátságainak, mozgástörvényének vizsgálata, az anyagot felépítő egyre kisebb építőelemek megismerése, ill. a *Világegyetem* folyamatainak és szerkezetének vizsgálata. Fontos tény, hogy az elemi részek (mint legkisebb építőelemek) és az Univerzum (mint legnagyobb objektum) kutatása a legszorosabban összefügg. Az 5.30. ábra a mikrorendszerek nagyságrendi viszonyait érzékelteti ([24. Animáció: Az atom nagyságrendi viszonyai](#)):



5.30. ábra: Az atom nagyságrendi viszonyai

Egy-egy részecske belsejébe annál inkább be lehet hatolni, minél nagyobb energiát biztosítunk a közvetítő részecskének. Ezt el lehet érni részecskegyorsítók segítségével. A legnagyobb energiájú „laboratórium” az Univerzum, ahol 10^{20} eV nagyságrendű energiák fordulnak elő (pl.: nagyenergiájú protonok). Földi gyorsítóval 10^{13} eV nagyságrendnél tartunk. Ilyen hatalmas energiákon a keletkező részecskék újabbakat hoznak létre, amelyek tovább szaporítják az ismert részecskék számát.

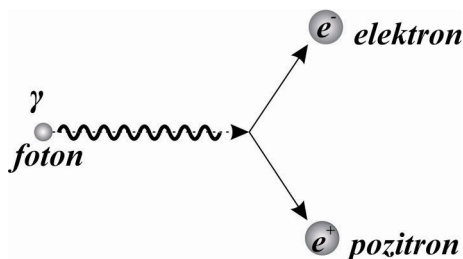
Az elektron Paul DIRAC által 1931-ben elméletileg leírt *antirészecskéjét*, a *pozitront* 1932-ben Carl David ANDERSON fedezte fel a kozmikus sugárzásban ködkamra segítségével. Később sorozatban ismerték fel az antirészecskéket nagyenergiájú gyorsítók segítségével. 1947-ben a π -mezont, más néven piont Cecil Frank POWELL szintén a kozmikus sugárzásban észlelte. Bomlása során μ -mezon és müon-neutrínó, ill. -antineutrínó keletkezik:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu,$$

valamint:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu.$$

A párképződés során nagy energiájú ($E > 1,02 \text{ MeV}$) fotonból részecske-antirészecske pár (pl. elektron-pozitron) keletkezik (5.31. ábra):

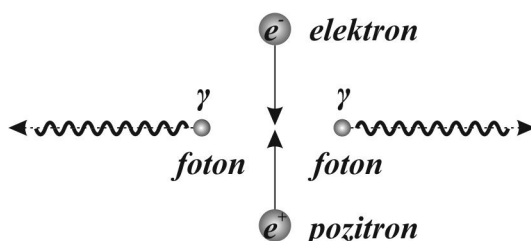


5.31. ábra: Párképződés

Ennek energiaegyenlete:

$$hf \geq m_{e^-}c^2 + m_{e^+}c^2 = 2m_e c^2 .$$

A párkeltés „fordított” eseménye a szétsugárzás, vagy *annihiláció* (más néven: megsemmisülési sugárzás), amely az 5.32. ábrán látható ([25. Animáció: Anihiláció](#)):



5.32. ábra: Anihiláció

Ennek energiaegyenlete:

$$m_{e^-}c^2 + m_{e^+}c^2 \geq 2hf ,$$

ahonnan:

$$m_e c^2 = hf \approx 511 \text{ keV} .$$

A két γ -foton megjelenése abból következik, hogy az *impulzus-megmaradás törvénye* nem sérülhet, ugyanis az elektron és a pozitron ütközés előtti összimpulzusa, és ezért a két – egy egyenes mentén, ellentétes irányban szétszóródó – foton összimpulzusa is zérus.

Ez utóbbi folyamat az alapja a Pozitron Emissziós Tomográfia (PET) képalkotó eljárásnak. A pozitront kisugárzó mesterséges izotópot (1 h nagyságrendű felezési idővel) helyben kell előállítani általában ciklotron részecskegyorsítóval.

5.3.2. Részecskecsaládok

A részecskék családjait az 5.3. táblázatban szemléltetjük. A táblázat celláiban található részecskék betűjele alatt szerepel a neve, balról mellette pedig a tömege, elektromos töltése és spinje. Az elemi részecskék nyugalmi tömegét *energiaegységben* adjuk meg az $E = mc^2$ összefüggés alapján, töltését pedig az e elemi töltéshez viszonyítva.

5.3. táblázat: Az anyagi részecskék családjai, és a kölcsönhatásokat közvetítő részecskék

2,4 MeV $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$	u up	1,27 GeV $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$	c charmed	171,2 GeV $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$	t top	0 1 1	γ foton
4,8 MeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$	d down	104 MeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$	s strange	4,2 GeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$	b bottom	0 0 1	g gluon
0,511 MeV -1 $\frac{1}{2}$	e elektron	105,7 MeV -1 $\frac{1}{2}$	μ műion	1,777 GeV -1 $\frac{1}{2}$	τ tau-lepton	91,2 GeV 0 1	Z^0 Z-bozon
2,2 eV 0 $\frac{1}{2}$	ν_e elektron-neutrínó	0,17 MeV 0 $\frac{1}{2}$	ν_μ műion-neutrínó	15,5 MeV 0 $\frac{1}{2}$	ν_τ tau-neutrínó	80,4 GeV ± 1 1	W^\pm W-bozon

A táblázat első három oszlopában található különböző családokban nagyon *hasonló tulajdonságú* részecskék találhatóak, de a *tömegük jelentősen eltérő*. Nem soroljuk a részecskék családjai közé, de a táblázat negyedik oszlopa bemutatja a kölcsönhatásokat közvetítő részecskéket: a *foton az elektromágneses*, a *gluon az erős*, míg a *Z- és W-bozon a gyenge kölcsönhatás* közvetítői. Ezek ún. *bozonok*, 1-es spinű részecskék.

A táblázat első három oszlopa tartalmazza az anyagi részecskék három családját, a *fermionokat*, a feles spinű részecskéket.

A felső két sorban található *kvarkok erősen kölcsönható* részecskék, amelyek nem fordulnak elő szabadon, csak *hadronokba* zárva. A hadronok kvarkok kötött állapotai, lehetnek *barionok* és *mezonok*. A *barionokat három kvark* kötött állapota alkotja, ilyen pl. a *proton*:

$$p^+ = uud ,$$

és a *neutron*:

$$n^0 = udd$$

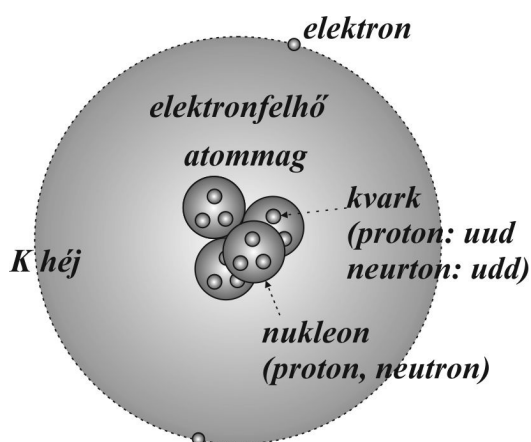
(együttesen: nukleonok), a többi bariont *hiperonoknak* nevezik, melyek a nukleonoknál sokkal rövidebb életű részecskék. A *mezonokat kvark és antikvark* kötött állapotaiként ismerjük. Ilyenek a *π -mezon* (pion), vagy a *K-mezon* (kaon).

Az alsó két sorban lévő *leptonok* olyan elemi részecskék, amelyek nem vesznek részt az erős kölcsönhatásban, és nem is közvetítenek kölcsönhatást. MARX György, magyar fizikus mondta ki a **leptonszám-megmaradás törvényét**:

„A *leptonok* csak olyan folyamatokban vesznek részt, amelyekben a leptonszám megmarad.”

A körülöttünk álló világot döntő részben az *u-* (up) és a *d-* (down) *kvark*, valamint az *elektron* (e^-) építi fel. Mint láttuk, az atommag-átalakulások egy részénél szerepe van még az elektron-neutrínónak (ν_e), egy nagyon kismértékben kölcsönható anyagnak is. Ezek alkotják az elemi részecskék első családját.

Az atom szerkezetét a méretarányok eltúlozásával jelenleg az 5.33. ábra szerint képzeljük el (a *He*-atom példája).



5.33. ábra: A *He*-atom felépítése

5.3.3. Kölcsönhatások

Mai ismereteink szerint az Univerzum számunkra ismert formájáért *négyféle alapvető kölcsönhatás* felelős, ezek az *erős*, *elektromágneses*, *gyenge* és *gravitációs* kölcsönhatás.

5.3.3.1. Erős kölcsönhatás

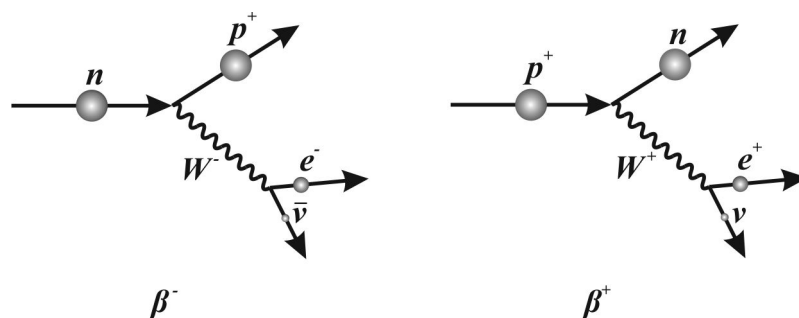
Az *erős kölcsönhatás* a legerősebb kölcsönhatási forma, a többivel való összehasonlíthatóság érdekében erősségét jelöljük 1-nek. A *kvarkok* és így *atommag* nukleonjai között hat, és hatótávolsága 10^{-15} m (1 *fermi*) nagyságrendű. A kölcsönhatás *közvetítő részecskéi kvarkok* között a gluonok, nukleonok között π -mezonok.

5.3.3.2. Elektromágneses kölcsönhatás

Az *elektromágneses kölcsönhatás* elektromos töltéssel rendelkező részecskék között hat, az erős kölcsönhatásnál 10^{-2} -szor gyengébb erősségű kölcsönhatás. *Közvetítő részecskéje* a zérus nyugalmi tömegű *foton*, hatótávolsága végtelen.

5.3.3.3. Gyenge kölcsönhatás

A *gyenge kölcsönhatás* relatív erőssége 10^{-13} . Ez a kölcsönhatás játszik szerepet a radioaktív β -bomlásnál. A *közvetítő részecskék* az 1980-as években felfedezett 1 spinű W^- vagy Z -*bozonok*. Hatótávolsága az erős kölcsönhatásénál is kisebb, mintegy 10^{-18} m nagyságrendű. A β^+ - és β^- -bomlás lehetséges sémái:



5.34. ábra: A β -bomlás sémái

A kísérletek azt bizonyítják, hogy az elektromágneses és a gyenge kölcsönhatás alapvetően összetartozik, ezért ezeket közös néven *elektrogyenge kölcsönhatásnak* is nevezik.

5.3.3.4. Gravitációs kölcsönhatás

A *gravitációs kölcsönhatás* minden tömeggel rendelkező részecske között hat, melynek relatív erőssége 10^{-38} , azaz a fentieknél nagyságrendekkel kisebb. Közvetítő részecskéjét a feltételezett *gravitront* eddig még nem sikerült kimutatni, hatótávolsága végtelen.

A részecskefizikai kutatások primer tudományos eredményei mellett nem elhanyagolható, hogy ezekre a célokra kifejlesztett új technológiákat, anyagokat, eszközöket gyakran alkalmazzzák a tudományos kutatás egyéb területén és az iparban is.

5.4. Megoldandó feladatok

- Mekkora energiájú fotont bocsát ki a H -atom, ha a második gerjesztett állapotból alapállapotba kerül? Mekkora a kibocsátott foton frekvenciája, hullámhossza, impulzusa?
- Mennyire közelíti meg a nagy távolságból $5 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$ sebességgel indított proton a nyugvó, de nem rögzített He -atommagot?
- Egy tartály 4 mg rádiumot tartalmaz. A rádium rendszáma 88, tömegszáma 226. Hány rádiumatom van a tartályban? A rádium felezési ideje 1680 év . Hány mg rádium lesz a tartályban 3360 év múlva? Hány rádiumatom bomlik el 1 s alatt?
- Egy röntgenső maximális csőárama 5 mA , a csőfeszültség 50 kV , a röntgensugarak keletkezési hatásfoka 1% . Mekkora sebességgel csapódnak az elektronok az anódra? Mekkora teljesítménnyel kell hűteni az anódot? Milyen hullámhosszú röntgensugarak keletkezhetnek a csőben?
- $0,71 \text{ mm}$ vastag alumíniumlemez a ráeső röntgensugárzás $37,8\%$ -át engedi át. Mennyi az alumínium lineáris abszorpciós együtthatója?
- Vákuumban a gravitációs mező mellett, $4 \cdot 10^5 \frac{V}{m}$ térerősségű, homogén, függőlegesen lefelé irányuló elektromos mezőt hozunk létre. Vízszintes irányú, $4 \frac{m}{s}$ nagyságú sebességgel érkezik a mezőbe egy $0,04 \text{ g}$ tömegű, $5 \cdot 10^{-10} \text{ C}$ töltésű részecske. Mekkora és milyen irányú a gyorsulása? Mekkora lesz a sebessége 1 s múlva?
- Elhanyagolható kezdősebességű elektronokat 1136 V gyorsító feszültséggel gyorsítunk fel. Mekkora lesz az elektronok végsebessége? A keletkező elektronnyalábot egy síkkondenzátor lemezei közé irányítjuk, a lemezekkel párhuzamosan. A lemezek távolsága 2 cm , a kondenzátor feszültsége 40 V . Milyen irányú és nagyságú mágneses mezővel lehetne megakadályozni, hogy a nyaláb eltérüljön a fegyverzetek közötti áthaladás közben?
- Síkkondenzátor lemezei 15 cm élhosszúságú négyzetek. A pozitív töltésű lemeztől 3 cm távolságra lép be egy elektron a lemezekkel párhuzamos sebességgel. Mennyi idő múlva ütközik az elektron a kondenzátor lemezébe, ha az elektromos térerősség nagysága 4000 V/m ? Mekkora az a legkisebb sebesség, amellyel az elektronnak rendelkeznie kell a belépéskor, hogy a lemez érintése nélkül keresztülhaladhasson a kondenzátoron?
- Egy proton 20 kV potenciálkülönbség befutása után, sebességére merőleges irányú, 1 T indukciójú mágneses mezőbe kerül. Mekkora a létrejövő körpálya sugara?
- Egy síklemez mögött, vele párhuzamos $0,5 \text{ T}$ indukciójú mágneses mező van. A lemez kis nyílásán keresztül hidrogén és deutérium ionokat lövünk be a lemez síkjára merőleges, $10^7 \frac{m}{s}$ nagyságú sebességgel. A hidrogén-ion tömege $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, a deutérium ioné $3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. A belépőnyílástól milyen távolságban csapódnak be a lemezre a részecskék? Mennyi ideig mozognak a részecskék a mágneses mezőben?
- Igen nagy távolságból α -részecske közeledik egy eredetileg nyugvó, szabad lítium atommag felé a két részecskét összekötő egyenes mentén. A részecskéket pontszerűnek tekintjük. Mekkora az α -részecske mozgási energiája, ha a lítium atommagot 10^{-14} m távolságra közelíti meg? A lítium atommag tömege $1,15 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$.
- Mekkora a 3000 V -os gyorsítófeszültségen átengedett elektron de Broglie hullámhossza?
- Mekkora a mozgási energiája annak az elektronnak, amelynek hullámhossza $1,9 \cdot 10^{-11} \text{ m}$? Mekkora feszültség szükséges a gyorsításhoz?
- Egy orvosi röntgensőben pl. 9 kV feszültséggel gyorsított elektronok váltják ki lefékeződésükkor a röntgensugárzást. Mekkora az elektronok de Broglie hullámhossza közvetlenül a becsapódás előtt? Mekkora a keletkező röntgensugárzás fotonjainak legkisebb hullámhossza?

-
15. Egy $0,045 \text{ kg}$ tömegű kislabda és egy elektron sebessége egyaránt $71 \frac{m}{s}$ nagyságú, a sebesség elmosódottsága 1%-os. Becsüljük meg a hely elmosódottságát mindkét esetben!
16. Ha egy elektron helyzetét 10^{-8} cm pontossággal ismerjük. Legfeljebb mekkora pontossággal ismerhetjük ezen a helyen a sebességet?
17. A hidrogénatom ionizációs energiája $13,6 \text{ eV}$. Mekkora annak a szabad elektronnak a sebessége, amelyik ionizálhatja? Mekkora a hullámhossza és mekkora feszültség gyorsíthatja?
18. Egy ismeretlen anyag által emittált legnagyobb energiájú röntgensugarak hullámhossza $21,6 \text{ nm}$. Ez akkor keletkezik, amikor egy szabad, zérus energiájú elektron zuhan egyenesen az 1-es főkvantumszámú állapotba. Melyik elemről van szó?
19. Mekkora sebességgel lépnek ki az elektronok 400 nm hullámhosszú ibolya fény hatására a 2 eV kilépési munkájú fémből?

Irodalom

- ÁBRAHÁM Gy.: Optika. Panem Kft. 1998.
- BÁRCZY B.: Atomfizika. Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1965.
- BUDÓ Á.: Kísérleti Fizika I. Budapest, Tankönyvkiadó, 1968.
- BUDÓ Á.: Kísérleti Fizika II. Budapest, Tankönyvkiadó, 1991.
- BUDÓ Á.: Kísérleti Fizika III. Budapest, Tankönyvkiadó, 1992.
- EROSTYÁK J, LITZ J.: A Fizika alapjai. Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002.
- EROSTYÁK J, LITZ J.: Fizika III. Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006.
- KESZTHELYI L.: Atomok és atomi részecskék. Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1959.
- LITZ J.: Általános Fizika I. Pécs-Budapest, Dialóg Campus Kiadó, 2001.
- LITZ J.: Elektromosság- és mágnességtan. Budapest, Műszaki Tankönyvkiadó, 1998.
- LITZ J.: Elektromosság- és mágnességtan I-II. Budapest, Tankönyvkiadó, 1992.
- LITZ J.: Fizika II. Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2005.
- MARX Gy.: Túl az atomfizikán. Budapest, Gondolat Kiadó, 1961.
- SIMONYI K.: A Fizika kultúrtörténete. Budapest, Gondolat Kiadó, 1978.

Tárgymutató