



BEWEGUNGSVORGÄNGE DES FLAGGENRAUMES MIT SPHÄRI- SCHEN BAHNEN I

DIE VIERPARAMETRIGEN BEWEGUNGSVORGÄNGE

Johann Lang

*Institut für Geometrie, Technische Universität, Kopernikusgasse
24, A-8010 Graz, Österreich*

Herrn Prof. Dr. Hans Sachs zum 50. Geburtstag gewidmet

Received February 1992

AMS Subject Classification: 53 A 17

Keywords: Zweifach isotroper Raum, Flaggenraum, Kinematik.

Zusammenfassung: Ein Übertragungsprinzip erlaubt es, die Bewegungsvorgänge des Flaggenraumes, welche sphärische Bahnen besitzen, vollständig zu klassifizieren und zu beschreiben. Dabei werden nicht nur jene Bewegungsvorgänge betrachtet, welche alle Punkte auf einer sphärischen Bahn führen, sondern auch jene, welche nur gewissen Punkten sphärische Bahnen zuweisen. Die Fragestellung für den euklidischen Fall ist etwa gegen Ende des 19. Jahrhunderts in Frankreich aufgetreten, wurde aber nie vollständig gelöst. Das hier verwendete Übertragungsprinzip, das in J. Lang [12] vorgestellt wurde, erlaubt es nun erstmals, diese Fragen - im Fall der zweifach isotropen Geometrie - erschöpfend zu beantworten.

In J. Lang [12] wurde ein Übertragungsprinzip beschrieben, das es erlaubt, die Bewegungsvorgänge des Flaggenraumes mit sphärischen Bahnen systematisch und in zweckmäßiger Form zu behandeln. Die Ursprünge dieser Vorgangsweise gehen auf E. Borel [1] und R. Bricard [2],

[3] zurück, welche gemeinsam mit E. Duporcq [8] diese Fragestellungen - für den euklidischen dreidimensionalen Raum - aufgeworfen haben. Eine Verallgemeinerung dieses Übertragungsprinzips wird Inhalt von H. Vogler [22] (in Vorbereitung) sein. In der Geometrie des Flaggenraumes (zweifach isotropen Raumes) liegen Resultate von O. Röschel [16] vor: Alle C^4 -Bricard-zwangläufe des Flaggenraumes - das sind jene mit *durchwegs sphärischen Bahnen* - werden beschrieben; auch die C^4 -Darboux-zwangläufe - das sind jene mit *durchwegs ebenen Bahnen* - sind dort angeführt.

In der vorliegenden Arbeit sollen nun *alle* vierparametrischen Bewegungsvorgänge, die sphärische Bahnen besitzen, vollständig beschrieben werden; es gelingt, Normalformen anzugeben und die Invarianten für jeden einzelnen Fall zu ermitteln. Die Ebenen des Rastraumes betrachten wir als Sonderfälle von Sphären, sodaß auch der Fall ebener Bahnen miteingeschlossen ist. Es sei besonders darauf hingewiesen, daß für die folgenden Untersuchungen *keinerlei Differenzierbarkeitsvoraussetzungen* notwendig sind.

Die Geometrie des Flaggenraumes beschäftigt sich mit jenen Eigenschaften des dreidimensionalen affinen Raumes \mathbb{R}^3 , die bezüglich der Gruppe

$$(1) \quad G_6^{(2)} : \begin{cases} \bar{x} = x + a \\ \bar{y} = bx + y + c \\ \bar{z} = dx + ey + z + f \end{cases} \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

invariant sind¹. Diese Transformationen nennt man *Bewegungen des Flaggenraumes*. Sie lassen das Tripel (F, u, ϕ) , bestehend aus dem Fernpunkt F der z -Achse (*absoluter Punkt*), der Ferngeraden u der yz -Ebene (*absolute Gerade*) und der Fernebene ϕ (*absolute Ebene*) fest. Eine Parameterdarstellung eines k -parametrischen Bewegungsvorganges ζ auf einem Parameteregebiet $G \subset \mathbb{R}^k$ hat die Gestalt

$$(2) \quad \zeta : G \longrightarrow G_6^{(2)}$$

mit $(t_1, \dots, t_k) \rightarrow \zeta(t_1, \dots, t_k) \dots (a(t_1, \dots, t_k), \dots, f(t_1, \dots, t_k))$. Eine Sphäre Φ des Flaggenraumes ist definiert durch eine Gleichung der Form

$$(3) \quad Ax^2 + 2Bx + 2Cy + 2Dz + E = 0 \quad A, B, C, D, E \in \mathbb{R}.$$

Für $A = 0$ erhalten wir die Ebenen, die wir hier als Sonderfälle der

¹Siehe hierzu H. Brauner [4], [5], [6] und das Standardwerk H. Sachs [18].

Sphären betrachten werden. Für $A \neq 0$ sind die Sphären Zylinderflächen zweiter Ordnung, deren Fernsichel U auf der absoluten Geraden u liegt. Er ist durch die Koordinaten

$$(4) \quad U \dots (0 : 0 : D : -C)$$

gegeben. Für $D = 0$ ist $U = F$, also der absolute Punkt. Φ nennt man dann *Punktgrenzkugel*. Die Tatsache, daß ein Punkt $P_0 \dots (x_0/y_0/z_0)$ aus \mathcal{A} auf einer Sphäre Φ (siehe (3)) geführt wird, drückt sich in einer Gleichung

$$(5) \quad \begin{aligned} & a^2 A + \\ & + a \ 2(Ax_0 + B) + \\ & + b \ 2Cx_0 + \\ & + c \ 2C + \\ & + d \ 2Dx_0 + \\ & + e \ 2Dy_0 + \\ & + f \ 2D + \\ & + Ax_0^2 + 2Bx_0 + 2Cy_0 + 2Dz_0 + E = 0 \end{aligned}$$

aus, wobei das Absolutglied $Ax_0^2 + 2Bx_0 + 2Cy_0 + 2Dz_0 + E$, falls der Bewegungsvorgang durch $\text{id}(G_6^{(2)})$ geht, verschwindet (siehe hiezu J. Lang [12]). Die Bedingung (5) ist also eine Gleichung der Form

$$(6) \quad \omega_0 Y_1^2 + \omega_1 Y_1 + \omega_2 Y_2 + \omega_3 Y_3 + \omega_4 Y_4 + \omega_5 Y_5 + \omega_6 Y_6 = 0.$$

Es handelt sich dabei um ein Polynom in den Variablen $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6$, für das die Funktionen a, b, c, d, e, f eine Nullstelle (identisch in den Parameterwerten $(t_1, \dots, t_k) \in G$) liefern.

Die Polynome des Typs

$$(7) \quad V = \{ \omega_0 Y_1^2 + \sum_{i=1}^6 \omega_i Y_i \mid \omega_0, \dots, \omega_6, \in \mathbb{R} \}.$$

bilden einen siebendimensionalen Vektorraum über dem Körper \mathbb{R} .

Wir bilden aus dem siebendimensionalen Vektorraum V den projektiven Raum $P(V)$ der Dimension 6 und nennen diesen Raum $P(V)$ im folgenden *Bedingungsraum*. Seine Punkte sind die eindimensionalen Unterräume von V . Der Einfachheit halber identifizieren wir jede Bedingung (6) mit dem von ihr bestimmten Punkt des Bedingungsraumes $P(V)$.

Erfüllt (a, b, c, d, e, f) für alle Parameterwerte $t_1, \dots, t_k \in G$ die Gleichung L_1 der Form (6) und auch noch eine weitere Gleichung L_2

derselben Gestalt, so erfüllt (a, b, c, d, e, f) auch jede Linearkombination $L_1\lambda_1 + L_2\lambda_2$. Die Menge aller Bedingungen der Form (6), welche von einem Bewegungsvorgang $\zeta \dots (a, b, c, d, e, f)$ erfüllt werden, ist also ein ganzer linearer Unterraum U von V , die Menge aller zugehörigen Punkte des projektiven Raumes $P(V)$ ist ein projektiver Teilraum $T = P(U) \subset P(V)$. Dabei zeigt sich, daß genau jene Polynome aus V , welche der Bedingung

$$(8) \quad \omega_2\omega_6 - \omega_3\omega_4 = 0$$

genügen, auch wirklich *Sphärenbedingungen* sind. Aus dem Polynom (6) kann man den Punkt $P_0(x_0/y_0/z)$ des Gangraumes und seine Bahnsphäre Φ (3) mit Hilfe von

$$(9) \quad \begin{aligned} A &= \omega_0 \\ B &= \frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega_0\omega_4}{\omega_6} & x_0 &= \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\omega_4}{\omega_6} \\ C &= \frac{\omega_3}{2} & y_0 &= \frac{\omega_5}{\omega_6} \\ D &= \frac{\omega_6}{2} \end{aligned}$$

erhalten². Die Bedingung (8) ist die Gleichung einer Hyperfläche 2. Ordnung im Bedingungsraum. Wir nennen diese Hyperfläche im folgenden $\Theta \subset P(V)$. Wie in J. Lang [12] ausgeführt, ist die Geometrie des Bedingungsraumes durch die Transformationsgruppe

$$(10) \quad G_5(P(V)) \dots \begin{cases} \bar{\omega}_0 = \omega_0 \\ \bar{\omega}_1 = \omega_1 + t_b\omega_3 + t_d\omega_6 \\ \bar{\omega}_2 = \omega_2 - t_a\omega_3 + t_e\omega_4 - t_a t_e\omega_6 \\ \bar{\omega}_3 = \omega_3 + t_e\omega_6 \\ \bar{\omega}_4 = \omega_4 - t_a\omega_6 \\ \bar{\omega}_5 = \omega_5 - t_b\omega_4 + (t_a t_b - t_c)\omega_6 \\ \bar{\omega}_6 = \omega_6 \end{cases}$$

bestimmt: Bedingungen, welche auseinander durch eine Transformation (10) hervorgehen, gehören zu konjugierten Bewegungsvorgängen.

²Die Werte z und E sind unwesentlich: Mit jedem Punkt $P_0 \dots (x_0/y_0/z_0)$, der eine sphärische Bahn $H(P_0)$ durchläuft, wird auch jeder Punkt $\bar{P}_0(x_0/y_0/\bar{z}_0)$ eine sphärische Bahn $H(\bar{P}_0)$ durchlaufen, die sich von $H(P_0)$ nur durch eine Translation in z -Richtung um den Betrag $\bar{z}_0 - z_0$ unterscheidet.

Um zu einem Unterraum $T \subset P(V)$ den zugehörigen maximalen Bewegungsvorgang (siehe J. Lang [12]) ζ zu ermitteln, ersetzen wir die quadratischen Polynome $L_i \in U$ in den Variablen Y_1, \dots, Y_6 , welche U aufspannen und die Gestalt

$$(11) \quad L_i \dots \omega_0^{(i)} Y_1^2 + \sum_{j=1}^6 \omega_j^{(i)} Y_j$$

besitzen, durch die Polynome

$$(12) \quad K_i \dots \omega_0^{(i)} Y_0 + \sum_{j=1}^6 \omega_j^{(i)} Y_j = \sum_{j=0}^6 \omega_j^{(i)} Y_j.$$

in Variablen Y_0, Y_1, \dots, Y_6 und ergänzen dieses lineare, homogene Gleichungssystem durch die quadratische Gleichung

$$(13) \quad Y_0 - Y_1^2 = 0.$$

(13) erlaubt es, in der allgemeinen Lösung des Systems (12) einen der Parameter zu eliminieren (siehe J. Lang [12]).

Die Untersuchung der r -dimensionalen Unterräume des Bedingungsraumes $P(V)$ führt dabei (siehe [12]) auf $(5-r)$ -parametrische Bewegungsvorgänge. Die Suche nach den vierparametrischen Bewegungsvorgängen führt dabei auf die *Untersuchung der Geraden von $P(V)$* .

1. Klassifikation der eindimensionalen Unterräume

Von den eindimensionalen Unterräumen des Bedingungsraumes $P(V)$ sind nur jene von Interesse, welche zur Gänze auf der Hyperfläche Θ liegen, da sie auf eine einparametrische Menge von Sphärenbedingungen führen; ein Unterraum T , der nicht Teilmenge von Θ ist, liefert im allgemeinen höchstens zwei Sphärenbedingungen.

Wir werden in diesem Abschnitt die eindimensionalen Unterräume des Bedingungsraumes, die zur Gänze in der Hyperfläche Θ liegen, vollständig bezüglich der Gruppe (10) klassifizieren. Zu jeder Klasse werden wir eine Normalform angeben und daraus eine Normalform des maximalen Bewegungsvorganges errechnen, der zu diesem Bedingungsraum T gehört. Schließlich werden wir die Punkte des Gangraumes, zu denen Bedingungen $X \in T$ gehören, angeben und die zugehörigen Bahnsphären beschreiben. Unmittelbar aus der Normalform von T werden wir die Invarianten des zugehörigen maximalen

Bewegungsvorganges erhalten; die geometrische Deutung solcher Invarianten anhand des Bewegungsvorganges wird die Betrachtungen abschließen. Auf diese Weise werden wir alle *vierparametrischen* Bewegungsvorgänge mit sphärischen Bahnen erhalten.

Aus (10) erkennen wir unmittelbar, daß die Hyperebenen

$$H_0 \dots \omega_0 = 0, \quad H_5 \dots \omega_6 = 0$$

invariant sind. Dasselbe gilt dann auch für den Schnittraum $W_{06} = H_0 \cap H_6$.

Wir wollen nun die eindimensionalen Unterräume im einzelnen betrachten. In den folgenden Abschnitten sei T also eine Gerade, die ganz in Θ liegt.

1.1 FALL 1: T trifft den Unterraum W_{06} nicht.

Es gibt genau einen Punkt $G = T \cap H_0$ und genau einen Punkt $K = T \cap H_6$. Diese Punkte seien

$$(14) \quad G \dots (0: \gamma_1: \gamma_2: \gamma_3: \gamma_4: \gamma_5: 1), \quad K \dots (1: \kappa_1: \kappa_2: \kappa_3: \kappa_4: \kappa_5: 0)$$

Wegen $\kappa_6 = 0$ sind auch κ_3, κ_4 bezüglich der Gruppe (10) invariant. Wir unterscheiden nun folgende Fälle:

Fall 1a: $\kappa_4 \neq 0$. Die Koordinaten (14) können durch geeignete Wahl³ von t_a, t_b, t_c, t_d, t_e vermöge (10) in die Form

$$G \dots (0: 0: \gamma_2: 0: 0: 0: 1), \quad K \dots (1: \kappa_1: \kappa_2: \kappa_3: \kappa_4 \neq 0: 0: 0)$$

gebracht werden. Berücksichtigt man, daß die Koordinaten aller Punkte $X \in T$ der Gleichung (8) genügen müssen, so erhält man noch:

$$(15) \quad \gamma_2 = 0, \quad \kappa_2 = 0, \quad \kappa_3 = 0.$$

Die Verbindungsgerade $GK = T$ der Punkte

$$(16) \quad G \dots (0: 0: 0: 0: 0: 0: 1), \quad K \dots (1: \kappa_1: 0: 0: \kappa_4 \neq 0: 0: 0)$$

hat die Darstellung

$$(17) \quad X(\mu_1, \mu_2) = (\mu_2: \mu_2 \kappa_1: 0: 0: \mu_2 \kappa_4: 0: \mu_1).$$

Wir gehen wie in J. Lang [12], Abschnitt 2 beschrieben vor und erhalten schließlich zum System

³Durch $t_a = \frac{\gamma_4}{\gamma_6}$, $t_b = \frac{\kappa_5}{\kappa_4}$, $t_c = \frac{\gamma_5}{\gamma_5}$, $t_d = -\frac{\gamma_1 \kappa_4 + \gamma_3 \kappa_5}{\gamma_6 \kappa_4}$, $t_e = -\frac{\gamma_3}{\gamma_6}$ kann man die angegebene Form erreichen.

$$(18) \quad \begin{aligned} Y_0 + \kappa_1 Y_1 + \kappa_4 Y_4 &= 0 \\ Y_6 &= 0 \end{aligned}$$

und zur quadratischen Gleichung (13) die Lösung

$$(19) \quad (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6) = \left(t_1^2, t_1, t_2, t_3, \frac{-t_1^2 - \kappa_1 t_1}{\kappa_4}, t_4, 0 \right).$$

Das ergibt einen vierparametrischen Bewegungsvorgang der Gestalt

$$(20) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= x + t_1 \\ \bar{y} &= y + t_2 x + t_3 \quad \kappa_4 \neq 0. \\ \bar{z} &= z - \frac{t_1^2 + \kappa_1 t_1}{\kappa_4} x + t_4 y \end{aligned}$$

Die Invarianten im Fall 1a sind κ_1, κ_4 . Die Punkte des Gangraumes, welchen eine sphärische Bahn zugewiesen wird, erhält man aus (9) durch

$$(21) \quad x_0(\mu_1, \mu_2) = \kappa_4 \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad y_0(\mu_1, \mu_2) = 0.$$

Sie erfüllen eine isotrope, nicht vollisotrope Ebene. Die zugehörigen Bahnsphären haben die Gestalt

$$(22) \quad \Phi(\mu_1, \mu_2) \dots \mu_1 \mu_2 x^2 + (\mu_1 \mu_2 \kappa_1 - \mu_2^2 \kappa_4) x + \mu_1^2 z + E = 0,$$

wobei $E \in \mathbb{R}$ ist. Ihre Fernscheitel stimmen überein, d. h. es handelt sich gemäß J. Lang [12], Satz 6 um den Typ A. Die Radien sind wegen $R = \frac{-D}{A} = -\frac{\omega_6}{2\omega_0}$ gegeben durch

$$(23) \quad R(\mu_1, \mu_2) = -\frac{\mu_1}{2\mu_2}.$$

Der gemeinsame Fernscheitel U der Sphären ist für die angegebene Normalform (20) durch $U \dots (0:0:1:0)$ gegeben. Es gibt eine vollisotrope Gerade h , deren Punkte auf ebenen Bahnen geführt werden (für die Normalform (20) sind das die Punkte $P \dots \mu_1:\mu_2 = 1:0$ der z -Achse; ihre Bahnebene wird durch $z = \text{const.}$ beschrieben). Den Abstand eines Punktes $P(\mu_1, \mu_2)$ des Gangraumes aus (21) von dieser ausgezeichneten Geraden h bezeichnen wir mit

$$\delta(\mu_1, \mu_2) = \frac{\kappa_4 \mu_2}{\mu_1}.$$

Das Produkt aus $\delta(\mu_1, \mu_2)$ und dem Radius $R(\mu_1, \mu_2) = -\frac{\mu_1}{2\mu_2}$ der zugehörigen Bahnsphäre ist unabhängig von (μ_1, μ_2) und ergibt eine Invariante des Bewegungsvorganges ζ :

$$(24) \quad \delta(\mu_1, \mu_2)R(\mu_1, \mu_2) = -\frac{\kappa_4}{2}.$$

Wir erhalten somit den

Satz 1. *Der Fall 1a ist dadurch charakterisiert, daß die Punkte einer isotropen, aber nicht vollisotropen Ebene ν des Gangraumes auf konzentrischen Sphären geführt werden, welche keine Punktgrenzkugeln sind; dabei entsprechen Punkten auf verschiedenen vollisotropen Geraden in ν Bahnkugeln mit verschiedenen Radien.*

Es gibt genau eine vollisotrope Gerade $h \subset \nu$, deren Punkte in (nichtisotropen, zueinander parallelen) Ebenen laufen, welche durch den gemeinsamen Fernscheitel der Bahnsphären der Punkte $P \in \nu \setminus h$ gehen. Eine geometrische Deutung von κ_4 ist gegeben durch:

- *Das Produkt aus dem Abstand eines Punktes $P \in \nu$ des Gangraumes von der Geraden h mit dem Radius der zugehörigen Bahn-sphäre, hängt nicht von der Wahl des Punktes $P \in \nu$ ab und ist eine Invariante von ζ , nämlich gleich $-\frac{\kappa_4}{2}$.*

Jeder Bewegungsvorgang des Typs 1a, der die Invarianten κ_1, κ_4 aufweist, ist zur Normalform (20) konjugiert.

Fall 1b: $\kappa_4 = 0, \kappa_3 \neq 0$. Wir können durch geeignete Wahl von t_a, t_b, t_c, t_d, t_e vermöge (10) aus (14) die Gestalt⁴

$$(25) \quad G \dots (0:0:0:0:0:1), \quad K \dots (1:0:0:\kappa_3 \neq 0:0:\kappa_5:0).$$

Die gesuchte Normalform hat die Gestalt

$$(26) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= x + t_1 \\ \bar{y} &= y + t_2x - \frac{t_1^2 + \kappa_5 t_3}{\kappa_3} & \kappa_3 \neq 0. \\ \bar{z} &= z + t_4x + t_3y \end{aligned}$$

Die Punkte des Gangraumes, welche eine sphärische Bahn besitzen, bilden eine vollisotrope Ebene ν , welche in der Normalform (26) durch

$$(27) \quad x_0(\mu_1, \mu_2) = 0, \quad y_0(\mu_1, \mu_2) = \kappa_5 \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

gegeben ist. Die zugehörigen Bahnsphären

⁴Mit Hilfe von (10) erhalten wir bei $t_a = \frac{\gamma_4}{\gamma_6}$, $t_b = -\frac{\kappa_1}{\kappa_3}$, $t_c = \frac{\gamma_5}{\gamma_6}$, $t_d = \frac{\gamma_3 \kappa_1 - \gamma_1 \kappa_3}{\gamma_6 \kappa_3}$, $t_e = -\frac{\gamma_3}{\gamma_6}$ unmittelbar $\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = \kappa_1 = 0$. Da alle Punkte von T nach Voraussetzung die Bedingung (8) erfüllen, gilt dann noch $\gamma_2 = \kappa_2 = 0$.

$$(28) \quad \Phi(\mu_1, \mu_2) \dots \mu_2 x^2 + \mu_2 \kappa_3 y + \mu_1 z + E = 0, \quad E \in \mathbb{R}.$$

sind nicht konzentrisch. Ihre Fernscheitel sind für die Normalform (26) gegeben durch

$$(29) \quad U(\mu_1, \mu_2) \dots (0:0:\mu_1:-\kappa_3\mu_2).$$

Es handelt sich um den Typ B (siehe J. Lang [12], Satz 6), die Radien der Bahnsphären sind gegeben durch (23). Die Punkte einer vollisotropen Geraden h werden auf ebenen Bahnen geführt; die Bahnebenen sind zueinander parallel. Wenn wir den Ersatzabstand eines Punktes $P(\mu_1, \mu_2) \in \nu$ des Gangraumes aus (27) von dieser ausgezeichneten Geraden h mit

$$\delta(\mu_1, \mu_2) = \frac{\kappa_5 \mu_2}{\mu_1}$$

bezeichnen, so erkennen wir unmittelbar:

$$(30) \quad \delta(\mu_1, \mu_2) \cdot R(\mu_1, \mu_2) = -\frac{\kappa_5}{2}.$$

Das ist eine geometrische Deutung der Invariante κ_5 , welche der Deutung (24) im Fall 1a entspricht.

Bezeichnen wir mit $\alpha(\mu_1, \mu_2)$ den Winkel zwischen der Richtung des Fernscheitels $U(\mu_1, \mu_2)$ aus (29) und der ausgezeichneten Bahnebenenstellung, welche zur Geraden h gehört, so errechnet man

$$(31) \quad \alpha(\mu_1, \mu_2) \cdot R(\mu_1, \mu_2) = \frac{\kappa_3}{2},$$

was eine Deutung für die Invariante κ_3 des Bewegungsvorgangs liefert. Es gilt also der

Satz 2. *Im Fall 1b werden die Punkte einer vollisotropen Ebene ν des Gangraumes auf (nichtkonzentrischen) Sphären geführt; dabei werden Punkten auf verschiedenen vollisotropen Geraden in ν Bahnsphären mit verschiedenen Radien zugewiesen. Es gibt genau eine vollisotrope Gerade $h \subset \nu$, deren Punkte in (nichtisotropen, zueinander parallelen) Ebenen laufen. Es gibt zwei Invarianten κ_3, κ_5 , welche folgende geometrische Deutung zulassen:*

- *Das Produkt aus dem Ersatzabstand eines Punktes P des Gangraumes von der Geraden h mit dem Radius der zugehörigen Bahnsphäre, hängt nicht von der Wahl des Punktes $P \in \nu$ ab und ist eine Invariante von ζ , nämlich genau $-\frac{\kappa_5}{2}$.*
- *Das Produkt des Winkels zwischen dem Fernscheitel einer Bahnsphäre $\Phi(\mu_1, \mu_2)$ und der ausgezeichneten Bahnebenenstellung mit*

dem Radius $R(\mu_1, \mu_2)$ dieser Bahnsphäre ist unabhängig von der Wahl des Punktes $P \in \nu$ und beträgt wegen (30) und (31) genau $-\frac{\kappa_3}{2}$.

Jeder Bewegungsvorgang des Typs 1b, der die Invarianten κ_3, κ_5 aufweist, ist zur Normalform (26) konjugiert.

Bei $\kappa_3 = \kappa_4 = \kappa_6 = 0$ ist auch κ_5 invariant bezüglich (10). Wir betrachten also:

Fall 1c: $\kappa_3 = \kappa_4 = 0, \kappa_5 \neq 0$. Wir können durch geeignete Wahl von t_a, t_b, t_c, t_d, t_e vermöge (10) erreichen⁵:

$$(32) \quad G \dots (0:0:0:0:0:1), \quad K \dots (1:\kappa_1:0:0:0:\kappa_5:0)$$

und erhalten schließlich die Normalform

$$(33) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= x + t_1 \\ \bar{y} &= y + t_2 x + t_3 \\ \bar{z} &= z + t_4 x + \frac{\kappa_1 t_1 + t_1^2}{\kappa_5} y \end{aligned} \quad \kappa_5 \neq 0.$$

Die Punkte des Ganegraumes, welche sphärische Bahnen haben, bilden eine vollisotrope Ebene ν , welche in der Normalform (33) durch (27) dargestellt werden kann. Die zugehörigen Bahnsphären

$$(34) \quad \Phi(\mu_1, \mu_2) \dots \mu_2 x^2 + \mu_2 \kappa_1 x + \mu_1 z + E = 0, \quad E \in \mathbb{R}.$$

sind konzentrisch. Ihre Fernscheiden sind für die Normalform (33) gegeben durch $U \dots (0:0:1:0)$. Es handelt sich zugleich um Typ A und Typ B (siehe J. Lang [12], Satz 6), die Radien der Bahnsphären können auch hier in der Form (23) angeschrieben werden.

Die Punkte einer vollisotropen Geraden h , welche in der Normalform (26) durch $x_h = y_h = 0$ beschrieben wird, werden auf ebenen Bahnen geführt; die Bahnebenen sind zueinander parallel. Der Erdsatzabstand eines Punktes $P(\mu_1, \mu_2) \in \nu$ von dieser ausgezeichneten Geraden h ist $\delta(\mu_1, \mu_2) = \frac{\kappa_5 \mu_2}{\mu_1}$. Es gilt auch hier die Beziehung (30).

Satz 3. Im Fall 1c werden die Punkte einer vollisotropen Ebene ν des Ganegraumes auf konzentrischen Sphären geführt; dabei werden Punkten auf verschiedenen vollisotropen Geraden in ν Bahnsphären mit verschiedenen Radien zugewiesen. Es gibt genau eine vollisotrope Gerade

⁵Es ergibt sich bei $t_a = \frac{\gamma_4}{\gamma_6}, t_c = \frac{\gamma_5}{\gamma_6}, t_d = -\frac{\gamma_1 + t_b \gamma_3}{\gamma_6}, t_e = -\frac{\gamma_2}{\gamma_6}$ vorerst $\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0$. Mit Hilfe der Bedingung (8) erkennt man dann noch: $\gamma_2 = 0, \kappa_2 = 0$.

$h \subset \nu$, deren Punkte in (nichtisotropen, zueinander parallelen) Ebenen laufen. Es gilt:

- Das Produkt aus dem Ersatzabstand eines Punktes P des Gangraumes von der Geraden h mit dem Radius der zugehörigen Bahnsphäre, hängt nicht von der Wahl des Punktes $P \in \nu$ ab und ist eine Invariante von ζ , nämlich $\frac{\kappa_5}{2}$.

Jeder Bewegungsvorgang des Typs 1c, der die Invarianten κ_1, κ_5 aufweist, ist zur Normalform (33) konjugiert.

Fall 1d: $\kappa_3 = \kappa_4 = \kappa_5 = 0$. Dieser Fall liefert nur eine vollisotrope Gerade von Punkten mit sphärischen Bahnen und ist deshalb nicht von Interesse.

1.2 FALL 2: T trifft W_{06} , liegt aber nicht in H_0 oder H_6 .

Sei $T = GK$ mit $G \notin H_0, H_6$ und $K = T \cap W_{06}$. Wir haben also die Verbindungsgerade von Punkten

$$(35) \quad G \dots (1: \gamma_1: \gamma_2: \gamma_3: \gamma_4: \gamma_5: \gamma_6 \neq 0), \quad K \dots (0: \kappa_1: \kappa_2: \kappa_3: \kappa_4: \kappa_5: 0)$$

zu betrachten. Da $\kappa_6 = 0$ ist, sind κ_3 und κ_4 invariant gegenüber (10). Wir unterscheiden:

Fall 2a: $\kappa_4 \neq 0$. Dann ist wegen (8) aber $\kappa_3 = 0$. Wir können mit Hilfe von (10) und (8) jedenfalls⁶

$$(36) \quad G \dots (1: 0: 0: 0: 0: \gamma_6 \neq 0), \quad K \dots (0: \kappa_1: 0: 0: 1: 0: 0)$$

erreichen und erhalten schließlich die Normalform

$$(37) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= x + t_1 \\ \bar{y} &= y + t_2 x + t_3 \\ \bar{z} &= z - \kappa_1 t_1 x + t_4 y - \frac{t_1^2}{\gamma_6} \end{aligned} \quad \gamma_6 \neq 0.$$

Die Punkte des Gangraumes mit sphärischen Bahnen liegen in einer isotropen, aber nicht vollisotropen Ebene ν

⁶Der Punkt K ist ein ausgezeichneter Punkt auf T , der Punkt G hingegen ist willkürlich auf T gewählt. Setzt man statt (35) allgemein $G \dots (1: \gamma_1 + \lambda \kappa_1: \gamma_2 + \lambda \kappa_2: \gamma_3 + \lambda \kappa_3: \gamma_4 + \lambda \kappa_4: \gamma_5 + \lambda \kappa_5: \gamma_6 \neq 0)$, so ergibt sich das oben angegebene Resultat (36). Man erhält diese Normalform dann mit Hilfe von (10) bei $t_a = \frac{\lambda + \gamma_4}{\gamma_6}$, $t_b = \kappa_5$, $t_c = \frac{\lambda \kappa_5 + \gamma_5}{\gamma_6}$, $t_d := -\frac{\gamma_1 + \lambda \kappa_1 + \lambda \kappa_3 \kappa_5 + \gamma_3 \kappa_5}{\gamma_6}$, $t_e = \frac{\lambda \kappa_3 + \gamma_4 \kappa_3 - \gamma_6 \kappa_2}{\gamma_6}$.

$$(38) \quad x_0(\mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_2}{\gamma_6 \mu_1}, \quad y_0(\mu_1, \mu_2) = 0.$$

Die zugehörigen Bahnsphären sind von der Gestalt

$$(39) \quad \Phi(\mu_1, \mu_2) \dots \mu_1 x^2 + \mu_2 \left(\frac{\kappa_1}{2} - \frac{1}{\gamma_6} \right) x + \mu_1 \frac{\gamma_6}{2} z + E = 0$$

mit $E \in \mathbb{R}$. Alle Bahnsphären haben denselben Fernscheitel $U \in u$ und zugleich denselben Radius

$$(40) \quad R = -\frac{\gamma_6}{2}.$$

Je zwei dieser Bahnsphären sind schiebungsgleich. Betrachtet man den Abstand $q(P, \bar{P})$ zweier Punkte aus ν und den Betrag $n(P, \bar{P})$ des Schiebvektors, der zu den beiden Bahnsphären gehört, so bestätigt man leicht:

$$(41) \quad n(P, \bar{P}): q(P, \bar{P}) = \frac{\gamma_6 \kappa_1}{4} - \frac{1}{2}.$$

Dieses Verhältnis hängt also nicht von der Wahl der beiden Punkte ab und liefert zusammen mit (40) eine Deutung für die Invariante κ_1 . Wir erhalten also:

Satz 4. *Im Fall 2a haben die Punkte einer isotropen, aber nicht voll-isotropen Ebene ν des Gangraumes sphärische Bahnen; dabei sind die Bahnsphären konzentrisch und haben denselben Radius, sind also schiebungsgleich. Die Invarianten sind κ_1, γ_6 . $-\frac{\gamma_6}{2}$ tritt als gemeinsamer Radius der Bahnsphären auf. Das Verhältnis zwischen dem Abstand zweier Punkte aus ν und der Spanne des Vektors der Translation, die die beiden Bahnsphären ineinander überführt, ist eine Invariante (41). Jeder Bewegungsvorgang des Typs 2a, der die Invarianten κ_1, γ_6 aufweist, ist zur Normalform (37) konjugiert.*

Fall 2b: $\kappa_4 = 0, \kappa_3 \neq 0$. Wir können mit Hilfe von (10) und (8) schieblich⁷

$$(42) \quad G \dots (1:0:0:0:0:0:\gamma_6 \neq 0), \quad K \dots (0:0:0:1:0:0:\kappa_5:0)$$

erreichen. Es ergibt sich eine Normalform der Gestalt

⁷Wie in Fall 2a liefert der Ansatz $G \dots (1: \gamma_1 + \lambda \kappa_1: \gamma_2 + \lambda \kappa_2: \gamma_3 + \lambda \kappa_3: \gamma_4 + \lambda \kappa_4: \gamma_5 + \lambda \kappa_5: \gamma_6 \neq 0)$ wegen (8) die Normalform für die Verbindungsgerade $T = GK$. Hier verwenden wir $t_a = \frac{\gamma_4}{\gamma_6}$, $t_c = -\kappa_1$, $t_b = \frac{\lambda \kappa_5 + \gamma_5}{\gamma_6}$, $t_d = \frac{-\gamma_1 + \gamma_3 \kappa_1 + \lambda \kappa_1}{\gamma_6}$, $t_e = -F\lambda + \gamma_3 \gamma_6$.

$$(43) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= x + t_1 \\ \bar{y} &= y + t_2x - \kappa_5 t_4 & \gamma_6 \neq 0 \\ \bar{z} &= z + t_3x + t_4y - \frac{t_1^2}{\gamma_6} \end{aligned}$$

Die Punkte mit sphärischen Bahnen liegen in einer vollisotropen Ebene

$$(44) \quad \nu \dots x_0(\mu_1, \mu_2) = 0, \quad y_0(\mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_2 \kappa_5}{\mu_1 \gamma_6}.$$

Die zugehörigen Bahnsphären sind von der Gestalt

$$(45) \quad \Phi(\mu_1, \mu_2) \dots \mu_1 x^2 + \mu_2 y + \mu_1 \gamma_6 z + E = 0, \quad E \in \mathbb{R}.$$

Sie haben durchwegs denselben Radius

$$(46) \quad R = -\frac{\gamma_6}{2}.$$

Die Fernscheitel dieser Bahnsphären sind gegeben durch

$$(47) \quad U \dots (0:0:-\mu_1 \gamma_6:\mu_2).$$

Man erkennt, daß der Ersatzabstand $t(P, \bar{P})$ zweier Punkte aus ν und der Ersatzwinkel $\alpha(P, \bar{P})$ zwischen den Fernscheiteln der zugehörigen Bahnsphären zueinander proportional sind: Ihr Verhältnis hängt nicht von der Wahl der beiden Punkte ab und ist genau die Invariante

$$(48) \quad t(P, \bar{P}) : \alpha(P, \bar{P}) = \kappa_5.$$

Also gilt:

Satz 5. *Fall 2b liegt genau dann vor, wenn die Punkte einer vollisotropen Ebene ν des Gangraumes sphärische Bahnen durchlaufen und wenn dabei alle Punkte von ν kongruente Bahnsphären mit verschiedenen Fernscheiteln besitzen. Die Invarianten κ_5, γ_6 kann man geometrisch charakterisieren:*

- $-\frac{\gamma_6}{2}$ tritt als gemeinsamer Radius der Bahnsphären auf.
- Das Verhältnis zwischen dem Ersatzabstand zweier Punkte aus ν und dem Ersatzwinkel, den die Fernscheitel der zugehörigen Bahnsphären bestimmen, ist die Invariante κ_5 (48).

Jeder Bewegungsvorgang des Typs 2b, der die Invarianten κ_5, γ_6 aufweist, ist zur Normalform (43) konjugiert.

Ist $\kappa_3 = \kappa_4 = 0$, so ist κ_5 invariant bezüglich (10). Wir setzen also:

Fall 2c: $\kappa_3 = \kappa_4 = 0, \kappa_5 \neq 0$. Wir können mit Hilfe von (10)

und (8) für die Spurpunkte G, K erreichen⁸:

$$(49) \quad G \dots (1:0:0:0:0:0:\gamma_6 \neq 0), \quad K \dots (0:\kappa_1:0:0:0:1:0).$$

Es ergibt sich schließlich eine Normalform der Gestalt

$$(50) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= x + t_1 \\ \bar{y} &= y + t_2 x + t_3 \\ \bar{z} &= z + t_4 x - t_1 \kappa_1 y + \frac{t_1^2}{\gamma_6} \end{aligned} \quad \gamma_6 \neq 0.$$

Die Punkte mit sphärischen Bahnen liegen in einer vollisotropen Ebene ν , die ebenso wie in (44) beschrieben werden kann. Die zugehörigen Bahnsphären sind konzentrisch und von der Gestalt

$$(51) \quad \Phi(\mu_1, \mu_2) \dots \mu_1 x^2 + \mu_2 \frac{\kappa_1}{2} x + \mu_1 \frac{\gamma_6}{2} z + E = 0, \quad E \in \mathbb{R}.$$

Sie haben durchwegs denselben Radius $R = -\frac{\gamma_6}{2}$ und sind folglich kongruent. Also:

Satz 6. *Fall 2c liegt genau dann vor, wenn die Punkte einer vollisotropen Ebene ν des Gangraumes sphärische Bahnen durchlaufen und wenn dabei Punkte auf verschiedenen vollisotropen Geraden in ν kongruente und konzentrische Bahnsphären besitzen. Jeder Bewegungsvorgang des Typs 2c, der die Invarianten κ_1 und γ_6 aufweist, ist zur Normalform (50) konjugiert.*

Der Fall $\kappa_3 = \kappa_4 = \kappa_5 = 0$ führt auf eine einzige vollisotrope Gerade, deren Punkte sphärische Bahnen durchlaufen und ist deshalb nicht interessant.

1.3 FALL 3: T liegt in der Hyperebene H_0 .

In diesem Fall haben wir mit ebenen Bahnen zu rechnen. Sei $T = GK$ mit $G \in H_0 \setminus W_{06}$ und $K = T \cap W_{06}$. Wir setzen

$$(52) \quad G \dots (0:\gamma_1\gamma_2:\gamma_3:\gamma_4:\gamma_5:1), \quad K \dots (0:\kappa_1:\kappa_2:\kappa_3:\kappa_4:\kappa_5:0)$$

Wegen $\kappa_6 = 0$ sind auch hier κ_3, κ_4 invariant gegenüber (10). Wir unterscheiden:

⁸Hier erhalten wir, wenn wir so wie in Fall 2a oder Fall 2b vorgehen, bei $t_a = \frac{\gamma_4}{\gamma_6}$, $t_c = \frac{\lambda + \gamma_5}{\gamma_6}$, $t_d = -\frac{\gamma_1 + t_b \gamma_3}{\gamma_6}$, $t_e = -\frac{\gamma_3}{\gamma_6}$ mit Hilfe von (8) die angegebene Normalform.

Fall 3a: $\kappa_4 \neq 0$. Wir können mit Hilfe von (10) und (8) jedenfalls⁹

$$(53) \quad G \dots (0:0:0:0:0:0:1), \quad K \dots (0:\kappa_1:0:0:1:0:0)$$

erreichen¹⁰ und erhalten die Normalform

$$(54) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= x + t_1 \\ \bar{y} &= y + t_2 x + t_3 \\ \bar{z} &= z - \kappa_1 t_1 x + t_4 y. \end{aligned}$$

Die Punkte des Gangraumes, welchen sphärische (hier: ebene) Bahnen zugewiesen werden, erhält man in

$$(55) \quad x_0(\mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad y_0(\mu_1, \mu_2) = 0.$$

Sie erfüllen eine isotrope, nicht vollisotrope Ebene. Die zugehörigen Bahnsphären sind die Ebenen

$$(56) \quad \Phi(\mu_1, \mu_2) \dots \mu_2 \kappa_1 x + \mu_1 z + E = 0, \quad E \in \mathbb{R},$$

welche ein Ebenenbündel mit dem Scheitel U bilden¹¹. Es besteht eine Projektivität zwischen dem Parallelstrahlbüschel vollisotroper Geraden in ν und dem Büschel $U(x)$ der zugehörigen Bahnebenenferngeraden. Ist λ der Abstand zwischen zwei Punkten aus ν und α der Winkel zwischen ihren Bahnebenen, so bestätigt man durch Rechnung:

$$(57) \quad \alpha : \lambda = -\kappa_1.$$

Dieses Verhältnis hängt also nicht von der Wahl der beiden Punkte ab und liefert eine Deutung für die Invariante κ_1 . Also gilt:

Satz 7. *Im Fall 3a durchlaufen die Punkte einer isotropen, aber nicht vollisotropen Ebene ν des Gangraumes ebene Bahnen; dabei entsprechen Punkten auf verschiedenen vollisotropen Geraden in ν nichtparallele Bahnebenen, welche aber einen festen Fernpunkt U auf der absoluten Geraden u gemeinsam haben. Das Verhältnis zwischen dem Winkel zweier Bahnebenen und dem Abstand der zugehörigen Punkte im Gangraum ist konstant, und zwar gleich $-\kappa_1$. Jeder Bewegungsvorgang des*

⁹Der Punkt K ist ein ausgezeichneter Punkt auf T , der Punkt G hingegen ist willkürlich auf T gewählt. In der Rechnung setzen wir für G statt (52) allgemein $G \dots (0:\gamma_1 + \lambda\kappa_1:\gamma_2 + \lambda\kappa_2:\gamma_3 + \lambda\kappa_3:\gamma_4 + \lambda\kappa_4:\gamma_5 + \lambda\kappa_5:1)$ und versuchen, durch geeignete Wahl von λ zu spezialisieren.

¹⁰Wir setzen $\kappa_4 = 1$ und in (10) $t_a = \lambda + \gamma_4$, $t_b = \kappa_5$, $t_c = \lambda\kappa_5 + \gamma_5$, $t_d = -\gamma_1 + \lambda\kappa_1 + \lambda\kappa_3\kappa_5 + \gamma_3\kappa_5$, $t_e = -\lambda\kappa_3 + \gamma_3$. Wegen (8) ergibt sich dann (53).

¹¹Man vergleiche hierzu H. Vogler [21].

Typs 3a, der die Invariante κ_1 aufweist, ist zur Normalform (54) konjugiert.

Fall 3b: $\kappa_4 = 0, \kappa_3 \neq 0$. (10) und (8) liefern¹²

$$(58) \quad G \dots (0:0:0:0:0:0:1), \quad K \dots (0:0:0:1:0:\kappa_5:0).$$

Wir erhalten schließlich

$$(59) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= x + t_1 \\ \bar{y} &= y + t_2 x - \kappa_5 t_4 \\ \bar{z} &= z + t_3 x + t_4 y \end{aligned}$$

als Normalform. Die Punkte des Gangraumes, welchen eine sphärische Bahn zugewiesen wird, liegen in einer vollisotropen Ebene

$$(60) \quad x_0(\mu_1, \mu_2) = 0, \quad y_0(\mu_1, \mu_2) = \frac{\kappa_5 \mu_2}{\mu_1},$$

die Bahnebenen sind durch

$$(61) \quad \Phi(\mu_1, \mu_2) \dots \mu_2 y + \mu_1 z + E = 0, \quad E \in \mathbb{R}.$$

gegeben. Alle Bahnebenen haben einen Fernpunkt U gemeinsam, der aber nicht auf der absoluten Geraden liegt. Es besteht auch hier eine Projektivität zwischen dem Parallelstrahlbüschel vollisotroper Geraden in ν und dem Büschel $U(u)$ der zugehörigen Bahnebenenferngeraden. Ist t der Abstand zwischen zwei Punkten aus ν und α der Winkel zwischen ihren Bahnebenen, so gilt:

$$(62) \quad \alpha : t = -1 : \kappa_5$$

und somit:

Satz. *Im Fall 3b werden die Punkte einer vollisotropen Ebene ν des Gangraumes auf ebenen Bahnen geführt; dabei entsprechen Punkten auf verschiedenen vollisotropen Geraden in ν nichtparallele Bahnebenen, welche aber einen festen Fernpunkt $U \notin u$ gemeinsam haben. Das Verhältnis zwischen dem Winkel zweier Bahnebenen und dem Ersatzabstand der zugehörigen Punkte im Gangraum ist konstant, und zwar gleich $-\frac{1}{\kappa_5}$. Jeder Bewegungsvorgang des Typs 3b, der die Invariante κ_5 aufweist, ist zur Normalform (59) konjugiert.*

Fall 3c: $\kappa_3 = \kappa_4 = 0$. Nur bei $\kappa_5 \neq 0$ erhalten wir einen interessanten Fall. Man kann¹³

¹²Wir setzen $\kappa_3 = 1$ und in (10) dann $t_a = -\kappa_1, t_b = \gamma_4, t_c = -\kappa_1, t_d = -\gamma_1 + \kappa_1 \gamma_3, t_e = -\lambda - \gamma_3$. Aus (8) ergibt sich (58).

¹³Wir setzen $\kappa_5 = 1$ und erhalten mit Hilfe von (10) und (8) bei $t_a = \frac{\gamma_4}{\gamma_5}, t_c = \lambda + \gamma_5, t_d = -\gamma_1 - \lambda \kappa_1 - t_b \gamma_3, t_e = -\gamma_3$ die Gestalt (63).

$$(63) \quad G \dots (0:0:0:0:0:0:1), \quad K \dots (0:\kappa_1:0:0:0:1:0).$$

erreichen und erhält schließlich als Normalform

$$(64) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= x + t_1 \\ \bar{y} &= y + t_2 x + t_3 \\ \bar{z} &= z + t_4 x - t_1 \kappa_1 y \end{aligned}$$

Die Punkte des Gangraumes mit sphärischer Bahn liegen in einer vollisotropen Ebene

$$(65) \quad x_0(\mu_1, \mu_2) = 0, \quad y_0(\mu_1, \mu_2) = \frac{\kappa_5 \mu_2}{\mu_1};$$

die Bahnebenen sind durch

$$(66) \quad \Phi(\mu_1, \mu_2) \dots \kappa_1 \mu_2 x + \mu_1 z + E = 0, \quad E \in \mathbb{R}.$$

gegeben. Alle Bahnebenen haben einen Fernpunkt U (auf der absoluten Geraden) gemeinsam. Die einzige Invariante κ_1 kann man ebenso wie im Fall 3b deuten, wenn man als Winkel zweier Bahnebenen den Ersatzwinkel α wählt:

$$(67) \quad \alpha : t = -\kappa_1.$$

Es gilt:

Satz 9. *Der Fall 3c ist dadurch charakterisiert, daß die Punkte einer vollisotropen Ebene ν des Gangraumes ebene Bahnen durchlaufen. Das Verhältnis zwischen dem Winkel zweier Bahnebenen und dem Ersatzabstand der zugehörigen Punkte im Gangraum ist konstant, und zwar gleich $-\kappa_1$. Jeder Bewegungsvorgang des Typs 3c, der die Invariante κ_1 aufweist, ist zur Normalform (64) konjugiert.*

1.4 FALL 4: T liegt in der Hyperebene H_6 .

Dieser Fall schließt die Betrachtung eindimensionaler Unterräume von $P(V)$ ab. Den Fall, daß T in $W_{06} = H_0 \cap H_6$ liegt, schließen wir aus; er ist nicht von Interesse, da alle Punkte auf isotropen Ebenen wandern und der *Grundrißzwanglauf* ein *Kreuzschiebergetriebe* ist (siehe O. Röschel [14]). Wir haben mit Bahnen auf Punktgrenzkugeln zu rechnen. Gemäß J. Lang [12], Satz 2, werden mit jeder Sphärenbedingung dieses Typs alle Punkte einer vollisotropen Ebene ebenfalls auf Punktgrenzkugeln geführt. Wir können den Unterraum T als Verbindungsgerade $T = GK$ mit $G \in H_6 \setminus W_{06}$, $K \in W_{06}$ darstellen. Der Ansatz

$$(68) \quad G \dots (1: \gamma_1 \gamma_2: \gamma_3: \gamma_4: \gamma_5: 0), \quad K \dots (0: \kappa_1: \kappa_2: \kappa_3: \kappa_4: \kappa_5: 0)$$

liefert wegen J. Lang [12], Satz 2, nur bei $\gamma_4 = \gamma_5 = \kappa_4 = \kappa_5 = 0$ ein nichttriviales Resultat. κ_3 ist wegen $\kappa_6 = 0$ eine Invariante bezüglich (10). Es ergibt sich:

Fall 4a: $\kappa_3 \neq 0$. Wir können vermöge (69) $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ erreichen. Es ergibt sich¹⁴

$$(69) \quad G \dots (1: \gamma_1: \gamma_2: 0: 0: 0), \quad K \dots (0: 0: 0: 1: 0: 0: 0).$$

Die verbleibenden Invarianten γ_1, γ_2 liefern¹⁵ bei $\gamma_2 \neq 0, \kappa_1 = 1$ einen Bewegungsvorgang der Gestalt

$$(70) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= x + t_1 \\ \bar{y} &= y - \frac{\gamma_1 t_1 + t_1^2}{\gamma_2} x & \gamma_2 \neq 0 \\ \bar{z} &= z + t_2 x - t_3 y + t_4 \end{aligned}$$

Fall 4b: $\kappa_3 = 0$. Wenn wir den trivialen Fall außer acht lassen, in dem nur die Punkte einer vollisotropen Ebene auf schiebungsgleichen Punktgrenzkugeln geführt werden, so können wir $\gamma_3 \neq 0, \kappa_2 \neq 0$ setzen; sei also $\kappa_2 = 1$. Vermöge (10) erreichen wir¹⁶

$$(71) \quad G \dots (1: 0: 0: \gamma_3: 0: 0: 0), \quad K \dots (0: \kappa_1: 1: 0: 0: 0: 0).$$

Die Invarianten γ_3, κ_1 liefern den Bewegungsvorgang

$$(72) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= x + t_1 \\ \bar{y} &= y - \kappa_1 t_1 x - \frac{t_1^2}{\gamma_3} & \gamma_3 \neq 0 \\ \bar{z} &= z + t_2 x + t_3 y + t_4 \end{aligned}$$

Die Bewegungsvorgänge aus Fall 4a und Fall 4b sind die einzigen Bricardbewegungsvorgänge, welche zu eindimensionalen Bedingungsraumen gehören. Es handelt sich bei (70) und (72) um die Normalformen jener Bricardschen Bewegungsvorgänge, die in O. Röschel [16], Satz 1, als der Typ I angeführt sind. Es gilt also:

¹⁴Wir haben hier den Punkt K als den Schnittpunkt mit W_{06} ausgezeichnet, während G willkürlich auf T gewählt wurde. Wir setzen $G(\dots \gamma_i + \lambda \kappa_i \dots)$ und erhalten bei $\lambda = -\gamma_3$ und $t_a = \kappa_2, t_b = -\kappa_1$ das Resultat (69).

¹⁵Im Fall $\gamma_2 = 0$ werden nur die Punkte einer einzigen vollisotropen Ebene auf Punktgrenzkugeln geführt. Dieser Fall ist nicht von Interesse.

¹⁶ $t_a = \frac{\lambda + \gamma_2}{\gamma_3}, t_b = -\frac{\lambda \kappa_1 + \gamma_1}{\gamma_3}$ liefert (71). Eine Spezialisierung von λ bringt keine weitere Vereinfachung.

Satz 10. Die einzigen vierparametrischen Bricardbewegungen haben die Normalformen (70) und (72).

(a) Im Fall 4a werden alle Punkte des Gangraumes auf Punktgrenzkugeln geführt, die Punkte einer vollisotropen Ebene ν sogar auf isotropen Ebenen (die wir als Grenzfälle von Punktgrenzkugeln betrachten). Bezeichnet δ den Abstand eines Punktes von dieser Ebene ν und R den Radius der ihm zugehörigen Bahnsphäre, so gilt:

$$(73) \quad \delta \cdot R = -\frac{\gamma_2}{2}.$$

Besitzen zwei Bewegungsvorgänge des Typs 4a dieselben Invarianten γ_1, γ_2 , so sind sie zueinander konjugiert.

(b) Im Fall 4b werden alle Punkte des Gangraumes auf kongruenten Punktgrenzkugeln geführt. Die Invariante γ_3 bestimmt den Radius der Bahnkugeln: $R = -\frac{\gamma_3}{2}$. Die andere Invariante κ_1 läßt folgende Deutung zu: Sind P_1, P_2 zwei Punkte des Gangraumes mit dem isotropen Abstand $\delta(P_1, P_2) = \overline{P_1 P_2}$, so sind die zugehörigen Bahnsphären Φ_1, Φ_2 schiebungsgleich. Für den Betrag $v(\Phi_1, \Phi_2)$ eines Schiebvektors, der Φ_1 in Φ_2 überführt, gilt

$$(74) \quad 2\delta(P_1, P_2) + v(\Phi_1, \Phi_2) = \kappa_1.$$

Besitzen zwei Bewegungsvorgänge des Typs 4b dieselben Invarianten γ_3, κ_1 , so sind sie zueinander konjugiert.

References

- [1] BOREL, E.: Mémoire sur les déplacements à trajectoires sphériques, *Mém. savants étrangers* (2) Paris 33 (1908), 1-128.
- [2] BRICARD, R.: Sur un déplacement remarquable, *Comptes rendus des Séances, séance du 30 nov.* 1896.
- [3] BRICARD, R.: Mémoire sur les déplacements à trajectoires sphériques. *Journal de l'école polytechnique, II^e série, 11^e cahier*, Paris 1906, 1-93.
- [4] BRAUNER, H.: Geometrie des zweifach isotropen Raumes I, *J. Reine Angew. Math.* 224 (1966), 118-146.
- [5] BRAUNER, H.: Geometrie des zweifach isotropen Raumes II, *J. Reine Angew. Math.* 226 (1967), 132-158.
- [6] BRAUNER, H.: Geometrie des zweifach isotropen Raumes III, *J. Reine Angew. Math.* 228 (1967), 38-70.
- [7] DARBOUX, G.: Sur le déplacement d'une figure invariable, *Comptes rendus Paris* 92 (1881), 118-1221.

- [8] DUPORCQ, E.: Sur le déplacement le plus générale d'une droite dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques, *Journal de Math. (5^e série), tome IV, fasc. II*, Paris, 1898.
- [9] KOENIGS, G.: Leçons de Cinématique, Libr. Scient. A. Hermann, Paris (1897).
- [10] LANG, J.: Zur Kinematik des Flaggenraumes, *Journ. of Geometry* 29 (1987), 140 - 155.
- [11] LANG, J.: Einparametrische Zwangläufe des zweifach isotropen Raumes, *Ber. d. Math.-Stat. Sektion, Forschungszentrum Graz*, 297 (1989) 1-53.
- [12] LANG, J.: Bewegungsvorgänge des Flaggenraumes mit sphärischen Bahnen. Ein Übertragungsprinzip. *Journ. of Geometry* (im Druck).
- [13] MANNHEIM, A.: Propriétés relatives aux trajectoires des points d'une figure de forme invariable, *Comptes rendus Paris* 76 (1873), 635-638.
- [14] RÖSCHEL, O.: Zur Kinematik der isotropen Ebene I, *Journ. of Geometry* 21 (1983), 146-156.
- [15] RÖSCHEL, O.: Zur Kinematik der isotropen Ebene II, *Journ. of Geometry* 24 (1985), 112-122.
- [16] RÖSCHEL, O.: Darboux- und Bricard-Bewegungen im Flaggenraum, *Journal of Geom.* 28 (1987), 189-196.
- [17] SACHS, H.: Lehrbuch der ebenen isotropen Geometrie, Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 1987.
- [18] SACHS, H.: Geometrie des Flaggenraumes, Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 1992.
- [19] SCHÖNFLIES, A.: Geometrie der Bewegungen in synthetischer Darstellung, Teubner, Leipzig, 1886.
- [20] VOGLER, H.: Der Satz von A. Mannheim und A. Schoenflies in der isotropen Kinematik, *Ber. d. Math.-Stat. Sektion, Forschungszentrum Graz*, 306 (1989), 1-14.
- [21] VOGLER, H.: Über Affinzwangläufe, bei denen alle Punkte einer Geraden ebene Bahnen durchlaufen, *Vortragsauszüge des 11. Kolloquiums über Differentialgeometrie*, Darmstadt 1986, 44 - 57.
- [22] VOGLER, H.: Zwangläufe mit sphärischen Bahnen (in Vorbereitung).

STRUCTURAL THEOREMS FOR THE S -ASYMPTOTIC AND QUASI- ASYMPTOTIC OF DISTRIBUTIONS

S. Pilipović

*Institute of Mathematics, University, 21000 Novi Sad, Trg Dosi-
teja Obradovića 4, Yugoslavia*

B. Stanković

*Institute of Mathematics, University, 21000 Novi Sad, Trg Dosi-
teja Obradovića 4, Yugoslavia*

Received May 1991

AMS Subject Classification: 46 F 10

Keywords: Asymptotic behaviour, distribution, quasiasymptotic, S -asymptotic.

Abstract: The equivalence of various definitions of the S -asymptotic and of the quasiasymptotic are proved. The use of them are given in the comments after the main theorems.

1. Introduction

In the last twenty years many aspects of the asymptotic behaviour of distributions have been elaborated and used. Between them the important are the quasiasymptotic and the S -asymptotic which play a special role in investigations of the asymptotic behaviour of generalized functions' integral transforms. The quasiasymptotic has been elaborated in [12] and for the S -asymptotic it is done in [6]. In the both cited books and in the references given there, one can find applications of these notions. For the application of the quasiasymptotic expansion we refer to [6], [12] and [13].

Our aim is to give several equivalent definitions for these two notions of the asymptotic behaviour of distributions. They are useful in many different cases. We shall point out some of them in the comments of Theorems 1 and 3.

All the results of the paper are given in the one-dimensional case. They can be proved also in the many - dimensional case by using a cone Γ instead of the interval $[0, \infty)$, but the assertions in this case have more complicated forms.

2. Notation

\mathcal{D}' is the space of Schwartz distributions \mathcal{S}'_a is the space of tempered distributions with support in $[a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$; $\mathcal{S}'_{[0; \infty)} := \mathcal{S}'_+$. The Laplace transform of $T \in \mathcal{S}'_+$ is defined by

$$\tilde{T}(z) = \mathcal{L}[T](z) = \langle T(t), e^{izt} \rangle, \quad z \in \mathbb{R} + i\mathbb{R}_+, \quad (\mathbb{R}_+ = (0, \infty)).$$

The class of distributions f_α , $\alpha \in \mathbb{R}$, belonging to \mathcal{S}'_+ , is defined by:

$$(2.1) \quad f_\alpha(t) = \begin{cases} \theta(t)t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha), & \alpha > 0, \\ f_{\alpha+m}^{(m)}, & \alpha \leq 0, \alpha + m > 0, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

where $\theta(t) = 1, t \geq 0$; $\theta(t) = 0, t < 0$. We denote: $f^{(-m)} = f_m * f$, $m \in \mathbb{R}$ ($*$ is the sign of convolution); $f_{-n} = \delta^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_0 = \delta$. There holds $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Let $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$, be positive numbers such that $\alpha_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, and let

$$\delta_n \in C^\infty, \text{supp } \delta_n \subset [-\alpha_n, \alpha_n], \quad \delta_n \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Then, the sequence $\{\delta_n\}$ is called a δ -sequence ([1], p. 75). If $\varphi \in \mathcal{D}$, then $\delta_n * \varphi \rightarrow \varphi$ in \mathcal{D} ; hence $\{\delta_n * \varphi; n \in \mathbb{N}\}$ is a bounded set in \mathcal{D} .

In the sequel, we shall use the class of slowly varying functions. A function $L \in \mathcal{L}_{loc}^1$ is a slowly varying one if $L(x) > 0, x > 0$, and if

$$(2.2) \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{L(ut)}{L(u)} = 1, \text{ for every } t > 0.$$

We know ([9], Chapter 1.5) that if $L_2(x) \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty$ and L_1, L_2 are slowly varying functions, then $L_1 \circ L_2$ is slowly varying one, as well. Hence, for $x \in \mathbb{R}$

$$(2.3) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{L(x+h)}{L(h)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{L(\ell n u t)}{L(\ell n u)} = 1, \quad t > 0, x > -\infty.$$

If x belongs to a compact set, then the limit (2.3) is uniform in x ([9], Chapter 1.2).

3. S -asymptotic in \mathcal{D}'

The S -asymptotic of distributions has been appeared as a useful notion in the theory of generalized functions and its applications [6]. We shall repeat the definition of it:

Definition 1. Let T belong to \mathcal{D}' (to S') and $c(h)$, $h \geq h_0$ be a positive measurable function. It is said that T has the S -asymptotic at infinity related to c , with the limit $g \neq 0$ in \mathcal{D}' (in S') if for every $\phi \in \mathcal{D}$ ($\phi \in \mathcal{S}$)

$$(3.1) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \left\langle \frac{T(x+h)}{c(h)}, \phi(x) \right\rangle = \langle g(x), \varphi(x) \rangle.$$

We shall write in short $T \sim c.g$, $h \rightarrow \infty$, in \mathcal{D}' (in S'). Since

$$(3.2) \quad (T * \phi)(h) = \langle T(x+h), \check{\phi}(x) \rangle, \quad h \in \mathbb{R}, \quad \check{\phi}(x) = \phi(-x),$$

the S -asymptotic can be defined in an equivalent form: If for every $\phi \in \mathcal{D}$ ($\phi \in \mathcal{S}$) there exists $C_\phi \in \mathbb{R}$ such that

$$(3.3) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{(T * \phi)(h)}{c(h)} = C_\phi, \quad \text{where } C_\phi \neq 0 \text{ for some } \varphi \in \mathcal{D}.$$

Relation (3.1) implies (3.3) in a trivial way. By the equality of the weak and the strong sequential convergence in \mathcal{D}' , (3.3) implies (3.1).

We know ([6], p. 85) that c and g from Def. 1 have the form:

$$c(h) = \exp(\alpha h)L(\exp h), \quad h > h_0, \quad g(x) = M \exp(\alpha x), \quad x \in \mathbb{R},$$

where M and α belong to \mathbb{R} , $M \neq 0$.

Theorem 1. Let $T \in \mathcal{D}'$ and $c(h) = \exp(\alpha h)L(\exp h)$, $h \geq h_0$. The following conditions are equivalent:

(a)

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{T(\cdot + h)}{c(h)} = M \exp(\alpha \cdot), \quad \text{in } \mathcal{D}', \quad M \neq 0.$$

(b) For every $\phi \in \mathcal{D}$,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{(T * \phi)(\cdot + h)}{c(h)} \rightarrow M_\phi \exp(\alpha) \text{ in } \mathcal{D}',$$

where

$$M_\phi = M \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha t} \phi(t) dt, \quad M \neq 0.$$

(c) For a δ -sequence $\{\delta_n\}$ there exists a sequence $\{M_n\}$ from \mathbb{R} , such that $M_n \rightarrow M \neq 0$, $n \rightarrow \infty$, and

$$(3.4) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{(T * \delta_n)(\cdot + h)}{c(h)} = M_n \exp(\alpha),$$

in \mathcal{D}' , uniformly for $n \in \mathbb{N}$.

(d) There are functions F_i , $i = 0, \dots, n$, which are continuous on (a, ∞) , $a \in \mathbb{R}$, such that for every $i = 0, \dots, n$,

$$\frac{F_i(x+h)}{\exp(\alpha h)L(\exp h)} \rightarrow c_i \exp(\alpha x), \quad h \rightarrow \infty,$$

uniformly for $x \in (a, b)$, $a < b < \infty$, $\sum_{i=0}^n c_i \alpha^i = M \neq 0$, and the

restriction of T on (a, ∞) is of the form $T = \sum_{i=0}^n D^i F_i$.

(e) For a δ -sequence $\{\delta_n\}$,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{(T * \delta_n)(h)}{c(h)} = p_n, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ where } p_n \neq 0 \text{ for some } n,$$

and for every $\phi \in \mathcal{D}$,

$$\sup_{k \geq 0} \left| \frac{(T * \phi)(h)}{c(h)} \right| < \infty.$$

Proof. (a) \Rightarrow (b). Using the properties of convolution, for every $\psi \in \mathcal{D}$ we have

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} \left\langle \frac{(T * \phi)(x+h)}{c(h)}, \psi(x) \right\rangle &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left\langle \frac{T(x+h)}{c(h)}, (\check{\phi} * \psi)(x) \right\rangle \\ &= \langle M e^{\alpha x}, (\check{\phi} * \psi)(x) \rangle = M \langle (e^{\alpha \cdot} * \phi)(x), \psi(x) \rangle \\ &= M \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t} \phi(t) dt \langle \exp(\alpha x), \psi(x) \rangle. \end{aligned}$$

(b) \Rightarrow (a). This can be derived as a consequence of Th. XXIII in [8], Ch. VI, but we shall give a direct proof which is more elementary. It is proved in [7] that any $\psi \in \mathcal{D}$, can be written in the form $\psi =$

$= \psi_1 * \theta_1 + \dots + \psi_k * \theta_k$, where ψ_i , and θ_i , $i = 1, 2, \dots, k$, are from \mathcal{D} . This implies

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad & \lim_{h \rightarrow \infty} \left\langle \frac{T(x+h)}{c(h)}, \psi(x) \right\rangle = \\
 & = \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \left\langle \frac{(T * \check{\psi}_i)(x+h)}{c(h)}, \theta_i(x) \right\rangle = \\
 & = \sum_{i=1}^k M_{\psi_i} \langle e^{\alpha x}, \theta_i(x) \rangle
 \end{aligned}$$

Since in \mathcal{D}' the weak and the strong sequential convergence are equal, there exists a $g \in \mathcal{D}'$ such that limit (3.6) is equal to $\langle g, \phi \rangle$. But we know that g has the form $g(x) = M e^{\alpha x}$, $x \in \mathbb{R}$, $M \neq 0$.

(a) \Rightarrow (c). Let $\{\delta_n\}$ be a δ -sequence. For any $\phi \in \mathcal{D}$, $\{\delta_n * \phi; n \in \mathbb{N}\}$ is a bounded set in \mathcal{D} . We have

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad & \lim_{h \rightarrow \infty} \left\langle \frac{(T * \delta_n)(x+h)}{c(h)}, \phi(x) \right\rangle = \\
 & = \lim_{h \rightarrow \infty} \left\langle \frac{T(x+h)}{c(h)}, (\check{\delta}_n * \phi)(x) \right\rangle = \\
 & = \langle M e^{\alpha x}, (\check{\delta}_n * \phi)(x) \rangle = \langle M_n e^{\alpha x}, \phi(x) \rangle.
 \end{aligned}$$

By using the equivalence of the strong and the weak sequential convergences in \mathcal{D}' , it follows that relation (3.7) implies (3.4) and (c).

(c) \Rightarrow (a). Let $\phi \in \mathcal{D}$ and

$$a_{n,h} = \left\langle \frac{(T * \delta_n)(x+h)}{c(h)}, \phi(x) \right\rangle = \frac{(T * (\check{\delta}_n * \phi))(h)}{c(h)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad h > 0.$$

We have $a_{n,h} \rightarrow a_n$, $h \rightarrow \infty$, uniformly for $n \in \mathbb{N}$, where

$$\begin{aligned}
 a_n &= M_n \langle \exp(\alpha x), \phi(x) \rangle, \quad n \in \mathbb{N}, \\
 a_n &\rightarrow a = M \langle \exp(\alpha x), \phi(x) \rangle, \quad n \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Also $a_{n,h} \rightarrow a_h$, $n \rightarrow \infty$, where $a_h = \langle \frac{T(x+h)}{c(h)}, \phi(x) \rangle$, $h > 0$. This implies $a_h \rightarrow a$, $h \rightarrow \infty$, what is in fact (a).

(d) \Rightarrow (a). If two distributions T_1 and T_2 are equal on some interval (a, ∞) and T_1 has the S -asymptotic related to c with the limit g , then the same holds for T_2 , as well. Hence, we can take $T = 0$ on $(-\infty, a)$. For a $\varphi \in \mathcal{D}$, $\text{supp } \varphi \subset K$ and h large enough, we have

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{T(x+h)}{\exp(\alpha h)L(\exp h)}, \varphi(x) \right\rangle = \\ &= \sum_{i=0}^n \int_K \frac{F_i(x+h)}{\exp(\alpha h)L(h)} (-1)^i \varphi^{(i)}(x) dx \rightarrow \\ & \rightarrow \sum_{i=0}^n \alpha^i c_i \langle e^{\alpha x}, \varphi(x) \rangle, \quad h \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

(a) \Rightarrow (d). This follows from the structural theorem (see [10]), but we can give a direct proof. Since T has the S -asymptotic related to $c(h) = \exp(\alpha h)L(\exp h)$, $h > 0$, the set $\left\{ \frac{T(x+h)}{c(h)}; h \geq 0 \right\}$ is bounded in \mathcal{D}' . For every $\varphi \in \mathcal{D}$, $\left\{ \frac{T(x+h)}{c(h)} * \varphi(x); h > 0 \right\}$ is a bounded set of regularized distributions ([8], II, Ch. VI, §4). Let us denote by Ω an open neighbourhood of zero in \mathbb{R} which is relatively compact and denote its closure by K . The proof of Th. XXII, Ch. VI, in [8], implies that there exists $m \in \mathbb{N}$ such that the linear mappings

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \frac{T(\cdot + h)}{c(h)} * \alpha * \beta, \quad h > 0,$$

are equicontinuous mappings of $\mathcal{D}_\Omega^m \times \mathcal{D}_\Omega^m$ into $\mathcal{L}_{(a,b)}^\infty$. Since

$$\begin{aligned} F(x, h) &= \left(\frac{T(\cdot + h)}{c(h)} * \alpha * \beta \right) (x) = \\ &= \frac{(T * \alpha * \beta)(x + h)}{c(h)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad h > 0, \end{aligned}$$

it follows that $F(\cdot, h)$ is a continuous function for every $h > 0$. Also we have that the family $\{F(\cdot, h); h > 0\}$, is uniformly bounded on the interval $[a, b]$. \mathcal{D}_Ω is a dense subset of \mathcal{D}_Ω^m . The set of functions $\left\{ \frac{T(\cdot + h)}{c(h)} * \psi * \phi, h > 0 \right\}$ converges in $\mathcal{L}_{(a,b)}^\infty$ for $\psi, \phi \in \mathcal{D}_\Omega$. Now, we use the Banach-Steinhaus Theorem to prove that for every $\alpha, \beta \in \mathcal{D}_\Omega^m$, $\frac{T(\cdot + h)}{c(h)} * \alpha * \beta \rightarrow C_{\alpha, \beta} \exp(\alpha)$, $h \rightarrow \infty$, in $\mathcal{L}_{(a,b)}$. Now, by using relation (VI, 6: 23) in [8], we have

$$\begin{aligned} & D_x^{4k}(\gamma E * \gamma E * T)(x) - 2D_x^{2k}(\gamma E * \xi * T)(x) + \\ & + (\xi * \xi * T)(x) = T(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

where E is a solution of $D^{4k}E = \delta$, ((II, 3; 19) in [8]); $\gamma \xi \in \mathcal{D}_\Omega$ and k is large enough so that $\gamma E \in \mathcal{D}_\Omega^m$. In this case $m = 4k$, $E_{4k} \equiv \gamma E * \gamma E * T$, $E_{2k} = -2\gamma E * \xi * T$; $E_0 = \xi * \xi * T$; $E_i = 0$, $i \neq 4k, 2k, 0$. Thus, (d) is

proved.

(a) \Rightarrow (e). It is trivial.

(e) \Rightarrow (a). First, we shall prove that the set $G = \{\delta_n(\cdot + x), n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}\}$ is dense in \mathcal{D} . Suppose that $T \in \mathcal{D}'$ and

$$\langle T, \delta_n(\cdot + x) \rangle = (T * \check{\delta}_n)(-x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Then for any $\varphi \in \mathcal{D}$, $\langle T * \check{\delta}_n, \varphi \rangle = 0$ and

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, \delta_n * \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T * \check{\delta}_n, \varphi \rangle = 0.$$

This implies that $T = 0$ and hence, the set G is dense in \mathcal{D} . The Banach-Steinhaus Theorem and (b) imply (a). \diamond

Comments for Theorem 1. 1. The following statement implies (a) but it is not equivalent to (a):

(f) For a δ sequence $\{\delta_n\}$ there is a sequence M_n , from \mathbb{R} , such that $M_n \rightarrow M \neq 0$, $n \rightarrow \infty$, and

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{(T * \delta_n)(h)}{c(h)} \rightarrow M_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

where the limit is uniform for $n \in \mathbb{N}$.

Let us prove that (f) \Rightarrow (c) which is equivalent to (a). For every compact set $K \subset \mathbb{R}$ we have

$$\frac{(T * \delta_n)(x + h)}{c(h)} = \frac{(T * \delta_n)(x + h)}{c(x + h)} \frac{c(x + h)}{c(h)} \rightarrow M_n \exp(\alpha x), \quad h \rightarrow \infty,$$

uniformly for $x \in K$, because of $\frac{c(x+h)}{c(h)} \rightarrow \exp(\alpha x)$, $h \rightarrow \infty$, uniformly for $x \in K$ (see [6], p.82). Now, we shall prove that (a) does not imply (f). Assume $H \in C^0 \cap \mathcal{L}^1$ but is not bounded on \mathbb{R} ; this function has the S -asymptotic equal to zero related to 1 ([6], p. 104). For T we take $1 + H(t)$. Then,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} [(1 + H) * \delta_n](h) = \lim_{h \rightarrow \infty} \langle 1 + H(t + h), \check{\delta}_n(t) \rangle = \langle 1, \check{\delta}_n(t) \rangle = 1.$$

We have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(1 + H) * \delta_n](h) = 1 + H(h),$$

but the function $1 + H(h)$ has no limit at all, when $h \rightarrow \infty$.

2. We proved in [5] that the conditions of Th. 1 are equivalent to the following ones:

(g) The set $\{f(\cdot + h)/c(h); h \in \mathbb{R}\}$ is bounded in \mathcal{D}' and for some $\phi \in \mathcal{D}$, for which $\mathcal{F}(\phi \varepsilon^{-\alpha})(\xi) = \mathcal{L}[\phi](-\xi + i\alpha) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} (f * \phi)(h)/c(h) = M \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-\alpha t} dt, \quad M \neq 0,$$

where for $\mathcal{F}(\phi)$ we used in [5] $\int_{\mathbb{R}} e^{-i \cdot t} \phi(t) dt$.

We shall illustrate the usefulness of (g) by an example. Let $P(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ be a polynomial such that $P(-x + i\alpha) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. We say that a solution of a differential equation $P(D)U = F$ is *c*-bounded if the set $\{U(\cdot + h)/c(h); h \in \mathbb{R}\}$ is a bounded subset in \mathcal{D}' . Assertion (g) implies: *If F has the S-asymptotic related to c, then any c-bounded solution has also the S-asymptotic related to c.* Let us show that. We choose $\phi \in \mathcal{D}$ such that $\mathcal{L}[\phi](-x + i\alpha) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. For $\psi = P(D)\phi$ we have $\mathcal{L}[\psi](-x + i\alpha) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ and

$$(U * \psi)(h)/c(h) = ((P(D)U) * \phi)(h)/c(h), \quad h \geq h_0 > 0.$$

By (g) the assertion follows.

Note that the given example can be easily transferred to the many-dimensional case which is in fact more interesting.

3. Many properties of distributions and subspaces of distributions in Schwartz's theory can be derived from the corresponding regularizeds. An application of (b) is given in the next example. For the proof that every $T \in \mathcal{D}'_{\mathcal{L}^p}$, $1 \leq p < \infty$ has the *S*-asymptotic zero related to $c = 1$, we use the known fact that $f = (T * \varphi) \in \mathcal{L}^p$ for every $\varphi \in \mathcal{D}$. Then, for $\varphi \in \mathcal{D}$, $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$ we have

$$|(f(x+h), \varphi(x))| \leq \sup_{-a \leq x \leq a} |\varphi(x)| \int_{-a+h}^{a+h} |f(x)| dx \rightarrow 0, \quad h \rightarrow \infty.$$

In the sequential approach to the theory of distributions, a distribution T is defined by the class $[T * \delta_n]$ which corresponds to the fundamental sequence $\{T * \delta_n\}$, where $\{\delta_n\}$ is a δ -sequence ([1], p. 79). To define the *S*-asymptotic of a distribution in this approach, we can use (c) and (e) from Th. 1.

4. For the Abelian and Tauberian type theorems for integral transforms of distributions, the assertion (d) of Th. 1. may be useful (see, for example, [5] and [11]).

4. The quasiasymptotic at ∞

This notion is introduced by Zavalov and intensively studied by

Drožžinov, Vladimirov and Zavalov; see the monograph [12] and references there. By using it, the quoted authors have obtained comprehensive results in investigations of the Laplace transform and in applications in the quantum field theory. For the use of this notion in investigations of the Stieltjes transform we refer to [6].

Definition 2. It is said that $T \in S'_+$ has the quasiasymptotic (quasi asymptotic behaviour) at infinity related to some positive measurable function $c(k)$, $k \geq k_0$ if there exists $g \in \mathcal{D}'$, $g \neq 0$ such that for every $\phi \in \mathcal{D}$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \frac{T(kx)}{c(k)}, \phi(x) \right\rangle = \langle g, \phi \rangle.$$

Let us recall some properties of the quasiasymptotic behaviour of a $T \in S'_+$. The existence of the limit in Def. 2 implies that this limit also exists in S' and that $g(x) = Cf_{\alpha+1}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $C \neq 0$ and $c(k) = k^\alpha L(k)$, $k \geq k_0$. The most important result concerning the quasiasymptotic behaviour is the following Tauberian theorem of Drožžinov and Zavalov for the Laplace transform:

Theorem 2. [2]. Let $T \in S'_+$, $c(k) = k^\alpha L(k)$, $k \geq k_0$. The following statements are equivalent:

- (i)
$$\frac{T(kx)}{c(k)} \rightarrow Cf_{\alpha+1}, k \rightarrow \infty \text{ in } S', C \neq 0;$$
- (ii) (A) $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{c(1/y)} \tilde{T}(iy) = C$, $C \neq 0$; (B) there exist $D > 0$, $m \in \mathbb{N}$ and $r_0 > 0$ such that

$$\left| \frac{r}{c(1/r)} \tilde{T}(re^{i\varphi}) \right| \leq \frac{D}{\sin^m \varphi}, \quad 0 < r \leq r_0, \quad 0 < \varphi < \pi.$$

In the next theorem we give several equivalent statements but for $T \in S'_\alpha$.

Theorem 3. Let $T \in S'_\alpha$, $a \in \mathbb{R}$ and $c(k) = k^\alpha L(k)$, $k \geq k_0$. The following statements are equivalent:

- (a)
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T(k.)}{c(k)} = Cf_{\alpha+1}, \text{ in } \mathcal{D}', C \neq 0$$
- (b)
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T(k.+b)}{c(k)} = Cf_{\alpha+1}, \text{ in } S', \text{ for some } b \in \mathbb{R}; C \neq 0$$
- (c) (A) $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{c(1/y)} \tilde{T}(iy) = M \neq 0$; (B) there exist $D_1 > 0$, $m \in \mathbb{N}_0$ and $r_0 > 0$ such that

$$\left| \frac{r}{c(1/r)} \tilde{T}(re^{i\varphi}) \right| \leq \frac{D_1}{\sin^m \varphi}, \quad 0 < r \leq r_0, \quad 0 < \varphi < \pi.$$

(d) For every $\phi \in \mathcal{D}$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(T * \phi)}{c(k)} = M_\phi f_{\alpha+1}, \text{ in } \mathcal{D}'; \text{ where } M_\phi \neq 0 \text{ for some } \phi \in \mathcal{D}.$$

(e) There exists $\phi_0 \in \mathcal{D}$ with the property $\tilde{\phi}_0(0) \neq 0$ such that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(T * \phi_0)(k.)}{c(k)} = M_{\phi_0} f_{\alpha+1}, \text{ in } \mathcal{D}', \quad M_{\phi_0} \neq 0.$$

(f) For a δ -sequence $\{\delta_n\}$ there is a $C \neq 0$ such that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(T * \delta_n)(k.)}{c(k)} = C f_{\alpha+1}, \text{ in } \mathcal{D}', \text{ and uniformly for } n \in \mathbb{N}.$$

Proof. (a) \Rightarrow (b). We start with the relation

$$\left\langle \frac{T(kx+b)}{c(k)}, \phi(x) \right\rangle = \left\langle \frac{T(kx)}{c(k)}, \phi\left(x - \frac{b}{k}\right) \right\rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}.$$

The set $\{\phi(\cdot - \frac{b}{m}); m \geq 1\}$ is bounded in \mathcal{D} . By using the equivalence of the weak and strong sequential convergences in \mathcal{D}' and the fact that

$$\phi\left(\cdot - \frac{b}{k}\right) \rightarrow \phi, \quad k \rightarrow \infty, \text{ in } \mathcal{D},$$

we have

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \frac{T(kx+b)}{c(k)}, \phi(x) \right\rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \frac{T(kx)}{c(k)}, \phi\left(x - \frac{b}{k}\right) \right\rangle = \\ &= \left\langle C f_{\alpha+1}, \phi \right\rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

By Th. 3 in [12], p. 60, this limit holds also for $\varphi \in \mathcal{S}$.

(b) \Rightarrow (a). We have to repeat (a) \Rightarrow (b) but starting from the relation

$$\left\langle \frac{T(kx)}{c(k)}, \phi(x) \right\rangle = \left\langle \frac{T(ku+b)}{c(k)}, \phi\left(u + \frac{b}{k}\right) \right\rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}. \quad \diamond$$

Remark. If $T \in \mathcal{S}'_a$, then $T(\cdot + a) \in \mathcal{S}'_0 = \mathcal{S}'_+$. This implies: If $T \in \mathcal{E}'$, then there exists an $m \in \mathbb{N}_0$ such that T has the quasisymptotic related to $k^{-m-1}L(k)$ with the limit $\delta^{(m)}$, $k \rightarrow \infty$. This statement has been proved for $T \in \mathcal{E}' \cap \mathcal{S}'_+$ (see [6], p. 32).

(b) \Rightarrow (c). Since $T(\cdot + a) \in \mathcal{S}'$ and satisfies (i) of Th. 2, it satisfies (ii), as well. The Laplace transform of $T(\cdot + a)$ is $e^{-ia} \mathcal{L}[T]$; hence (A) and (B) in Th. 2 (ii) imply (A) and (B) in (c).

(c) \Rightarrow (a). If (c) is true for a $T \in S'_a$, it is true for $T(\cdot + a) \in S'_+$ and it implies Th. 2 (i) for $T(\cdot + a)$; hence (a) is true for T .

(c) \Rightarrow (d). For a $T \in S'_\alpha$ we have $T * \phi \in S'_b$, $b \in \mathbb{R}$. We shall show that $T * \phi$ satisfies (c). Then, it will follow that $T * \phi$ satisfies (a) and that T satisfies (d). First, we have

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{c(1/y)} \tilde{T}(yi) \tilde{\phi}(iy) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{c(1/y)} \tilde{T}(yi) \tilde{\phi}(0) = M_{\phi_{(0)}}.$$

Moreover, there exist $D_2 > 0$, $m \in \mathbb{N}_0$ and $r_0 > 0$ such that

$$\begin{aligned} & \left| \frac{r}{c(1/r)} \tilde{T}(re^{i\varphi}) \tilde{\phi}(re^{i\varphi}) \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{r}{c(1/r)} \tilde{T}(re^{i\varphi}) \right| \max_{\substack{0 < r \leq r_0 \\ 0 \leq \varphi < \pi}} \left| \tilde{\phi}(re^{i\varphi}) \right| \leq \frac{D_2}{\sin^m \varphi}. \end{aligned}$$

(d) \Rightarrow (e). Let $\phi_1 \in \mathcal{D}$ for which $M_{\phi_1} \neq (0)$ in (d). If $\tilde{\phi}_1(0) \neq 0$, then we take $\phi_0 = \phi_1$. If $\tilde{\phi}_1(0) = 0$, we take $\phi_0 = \phi_1 + \phi_2$ where ϕ_2 is an arbitrary element from \mathcal{D} with the properties $\tilde{\phi}_2(0) \neq 0$ and $M_{\phi_2} = 0$.

(e) \Rightarrow (a). The assumptions in (e) imply (a) and consequently (c) for $f * \phi_0$. Now, we have

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{c(1/y)} \tilde{T}(iy) \tilde{\phi}_0(iy) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{c(1/y)} \tilde{T}(iy) \tilde{\phi}_0(i0) = M \neq 0.$$

Taking care of the property $\tilde{\phi}_0(0) \neq 0$ we have

$$\left| \frac{r}{c(1/r)} \tilde{T}(re^{i\varphi}) \right| \leq \frac{D'}{\sin^{m'} \varphi},$$

where $0 < r \leq r'_0$, $0 \leq \varphi < \pi$ for appropriate r'_0 , D' and m' . This gives (c) for T and consequently (a).

(a) \Rightarrow (f). Let $\phi \in \mathcal{D}$ and $n \in \mathbb{N}$. Then

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{(T * \delta_n)(kx)}{c(k)}, \phi(x) \right\rangle &= \frac{1}{kc(k)} \left\langle (T * \delta_n)(x), \phi\left(\frac{x}{k}\right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{kc(k)} \left\langle T(x), \left(\check{\delta}_n * \phi\left(\frac{\cdot}{k}\right) \right)(x) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{c(k)} \left\langle T(kx), \int_{\mathbb{R}} \delta_n(-t) \phi\left(x - \frac{t}{k}\right) dt \right\rangle. \end{aligned}$$

The set

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}} \delta_n(-t) \phi \left(x - \frac{t}{m} \right) dt; \quad m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

is bounded in \mathcal{D} because of the properties of $\{\delta_n\}$. We have

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{T(kx)}{c(k)}, \int_{\mathbb{R}} \delta_n(-t) \phi \left(x - \frac{t}{m} \right) dt \right\rangle \rightarrow \\ & \rightarrow \left\langle Cf_{\alpha+1}, \left(\int_{\mathbb{R}} \delta_n(-y) dy \right) \phi \right\rangle = \left\langle Cf_{\alpha+1}, \phi \right\rangle, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

uniformly for $n \in \mathbb{N}$. This limit is a consequence of the inequality

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \frac{(T * \delta_n)(kx)}{c(k)}, \phi(x) \right\rangle - \left\langle Cf_{\alpha+1}, \phi \right\rangle \right| \leq \\ & \leq \left| \left\langle \frac{T(kx)}{c(k)}, \int_{\mathbb{R}} \delta_n(-t) \phi \left(x - \frac{t}{k} \right) dt \right\rangle - \right. \\ & \quad \left. - \left\langle Cf_{\alpha+1}(x), \int_{\mathbb{R}} \delta_n(-t) \phi \left(x - \frac{t}{k} \right) dt \right\rangle \right| + \\ & \quad + \left| \left\langle Cf_{\alpha+1}(x), \int_{\mathbb{R}} \delta_n(-t) \phi \left(x - \frac{t}{k} \right) dt \right\rangle - \left\langle Cf_{\alpha+1}, \phi \right\rangle \right|. \end{aligned}$$

(f) \Rightarrow (e). Since $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, we can find an n_0 such that $\tilde{\delta}_{m_0}(0) \neq 0$. This implies that (e) holds. \diamond

Comments for Theorem 3. Similar comments as for the S -asymptotic, hold for the quasiasymptotic, as well. Moreover, the use of the quasiasymptotic is more powerfull (see [12], [13], [6]). Note only that the results given in [12] for the convolution equations of elements from S'_+ also hold for elements of S'_a .

References

- [1] ANTOSIK, P., MIKUSINSKI, J. and SIKORSKI, R.: Theory of distributions, The sequential approach, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1973.

- [2] DROŽŽINOV, YU. N. and ZAVIALOV, B. I.: Quasiasymptotic of generalized functions and Tauberian theorems in the complex domain, *Math. Sb. T.* 102 (1977), 372-390 (in Russian).
- [3] HÖRMANDER, L.: Linear partial differential operators, Springer, Berlin, 1963.
- [4] PILIPOVIĆ, S.: The translation asymptotic and the quasiasymptotic behaviour of distributions, *Acta Math. Hung.* 55/3-4 (1990), 239-243.
- [5] PILIPOVIĆ, S. and STANKOVIĆ, B.: Wiener Tauberian Theorems for Distributions, *J. London Math. Soc.* (to appear).
- [6] PILIPOVIĆ, S., STANKOVIĆ, B. and TAKAČI, A.: Asymptotic Behaviour and Stieltjes Transformation of Distributions, Teubner, Leipzig, 1990.
- [7] RUBEL, L. A., SQUIRES W. A. and TAYLOR, B. A.: Irreducibility of certain entire functions with applications to harmonic analysis, *Ann. Math.* 108 (1978), 553-657.
- [8] SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions, Vol. I,II, Herman, Paris, 1950-1951.
- [9] SENETA, E.: Regularly Varying Functions, Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [10] STANKOVIĆ, B.: A structural theorem for distributions having S -asymptotic, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)* 45 (1989), 35-40.
- [11] STANKOVIĆ, B.: Abelian Theorem for the Stieltjes Transform of Distributions, *Internat. J. Math. and Math. Sci.* 13/4 (1990), 677-686.
- [12] VLADIMIROV, V. S., DROŽŽINOV, YU. N. and ZAVIALOV, B. I.: Tauberian Theorems for Generalized Functions, Kluwer Academic Publishers, Maine, 1988.
- [13] WAGNER, P.: On the Quasiasymptotic Expansion of the Causal Fundamental Solution of Hyperbolic Operators and Systems, *ZAA* 10 (1991), 159-167.

WELL – CHAINEDNESS CHARACTERIZATIONS OF CONNECTED RELATORS

János Kurdics

Department of Mathematics, György Bessenyei College, H-4401 Nyíregyháza, Pf: 166, Hungary

Árpád Száz

Institute of Mathematics, Lajos Kossuth University, H-4010 Debrecen, Pf. 12, Hungary

Received December 1990

AMS Subject Classification: 54 E 15 , 54 D 05

Keywords: Generalized uniformities, connectedness, well-chainedness, symmetrizations

Abstract: We show that the properties of uniform, proximal and topological connectedness of a relator (generalized uniformity) can be characterized in terms of the well-chainedness of some of its natural symmetrizations.

1. Introduction

In [8], Mrówka and Pervin proved that a uniformity is uniformly (proximally) connected if and only if it is well-chained.

Moreover, in [5], Levine proved that a uniformity \mathcal{U} on X is well-chained if and only if X^2 is the only equivalence in \mathcal{U}

Now, as some natural extensions of the above results, we prove that a relator (i.e., a generalized uniformity) \mathcal{R} is uniformly, resp. proximally connected if and only if the relators $\mathcal{R}\nabla\mathcal{R}^{-1}$ ($\mathcal{R}\odot\mathcal{R}^{-1}$) resp. $\mathcal{R}\vee\mathcal{R}^{-1}$ ($\mathcal{R}\circ\mathcal{R}^{-1}$) are well-chained. Moreover, a relator \mathcal{R} on X is

uniformly, proximally and topologically connected if and only if X^2 is the only equivalence in, \mathcal{R}^* , $\mathcal{R}^\#$ and $\hat{\mathcal{R}}$, respectively.

The necessary prerequisites concerning relators, which are possibly unfamiliar to the reader, are briefly laid out in the next three preparatory sections.

2. A few basic facts on relators

If \mathcal{R} is a nonvoid family of reflexive relations on a set X , then \mathcal{R} is called a *relator* on X , and the pair $(\mathcal{R}) = (X, \mathcal{R})$ is called a *relator space* [10].

If A and B are sets and x is a point in a relator space $X(\mathcal{R})$, then we write

- (i) $B \in \text{Int}_{\mathcal{R}}(A)$ ($B \in \text{Cl}_{\mathcal{R}}(A)$) if $R(B) \subset A$ ($R(B) \cap A \neq \emptyset$) for some (all) $R \in \mathcal{R}$;
- (ii) $x \in \text{int}_{\mathcal{R}}(x \in \text{cl}_{\mathcal{R}}(A))$ if $\{x\} \in \text{Int}_{\mathcal{R}}(A)$ ($\{x\} \in \text{Cl}_{\mathcal{R}}(A)$).

If \mathcal{R} is a relator on X , then the relators

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^* &= \{S \subset X^2 : \exists R \in \mathcal{R} : R \subset S\}, \\ \mathcal{R}^\# &= \{S \subset X^2 : \forall A \subset X : \exists R \in \mathcal{R} : R(A) \subset S(A)\}\end{aligned}$$

and

$$\hat{\mathcal{R}} = \{S \subset X^2 : \forall x \subset X : \exists R \in \mathcal{R} : R(x) \subset S(x)\}$$

are called the *uniform*, *proximal* and *topological refinements* of \mathcal{R} , respectively.

Namely, for instance, $\mathcal{R}^\#$ and $\hat{\mathcal{R}}$ are the largest relators on X such that $\text{Int}_{\mathcal{R}^\#} = \text{Int}_{\mathcal{R}}$ and $\text{int}_{\hat{\mathcal{R}}} = \text{int}_{\mathcal{R}}$, respectively.

Finally, if \mathcal{R} is a relator, then the relator $\mathcal{R}^{-1} = \{R^{-1} : R \in \mathcal{R}\}$ is called the *inverse* of \mathcal{R} , and the relators

$$\mathcal{R} \vee \mathcal{R}^{-1} = \{R \cup R^{-1} : R \in \mathcal{R}\} \quad (\mathcal{R} \odot \mathcal{R}^{-1} = \{R \circ R^{-1} : R \in \mathcal{R}\})$$

and

$$\mathcal{R} \vee \mathcal{R}^{-1} = \{R \cup S^{-1} : R, S \in \mathcal{R}\} \quad (\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} = \{R \circ S^{-1} : R, S \in \mathcal{R}\})$$

are called the *strong* and *proper union (composition) symmetrizations* of \mathcal{R} , respectively.

3. Proximally and topologically open sets

Definition 3.1. A subset A of a relator space $X(\mathcal{R})$ is called

- (i) *proximally open (closed)* if $A \in \text{Int}_{\mathcal{R}}(A)$ ($X \setminus A \notin \text{Cl}_{\mathcal{R}}(A)$);

- (ii) *topologically open (closed)* if $A \subset \text{int } \mathcal{R}(A)$ ($\text{cl } \mathcal{R}(A) \subset A$);
- (iii) *proximally (topologically) clopen* if it is both proximally (topologically) closed and open.

Remark 3.2. It is easy to see that a proximally open (closed) set is topologically open (closed). Moreover, a set is proximally (topologically) closed if and only if its complement is proximally (topologically) open.

Definition 3.3. A relator \mathcal{R} on X , or a relator space $X(\mathcal{R})$, is called *proximally symmetric* if $\mathcal{R}^{-1} \subset \mathcal{R}^\#$.

Remark 3.4. In [12], it has been proved that a relator \mathcal{R} is proximally symmetric if and only if the relation $\text{Cl } \mathcal{R}$ is symmetric. Hence, it is clear that a subset of a proximally symmetric relator space is proximally closed if and only if its complement is proximally closed.

Therefore, as an immediate consequence of the second assertions of Remarks 3.2 and 3.4, we can also state

Proposition 3.5. *A subset of a proximally symmetric relator space is proximally open (closed) if it is proximally clopen.*

4. Connected and well-chained relators

Definition 4.1. A relator \mathcal{R} on a set X is called *connected (well-chained)* if

$$A^2 \cup (X \setminus A)^2 \notin \mathcal{R} \quad \left(X^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \right)$$

for all $\emptyset \neq A \subsetneq X$ ($R \in \mathcal{R}$). Moreover, \mathcal{R} is called *uniformly, proximally and topologically connected (well-chained)* if the relators \mathcal{R}^* , $\mathcal{R}^\#$ and $\hat{\mathcal{R}}$ are connected (well-chained), respectively.

The appropriateness of these unusual definitions and the validity of the next fundamental theorems have been established in [2] and [3].

Theorem 4.2. *A relator \mathcal{R} on X is proximally (topologically) connected if no proper nonvoid subset of $X(\mathcal{R})$ is proximally (topologically) clopen.*

Remark 4.3. In [2], it has also been proved that a uniformly directed relator is proximally connected if and only if it is uniformly connected.

Theorem 4.4. *A relator \mathcal{R} on X is well-chained (topologically well-chained) if and only if no proper nonvoid subset of $X(\mathcal{R})$ is proximally (topologically) open.*

Remark 4.5. Hence, it is easy to infer that a relator is well-chained if and only if it is uniformly (proximally) well-chained.

From Th. 4.2 and 4.4, by Prop. 3.5, it is clear that we also have
Theorem 4.6. *A proximally symmetric relator is well-chained if and only if it is proximally connected.*

Remark 4.7. By Th. 4.2 and 4.4, it is also clear that a well-chained (topologically well-chained) relator is always proximally (topologically) connected.

5. Well-chainedness characterizations of uniform connectedness

To easily get the main result of this section, we need only prove
Proposition 5.1. *If \mathcal{R} is a relator on X and $A \subset X$, then the following assertions are equivalent:*

(i) $E_A = A^2 \cup (X \setminus A)^2 \in \mathcal{R}^*$;

(ii) A is a proximally open subset of $X(\mathcal{R} \nabla \mathcal{R}^{-1}) : (X(\mathcal{R} \odot \mathcal{R}^{-1}))$.

Proof. If (i) holds, then there exists an $R \in \mathcal{R}$ such that $R \subset E_A$. Hence, since E_A is an equivalence on X such that $E_A(A) = A$, it is clear that

$$(R \cup R^{-1})(A) \subset A \quad \text{and} \quad (R \circ R^{-1})(A) \subset A.$$

Therefore, (ii) also holds.

Conversely, if (ii) holds, then there exists an $R \in \mathcal{R}$ such that

$$(R \cup R^{-1})(A) \subset A \quad ((R \circ R^{-1})(A) \subset A).$$

Hence (since R and R^{-1} are reflexive), it is clear that $R(A) \subset A$ and $R^{-1}(A) \subset A$. Moreover, it is easy to see that the latter inclusion implies that $R(X \setminus A) \subset X \setminus A$. Therefore, we obviously have $R \subset E_A$, and thus (i) also holds. \diamond

Remark 5.2. Because of Prop. 3.5, we may write "proximally clopen" in place of "proximally open" in the above proposition.

Now, as an immediate consequence of Def. 4.1, Th. 4.4 and Prop. 5.1, we can also state

Theorem 5.3. *If \mathcal{R} is a relator on X , then the following assertions are equivalent:*

(i) \mathcal{R} is uniformly connected;

(ii) $\mathcal{R} \nabla \mathcal{R}^{-1} (\mathcal{R} \odot \mathcal{R}^{-1})$ is well-chained.

Hence, because of the equalities $(\mathcal{R}^\square)^* = \mathcal{R}^\square$, where $\square \in \{*, \#, \wedge\}$, it is clear that we also have

Corolary 5.4. *A relator \mathcal{R} is uniformly, proximally, resp. topologically connected if and only if the relators*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^* \nabla (\mathcal{R}^*)^{-1}, \quad \mathcal{R}^\# \nabla (\mathcal{R}^\#)^{-1}, \quad \text{resp. } \hat{\mathcal{R}} \nabla (\hat{\mathcal{R}})^{-1} \\ (\mathcal{R}^* \odot (\mathcal{R}^*)^{-1}, \quad \mathcal{R}^\# \odot (\mathcal{R}^\#)^{-1}, \quad \text{resp. } \hat{\mathcal{R}} \odot (\hat{\mathcal{R}})^{-1}) \end{aligned}$$

are well-chained.

Remark 5.5. Because of Th. 4.6, we may write “proximally connected” in place of “well-chained” in the above assertions.

6. An application of Theorem 5.3

In [3], as an analogue of Levine’s [5, Th. 2.2], we have also proved

Theorem 6.1. *If \mathcal{R} is a relator on X , then the following assertions are equivalent:*

- (i) \mathcal{R} is well-chained;
- (ii) X^2 is the only preorder in \mathcal{R}^* .

Hence, because of the equalities $(\mathcal{R}^\square)^* = \mathcal{R}^\square$, where $\square \in \{\#, \wedge\}$ and Remark 4.5, it is clear that we also have

Corollary 6.2. *A relator \mathcal{R} on X is well-chained (topologically well-chained) if and only if X^2 is the only preorder in $\mathcal{R}^\#$ ($\hat{\mathcal{R}}$).*

Moreover, from Th. 6.1, by using Th. 5.3, we can also easily derive

Theorem 6.3. *If \mathcal{R} is a relator on X , then the following assertions are equivalent:*

- (i) \mathcal{R} is uniformly connected;
- (ii) X^2 is the only equivalence in \mathcal{R}^* .

Proof. If (i) holds, then by Cor. 5.4, $\mathcal{R}^* \nabla (\mathcal{R}^*)^{-1}$ is well-chained. Therefore, by Th. 6.1, X^2 is the only preorder in $(\mathcal{R}^* \nabla (\mathcal{R}^*)^{-1})^*$. Moreover, if E is an equivalence in \mathcal{R}^* , then since $E = E \cup E^{-1}$, E is a preorder in $\mathcal{R}^* \nabla (\mathcal{R}^*)^{-1}$. Therefore, by the above observation, $E = X^2$. Consequently, (ii) also holds.

To prove the converse implication, note that if $A \subset X$, then $E_A = A^2 \cup (X \setminus A)^2$ is an equivalence on X . Therefore, if (ii) holds, then $E_A \in \mathcal{R}^*$ implies $E_A = X^2$, i.e., $A = \emptyset$ or $A = X$. Consequently, (i) also holds. \diamond

From Th. 6.3, because of the equalities $(\mathcal{R}^\square)^* = \mathcal{R}^\square$, where $\square \in \{\#, \wedge\}$, it is clear that we also have

Corollary 6.4. *A relator \mathcal{R} is proximally (topologically) connected if and only if X^2 is the only equivalence in $\mathcal{R}^\#$ ($\hat{\mathcal{R}}$).*

7. Well-chainedness characterizations of proximal connectedness

As an analogue of Prop 5.1, we can also prove

Proposition 7.1. *If \mathcal{R} is a relator on X and $A \subset X$, then the following assertions are equivalent:*

- (i) A is a proximally clopen subset of $X(\mathcal{R})$;
- (ii) A is a proximally open subset of $X(\mathcal{R} \vee \mathcal{R}^{-1})$ ($X(\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1})$).

Proof. If (i) holds, then there exist $R, S \in \mathcal{R}$ such that $R(A) \subset A$ and $S(X \setminus A) \subset X \setminus A$. Moreover, the latter inclusion implies that $S^{-1}(A) \subset A$. Hence, it is clear that

$$(R \cup S^{-1})(A) = R(A) \cup S^{-1}(A) \subset A$$

and

$$(R \circ S^{-1})(A) = R(S^{-1}(A)) \subset A.$$

Therefore, (ii) also holds.

Conversely, if (ii) holds, then there exist $R, S \in \mathcal{R}$ such that

$$(R \cup S^{-1})(A) \subset A \quad ((R \circ S^{-1})(A) \subset A).$$

Hence (since R and S are reflexive), it is clear that $R(A) \subset A$ and $S^{-1}(A) \subset A$. Moreover, the latter inclusion implies that $S(X \setminus A) \subset X \setminus A$. Therefore, (i) also holds. \diamond

Remark 7.2. Because of Prop. 3.5, we may again write "proximally clopen" in place of "proximally open" in the above proposition.

Now, as an immediate consequence of Th. 4.2. and 4.4 and Prop. 7.1, we can also state

Theorem 7.3. *If \mathcal{R} is a relator on X , then the following assertions are equivalent:*

- (i) \mathcal{R} is proximally connected;
- (ii) $\mathcal{R} \vee \mathcal{R}^{-1}$ ($\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$) is well-chained.

Hence, because of the equalities $(\mathcal{R}^\square)^\# = \mathcal{R}^\square$, where $\square \in \{\#, \wedge\}$, it is clear that we also have

Corollary 7.4. *A relator \mathcal{R} is proximally, resp. topologically connected if the relators $\mathcal{R}^\# \vee (\mathcal{R}^\#)^{-1}$, resp. $\hat{\mathcal{R}} \vee (\hat{\mathcal{R}})^{-1}$ ($\mathcal{R}^\# \circ (\mathcal{R}^\#)^{-1}$, resp. $\hat{\mathcal{R}} \circ (\hat{\mathcal{R}})^{-1}$) are well-chained.*

Remark 7.5. Because of Th. 4.6, we may again write "proximally connected" in place of "well-chained" in the above assertions.

8. An application of Theorem 7.3

The advantage of the relator $\mathcal{R} \vee \mathcal{R}^{-1}$ over $\mathcal{R} \nabla \mathcal{R}^{-1}$ lies mainly in the next

Proposition 8.1. *If \mathcal{R} is a relator on X and $\square \in \{*, \#\}$, then*

$$(\mathcal{R} \vee \mathcal{R}^{-1})^\square = \mathcal{R}^\square \cap (\mathcal{R}^\square)^{-1}.$$

Proof. It is easy to see that

$$(\mathcal{R} \vee \mathcal{S})^\square = \mathcal{R}^\square \cap \mathcal{S}^\square,$$

whenever \mathcal{S} is also a relator on X . Moreover, in [12], it has been proved that

$$(\mathcal{R}^{-1})^\square = (\mathcal{R}^\square)^{-1}$$

is also true. \diamond

Remark 8.2. Hence, because of the equalities $(\mathcal{R}^\square)^\square = \mathcal{R}^\square$, it is clear that

$$(\mathcal{R}^\square \vee (\mathcal{R}^\square)^{-1})^\square = (\mathcal{R} \vee \mathcal{R}^{-1})^\square = (\mathcal{R}^\square \cap (\mathcal{R}^\square)^{-1})^\square,$$

whenever $\square \in \{*, \#\}$.

Now, by using the first parts of Remark 4.5 and Prop. 8.1, from Th. 7.3 we can also easily get

Theorem 8.3. *If \mathcal{R} is a relator on X , then the following assertions are equivalent:*

- (i) \mathcal{R} is proximally connected;
- (ii) $\mathcal{R}^* \cap (\mathcal{R}^*)^{-1}$ is well-chained.

Hence, because of the equalities $(\mathcal{R}^\square)^\# = \mathcal{R}^\square$ and $(\mathcal{R}^\square)^* = \mathcal{R}^\square$, where $\square \in \{\#, \wedge\}$, it is clear that we also have

Corollary 8.4. *A relator \mathcal{R} is proximally (topologically) connected if and only if the relator $\mathcal{R}^\# \cap (\mathcal{R}^\#)^{-1}$ ($\hat{\mathcal{R}} \cap (\hat{\mathcal{R}})^{-1}$) is well-chained.*

Remark 8.5. Because of Th. 4.6, we may again write “proximally connected” in place of “well-chained” in the above assertions.

9. A few supplementary notes

Note 9.1. Analogously to Prop. 5.1 and 7.1, we can also prove that a subset A of a relator space $X(\mathcal{R})$ is proximally open if and only if the Davis-Pervin relation $R_A = A^2 \cup (X \setminus A) \times X$ belongs to \mathcal{R}^* . Therefore, as an important addition to Th. 6.1, we can also state that a relator \mathcal{R} on X is well-chained if and only if X^2 is the only Davis-Pervin relation in \mathcal{R}^* .

Note 9.2. In addition to Prop. 5.1 and 5.7, it is also worth mentioning that

$$\mathcal{R} \odot \mathcal{R}^{-1} \subset (\mathcal{R} \nabla \mathcal{R}^{-1})^* \quad \text{and} \quad \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} \subset (\mathcal{R} \vee \mathcal{R}^{-1})^*.$$

But, despite this and Prop. 5.1 and 5.7, the corresponding relators need not even have the same topologically open sets. Namely, for instance, if $X = \{1, 2, 3\}$ and $R, S \subset X^2$ such that

$$R(1) = \{1\}, \quad R(2) = \{2, 3\}, \quad R(3) = \{2, 3\},$$

$$S(1) = X, \quad S(2) = \{2\}, \quad S(3) = \{3\},$$

then $\mathcal{R} = \{R, S\}$ is a relator on X such that

$$\mathcal{T}_{\mathcal{R} \odot \mathcal{R}^{-1}} = \mathcal{T}_{\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, X\},$$

but

$$\mathcal{T}_{\mathcal{R} \nabla \mathcal{R}^{-1}} = \mathcal{T}_{\mathcal{R} \vee \mathcal{R}^{-1}} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}.$$

Note 9.3. In a continuation of [12], the second author proved that a relator (topological relator) \mathcal{R} is weakly symmetric if and only if the relator $\hat{\mathcal{R}} \cap (\hat{\mathcal{R}})^{-1}$ ($\hat{\mathcal{R}} \circ (\hat{\mathcal{R}})^{-1}$) is topologically equivalent to \mathcal{R} . Therefore, as an important addition to Cors. 8.4 and 7.4, we can also state that a weakly symmetric relator (weakly symmetric topological relator) \mathcal{R} is topologically connected if and only if the relator $\hat{\mathcal{R}} \cap (\hat{\mathcal{R}})^{-1}$ ($\hat{\mathcal{R}} \circ (\hat{\mathcal{R}})^{-1}$) is topologically connected.

To feel the importance of the above statements, note that if \mathcal{R} is a relator on X , then $\hat{\mathcal{R}} \cap (\hat{\mathcal{R}})^{-1}$ ($(\hat{\mathcal{R}} \circ (\hat{\mathcal{R}})^{-1})^*$) is the family of all semi-neighbourhood (neighbourhoods) of the diagonal of X^2 .

References

- [1] JAMES, I. M.: Topological and Uniform Spaces, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [2] KURDICS, J. and SZÁZ, Á.: Connected relator spaces, *Publ. Math. (Debrecen)* 40 (1992), 155–164.
- [3] KURDICS, J. and SZÁZ, Á.: Well-chained relator spaces, *Kyungpook Math. J.* 32 (1992), 263–271.
- [4] KURDICS, J., MALA, J. and SZÁZ, Á.: Connectedness and well-chainedness properties of symmetric covering relators, *P.U. M. A. Ser. B 2* (1991), 189–197.
- [5] LEVINE, N.: Well-chained uniformities, *Kyungpook Math. J.* 11 (1971), 143–149.
- [6] LUBKIN, S.: Theory of covering spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 104 (1962), 205–338.
- [7] MALA, J.: Relators generating the same generalized topology, *Acta Math. Hungar.* 60 (1992), 291–297.

- [8] MRÓWKA, S.G. and PERVIN, W. J.: On uniform connectedness, *Proc. Amer. Math. Soc.* 15 (1964), 446—449.
- [9] SIEBER, J. L. and PERVIN, W. J.: Connectedness in syntopogenous spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 15 (1964), 590–595.
- [10] SZÁZ, Á.: Basic tools and mild continuities in relator spaces, *Acta Math. Hungar.* 50 (1987), 177–201.
- [11] SZÁZ, Á.: Directed, topological and transitive relators, *Publ. Math. (Debrecen)* 35 (1988), 179–196.
- [12] SZÁZ, Á.: Inverse and symmetric relators, *Acta Math. Hung.* 60 (1992), 157–176.
- [13] WHYBURN, G. and EDWIN, D.: *Dynamic Topology*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

GEOMETRISCH – FUNKTIONEN – THEORETISCHE LÖSUNG EINES EXTREMALPROBLEMS DER KON- FORMEN ABBILDUNG III

Reiner Kühnau

*Fachbereich Mathematik, Martin-Luther-Universität Halle-Wit-
tenberg, D-0-4010 Halle an der Saale, Universitätsplatz, Deutsch-
land*

Received August 1991

AMS Subject Classification: 30 C 70, 30 C 75

Keywords: Conformal mapping of multiply connected domains, extremal problems, geometric functionals

Abstract: We consider extremal problems for schlicht conformal mappings of multiply connected domains. The functionals are of geometric type as simple distances. We also give some open problems.

1. Aufgabenstellung

Im Anschluß an [6] werden hier Extremalprobleme für schlichte konforme Abbildungen betrachtet, bei denen die Funktionale geometrische Größen sind, wie z.B. gewöhnliche Abstände (Extremalprobleme verwandter Tendenz z.B. in [3], [4], [7]). Zur besseren Einordnung und Übersicht und zum Anschluß an die vorangehenden Mitteilungen [6] holen wir zunächst etwas weiter aus und stellen auch einige ungelöste Probleme dar.*

*Über vorliegende Thematik hielt der Autor am 11. 12. 1990 einen Vortrag an der TU Berlin.

Es sei $\mathcal{G} \ni \infty$ ein Gebiet der komplexen z -Ebene mit den Randkomponenten $R_1, \dots, R_k, R'_1, \dots, R'_\ell$ ($k, \ell \geq 1$) sowie S_1, \dots, S_m ($m \geq 0$), wobei letztere fehlen können (dann $m = 0$). Betrachtet wird die Klasse der in Umgebung von $z = \infty$ durch

$$(1) \quad f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

hydrodynamisch normierten schlichten konformen Abbildungen $w = f(z)$ von \mathcal{G} . Jeder Abbildung werden die Funktionale

$$(2) \quad \alpha(f) = \min |f(z) - f(z')|, \quad \mathcal{A}(f) = \max |f(z) - f(z')|$$

zugeordnet, wobei z die Vereinigung von R_1, \dots, R_k durchläuft, z' die Vereinigung von R'_1, \dots, R'_ℓ .

Problem I. Man bestimme diejenigen Abbildungen $f(z)$ mit

$$(3) \quad \text{a) } \alpha(f) \rightarrow \max, \quad \text{b) } \mathcal{A}(f) \rightarrow \min.$$

Eine allgemeine Lösung hierfür ist nicht in Sicht, selbst nicht für den schon in [6a] formulierten und auf H. Grötzsch zurückgehenden Spezialfall $k = \ell = 1, m = 0$. Ca. 1969 äusserte U. Pirl im Gespräch die Vermutung, daß für diesen Spezialfall bei einer Extremalabbildung $f(R_1)$ und $f(R'_1)$ zu einem gewissen Punkt w^* konzentrische Kreisbogenschlitze sind, die im gleichen Winkelraum mit Scheitel in w^* liegen, dabei die Endpunkte der Kreisbogenschlitze auf den Randstrahlen.

Dagegen ist die Lösung der dualen Extremalprobleme

$$\alpha(f) \rightarrow \min, \quad \mathcal{A}(f) \rightarrow \max$$

leicht sofort aus Resultaten von H. Grötzsch (vgl. [2], Th. 6.6 und 6.8) zu folgern: Man betrachte dieses Extremalproblem für alle Kombinationen R_i, R'_j (d.h. in (2) durchlaufe z nur ein festes R_1 , z' nur ein festes R'_j).

Allerdings ist die Lösung des Extremalproblems (3) im einfachsten nichttrivialen Spezialfalle bekannt: $k = \ell = 1, m = 0$ und eine Randkomponente, z.B. R'_1 , punktförmig. Nach K. Löwner [10] ist im Extremalfalle dann $f(R_1)$ ein zu $f(R'_1)$ konzentrischer Kreisbogenschlitz.

Im anschließenden Falle (von D. Gaier August 1988 als Problem brieflich formuliert) $\ell = 1, k > 1, R'_1$ punktförmig, ergibt sich in einigen Fällen von Gebieten \mathcal{G} nach [6a] die Lösung zum Extremalproblem (3) so. Wenn z.B. dann die sich nach [6a] einstellende Lösung $f(z)$ des Extremalproblems

$$(4) \quad \min_{z \in R_1} |f(z) - f(R'_1)| \rightarrow \max$$

die Eigenschaft hat, daß $f(R_2), \dots, f(R_k)$ zu $f(R'_1)$ einen nicht kleineren Abstand haben als $f(R_1)$ (= Kreisbogen), dann ist dieses $f(z)$ auch

Lösung von Problem I a). Grob und allgemeiner gesprochen ergibt sich also in diesem Falle $\ell = 1$ und $R'_1 =$ punktförmig die Lösung zu Problem I a) (entsprechendes bei Problem I b)), wenn eine der Randkomponenten R_1, \dots, R_k "deutlich näher" zum Punkt R'_1 liegt, als die übrigen (das läßt sich natürlich mit allgemeinen Verzerrungssätzen zu einer hinreichenden a priori-Bedingung für \mathfrak{G} präzisieren).

Wenn andererseits \mathfrak{G} die punktförmige Randkomponente R'_1 und außerdem nur die Randkomponenten R_1, \dots, R_k besitzt ($k \geq 2, \ell = 1, m = 0$) und bei der hydrodynamisch normierten schlichten konformen Abbildung $f^*(z)$, bei der $f^*(R_1), \dots, f^*(R_k)$ zu $f^*(R'_1)$ konzentrische Kreisbogenschlitze werden, deren Radien zufällig gleich sind, dann ist dieses $f^*(z)$ Extremalfunktion zu Problem I a) und I b). Das ergibt sich wie üblich durch Anwendung des Argumentprinzips auf

$$\log \frac{f(z) - f(R'_1)}{f^*(z) - f^*(R'_1)},$$

wenn $f(z)$ eine Vergleichsabbildung ist.

Durch einen Grenzübergang, bei dem R'_1, \dots, R'_ℓ ins unendlich Ferne geschoben werden, ergibt sich aus Problem I folgendes Extremalproblem das wir nun hinfürder genauer (allerdings auch nur in Spezialfällen) studieren wollen.

Das Gebiet $\mathfrak{G} \ni \infty$ besitze jetzt also nur die Randkomponenten R_1, \dots, R_k ($k \geq 1$) und S_1, \dots, S_m ($m \geq 0$). Betrachtet wird wieder die Klasse der hydrodynamisch normierten schlichten konformen Abbildungen $w = f(z)$ von \mathfrak{G} . Jeder Abbildung werden die Funktionale

$$(5) \quad \mathfrak{b}(f) = \min \Re f(z), \quad \mathfrak{B}(f) = \max \Re f(z)$$

zugeordnet, wobei z die Vereinigung von R_1, \dots, R_k durchläuft.

Problem II. Man bestimme diejenigen Abbildungen $f(z)$ mit

$$(6) \quad \text{a) } \mathfrak{b}(f) \rightarrow \max, \quad \text{b) } \mathfrak{B}(f) \rightarrow \min.$$

Wir beschränken uns auf Problem II a), da II b) offenbar äquivalent ist. Die Lösung von Problem II a) ist für $k = 1$ in [6b] geometrisch-funktionentheoretisch angegeben (und natürlich speziell für punktförmiges R_1 schon nach H.Grötzsch bekannt — vgl. [2], Th. 6.12) und ergibt sich für $k \geq 2$ in einigen Fällen von Gebieten \mathfrak{G} nach [6b] so. Wenn z.B. die sich nach [6b] einstellende Lösung $f(z)$ zum Extremalproblem

$$(7) \quad \min_{z \in R_1} \Re f(z) \rightarrow \max$$

die Eigenschaft hat, daß $f(R_1), \dots, f(R_k)$ einen nicht kleineren mi-

nimalen Realteil haben als $f(R_1)$ (= zur imaginären Achse parallele Strecke), dann ist dieses $f(z)$ auch Lösung von Problem II a). Grob und allgemeiner gesprochen ergibt sich also in diesem Falle die Lösung zu Problem II a), wenn eine der Randkomponenten R_1, \dots, R_k deutlich "weiter links" liegt als die übrigen (das läßt sich wieder mit allgemeinen Verzerrungssätzen zu einer hinreichenden a priori-Bedingung für \mathfrak{G} präzisieren).

Wenn andererseits $m = 0$ ist und bei der hydrodynamisch normierten schlichten konformen Parallelschlitzabbildung $f^{**}(z)$ von \mathfrak{G} , bei der $f^{**}(R_1), \dots, f^{**}(R_k)$ zur imaginären Achse parallele Strecke werden, diese Strecken zufällig alle auf der gleichen Parallelen zur imaginären Achse liegen, dann ist dieses $f^{**}(z)$ Extremalfunktion zu Problem II a) (und II b)). Das ergibt sich wieder durch eine Anwendung des Argumentprinzips auf

$$f(z) - f^{**}(z),$$

wenn $f(z)$ eine Vergleichsabbildung ist.

In dieser Mitteilung soll nun Problem II a) behandelt werden für den Fall $k = 2$, $m > 0$, wobei R_1 und R_2 punktförmig sind und jetzt z_1 und z_2 genannt seien. Natürlich seien nicht alle S_1, \dots, S_m punktförmig. Sei also jetzt $\mathfrak{G} \ni \infty$ berandet von S_1, \dots, S_m und den punktförmigen Randkomponenten z_1, z_2 . Dann haben wir also das **Problem II***. Unter allen hydrodynamisch normierten schlichten konformen Abbildungen $f(z)$ von \mathfrak{G} bestimme man diejenigen mit

$$(8) \quad \mathfrak{b}(f) = \min(\Re w_1, \Re w_2) \rightarrow \max,$$

wenn $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$ gesetzt wird.

Unser Ziel ist der

Satz. a) *Problem II* besitzt mindestens eine Lösung. Bei jeder Lösung $w = f_*(z)$ sind die Bildrandkomponenten $f_*(S_1), \dots, f_*(S_m)$ Schlitze auf der Schar der Trajektorien eines quadratischen Differentials der Form*

$$(9) \quad \Omega(w)dw^2 = -\frac{w - w_0}{(w - w_1)(w - w_2)}dw^2.$$

Dabei ist entweder (Fall 1) w_0 gleich w_1 oder w_2 , oder es gilt (Fall 2) $\Re w_1 = \Re w_2$ mit einem gewissen w_0 , welches evtl. $= \infty$ ist, in welcher letzterem Falle der Zähler in (9) sinngemäß durch eine Konstante $\neq 0$ zu ersetzen ist.

b) *Bei mindestens einer Lösung von Problem II* liegt darüber hinaus w_0 auf der offenen Verbindungsstrecke von w_1 und w_2 (im Falle 2).*

Im Falle 1 liegt also eine Parabelschlitzabbildung vor, da dann durch die Trajektorien von (9) konfokale Parabeln definiert werden, deren gemeinsame Brennnachse in Richtung der negativ reellen Achse zeigt und z.B. für $w_0 = w_2$ in w_1 startet. Der Übergang von hier zum Falle 2 findet offenbar dann statt, wenn für diese Parabelschlitzabbildung w_2 gleichen Realteil wie w_1 hat (das ist dann zu Fall 1 und zu Fall 2 zu rechnen).

Falls $\mathcal{G} \equiv \{|z| > 1\}$, wenn wir es also mit der Abbildungsklasse Σ zu tun haben, lassen sich nach [5], §3 im Prinzip die Extremalabbildungen bestimmen, was sich aber im Falle 2 kompliziert gestaltet, da unbekannte Parameter die Lösung gewisser Gleichungen erheischen. Im Falle 1 ist das kein Problem und bekannt (vgl. [1], S. 129 oder [2], S. 97), so daß insbesondere zu festem z_1 diejenigen z_2 charakterisiert werden können, für die genannter Übergang von Fall 1 zu Fall 2 stattfindet.

Der Beweis dieses Satzes kann nach dem gleichen Schema wie in [6] erfolgen. Zuerst löst man ein "höher normiertes" Extremalproblem durch Bereitstellung der erforderlichen Schlitzabbildungen mit der Koebeschen Kontinuitätsmethode und führt den zugehörigen Extremalbeweis mit der Grötzschschen Flächenstreifenmethode (bzw. Methode der extremalen Länge). Anschließend erfolgt durch eine Zusatzvariation eine Ausscheidung spezieller derartiger Abbildungen. Wir ziehen es allerdings hier vor, die erforderlichen Schlitzabbildungen so bereitzustellen, daß wir das genannte höher normierte Extremalproblem mit der Variationsmethode direkt behandeln, wobei — das ist hier entscheidend — die höhere Normierung durch die schon in [11] angewandte Methode des Straffunktionals erzwungen wird. Die genannte Zusatzvariation benutzt in eigentümlicher Weise quasikonforme Abbildungen. Und zwar werden lokale Abänderungen von quasikonformen Abbildungen derart erzeugt, daß auf dem Rande von Kreisscheiben die Werte fest bleiben. Derartige quasikonforme Abbildungen mit festen Randwerten wurden zuerst von O. Teichmüller betrachtet [13] und später umfassend von K. Strebel u.a. [12].

2. Beweis des Satzes

a) Falls für eine — natürlich aus Kompaktheitsgründen in bekannter Schlußweise existierende — Extremalfunktion $f_*(z)$ zu Problem II* die Bilder w_1 und w_2 verschiedenen Realteil bekommen, muß im Satz

von §1 der Fall 1 vorliegen. Überdies gibt es dann nur diese eine Extremalfunktion. Wenn nämlich z.B. $\Re w_2 > \Re w_1$ ist, dann muß $f_*(z)$ eine Parabelschlitzabbildung sein, bei der S_1, \dots, S_m in Schlitze auf der Schar der zu w_1 konfokalen Parabeln übergehen, deren gemeinsame Brennachse der von w_1 startende Strahl in Richtung der negativ reellen Achse ist. Andernfalls ergäbe sich sofort nach einem klassischen Resultate von H. Grötzsch (vgl. [2], Th. 6.12) ein Widerspruch zur Eigenschaft von $f_*(z)$.

b) Sei nun hinfürder $\Re w_1 = \Re w_2$ für die Extremalfunktion $f_*(z)$, o.E.d.A. dazu $\Im w_1 < \Im w_2$. Die Extremalfunktion $f_*(z)$ ist dann auch Extremalfunktion in der Teilklasse der hydrodynamisch normierten $f(z)$ mit der Nebenbedingung

$$(10) \quad \Re f(z_1) = \Re f(z_2), \quad \Im f(z_1) < \Im f(z_2)$$

Durch die ganz-lineare Substitution

$$(11) \quad W = i \frac{2w - (w_1 + w_2)}{w_2 - w_1}$$

mit $\infty \rightarrow \infty$, $w_1 \rightarrow -i$, $w_2 \rightarrow +i$ entstehen aus den hydrodynamisch normierten Abbildungen $f(z)$ mit (10) schlichte konforme Abbildungen (12)

$$F(z) = A_{-1}z + A_0 + \frac{A_1}{z} + \dots \quad \text{mit} \quad A_{-1} = \frac{2i}{w_2 - w_1}, \quad A_0 = -\frac{w_2 + w_1}{w_2 - w_1}$$

von \mathfrak{G} mit der neuen Normierung

$$(13) \quad F(\infty) = \infty, \quad F(z_1) = -i, \quad F(z_2) = +i, \quad A_{-1} > 0,$$

und umgekehrt gibt jedes $F(z)$ mit dieser Normierung (13) durch hydrodynamische Umnormierung Anlaß zu einem $f(z)$ mit (10).

Aus dem Extremalproblem

$$(14) \quad \Re f(z_1) = \Re f(z_2) \rightarrow \max$$

mit der Lösung $f_*(z)$ wird über diese Entsprechung das Extremalproblem

$$(15) \quad \Re(A_0/A_{-1}) \rightarrow \min$$

mit der Lösung $F_*(z)$, die über die obige Substitution $f_*(z)$ entspricht.

Zur Behandlung dieses Extremalproblems (15) bietet sich wie in [6] folgende 1. Lösungsvariante an. Es wird nämlich zunächst noch zusätzlich A_{-1} (bzw. $w_2 - w_1$) fest vorgegeben (innerhalb des sich nach H. Grötzsch — vgl. [2], Th. 6.6 und 6.8 — ergebenden abgeschlossenen Intervalles) und das Extremalproblem unter dieser höheren Normierung

gelöst. Dazu werden zuerst Schlitzabbildungen bezüglich des quadratischen Differentials der Gestalt (9) mit Hilfe der Koebeschen Kontinuitätsmethode bereit gestellt und deren Extremaleigenschaft mit der Grötzschschen Flächenstreifenmethode bzw. heute auch unmittelbar mit dem General Coefficient Theorem von J. A. Jenkins [2] bewiesen. In der entstehenden einparametrischen Abbildungsschar (Parameter ist dieses fixierte A_{-1}) muß sich die von uns gesuchte Extremalabbildung befinden, und diese wird dann durch eine Zusatzvariation (diese wird unten tatsächlich verwendet) ausgesondern.

c) Da sich der Kontinuitätsbeweis in diesem Falle jedoch etwas komplizierter gestaltet, ziehen wir folgende 2. Lösungsvariante mit der Variationsmethode vor. Und zwar wird wieder zunächst zusätzlich A_{-1} bei den durch (13) normierten $F(z)$ der Entwicklung (12) bzw. $w_2 - w_1$ bei den ursprünglichen $f(z)$ festgehalten. $F_*(z)$ bzw. $f_*(z)$ muß sich ja bei einem geeigneten Wert A_{-1} bzw. $w_2 - w_1$ als Lösung unseres Extremalproblems auch bei dieser höheren Normierung einstellen. Das dann entstehende Problem kann man mit der in [11] dargestellten Form der Methode des Straffunktionalen behandeln.* Falls man mit den $f(z)$ arbeitet (bei den $F(z)$ müßte man die Überlegungen in [11] noch auf die dreipunktige Normierung (13) umschreiben), nimmt man z.B. das folgende zu maximierende Funktional (vgl. (15) und (12)) mit dem hinzugefügten (zweiten) Strafterm

$$(16) \quad \Re\{f(z_1) + f(z_2)\} - m \cdot |f(z_1) - f(z_2) - \text{const}|^2$$

($m =$ natürliche Zahl, anschließend $m \rightarrow \infty$). Man kann bei der Betrachtung zusätzlich eine Homotopieklasse für die Abbildungen vorgeben (falls bei den betrachteten Abbildungen mehrere entstehen). Und zwar kann man wie üblich (schon in den Arbeiten von H. Grötzsch) eine Homotopieklasse dadurch definieren, daß man das Bild einer festen Kurve von $z = \infty$ über z_1 nach z_2 betrachtet, wobei diese Kurve in $z = \infty$ z.B. in Richtung der positiv reellen Achse einläuft. Eine Homotopieklasse entsteht bei denjenigen Abbildungen, bei denen diese Kurvenbilder durch $\pm i$ ineinander stetig deformierbar sind in der in $\pm i$ punktierten Ebene, unter Beibehaltung der Richtung in ∞ . Bei den Variationen, die ja lokaler Natur sind, bleibt man in der jeweiligen Homotopieklasse.

*Herrn H. Renelt danke ich herzlich für diesbezügliche Hinweise und Diskussionen.

Das Ergebnis dieser Variationsbetrachtung: In jeder Homotopieklasse ist *mindestens* eine Extremalabbildung $w = f_*(z)$ Schlitzabbildung bezüglich des quadratischen Differentials der Gestalt

$$(17) \quad -\frac{\lambda w + \mu}{(w - w_1)(w - w_2)} dw^2 > 0.$$

Dabei sind λ und μ gewisse Konstanten, $\lambda \geq 0$, μ komplex, $\mu \neq 0$ für $\lambda = 0$. (Mehr als "mindestens eine" gibt die Methode des Straffunktionals zunächst nicht her.) Insbesondere gibt es also in jeder Homotopieklasse eine solche Schlitzabbildung bezüglich dieses quadratischen Differentials. Diese Schlitzabbildung gibt vermöge der Substitution (11) Anlaß zu einer Schlitzabbildung $W = F_*(z)$ bezüglich des quadratischen Differentials

$$(18) \quad -\frac{\lambda W + \mu^*}{(W - i)(W + i)} dW^2 > 0.$$

d) Jetzt wenden wir zusätzlich entscheidend die Flächenstreifenmethode bzw. Methode der extremalen Länge, z.B. in Form des General Coefficient Theorem von J. A. Jenkins [2] an. Danach ist $F_*(z)$, etwa entwickelt in der Form von

$$(19) \quad F_*(z) = A_{-1}^* z + A_0^* + \frac{A_1^*}{z} + \dots, \quad A_{-1}^* > 0,$$

unter allen durch (12) entwickelten $F(z)$ mit fixiertem $A_{-1} = A_{-1}^*$ in der gleichen Homotopieklasse sogar diejenige *eindeutig bestimmte* Abbildung von \mathfrak{G} mit minimalem Wert für $\Re A_0$.

Zur Anwendung von [2] noch diese Bemerkung. Falls $\lambda \neq 0$ ist, dann (außer wenn die Zählernullstelle in (18) i oder $-i$ ist, wo dann alles klar ist nach H. Grötzsch — vgl. [2], Th. 6.12) hat (18) in $+i$ und $-i$ einfache Pole, in $W = \infty$ einen Pol 3. Ordnung (und zusätzlich eine einfache Nullstelle), und [2] zeigt die Behauptung. Falls $\lambda = 0$ ist, dann haben wir in $W = \infty$ einen Doppelpol (und die einfache Nullstelle ist verschwunden), und auch schon nach einem Resultate von H. Grötzsch (vgl. [2], Th. 6.15 nach linearer Transformation) ist $F_*(z)$ bei Vorgabe des betreffenden Wertes für A_{-1} (und der Homotopieklasse) überhaupt einzige mögliche Abbildung.

Insbesondere ist durch diese zusätzliche Anwendung des General Coefficient Theorem jetzt also jede Extremalfunktion bei Weglassung der Homotopiebedingung zu fixiertem $w_2 - w_1$ und also auch unsere angenommene Lösung $f_*(z)$ von Extremalproblem II* eine Schlitzabbildung bezüglich eines quadratischen Differentials der Gestalt (17).

Damit ist Teil a) des Satzes von §1 bewiesen.

e) Um nun entsprechend Teil b) des Satzes von §1 nachzuweisen, daß für *mindestens* eine Extremalfunktion sogar noch genauer w_0 die angegebene Lage hat, nehmen wir eine weitere Variationsbetrachtung zu Hilfe.

Dazu müssen wir etwas weiter ausholen und nehmen quasikonforme Abbildungen zu Hilfe. Es sei \mathfrak{K}_1 bzw. \mathfrak{K}_2 eine zu z_1 bzw. z_2 konzentrische feste Kreisscheibe. Beide Kreisscheiben werden so klein gewählt, daß sie punktfremd sind und vollständig in \mathfrak{G} liegen. Wenn wir dann in Problem II* statt durchweg konformer Abbildungen allgemeiner stetige Abbildungen von \mathfrak{G} betrachten, die in \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 jetzt Q -quasikonform ($Q > 1$, zunächst fest) sind, im Rest von \mathfrak{G} wieder konform und hydrodynamisch normiert, wollen wir von Problem II* $_Q$ sprechen.

Entscheidend ist nun, daß die Aussage a) des Satzes von §1 und der zugehörige Beweis (entsprechend dem Bisherigen in diesem Paragraphen) sinngemäß gültig bleibt (vgl. [8], Fußnote auf S.2), wenn man jetzt Problem II* $_Q$ betrachtet. Im Teil a) des Satzes von §1 tritt dann noch die Aussage hinzu, daß bei jeder Lösung $w = f_{*Q}(z)$ des Extremalproblems in \mathfrak{K}_1 oder \mathfrak{K}_2 gelegene infinitesimale Kreise übergehen in infinitesimale Ellipsen des Achsenverhältnisses Q , wobei die großen Achsen auf dem durch $\Omega(w) dw^2 > 0$ definierten Richtungsfeld liegen.

f) Nun kommt der entscheidende

Hilfssatz. *Es ist unmöglich, daß bei einer Lösung $f_{*Q}(z)$ von Problem II* $_Q$ in w_1 oder w_2 ein einfacher Pol beim quadratischen Differential (10) vorliegt und eine Trajektorie dort so endet, daß in dem Endpunkt die Neigung gegen die positiv reelle Achse $\neq \pi$ ist.*

Beweis (von ähnlicher Tendenz, wie in anderem Zusammenhange in [9] angedeutet). In [13] ist das Verschiebungsproblem gelöst, den genauen Wertebereich von $g(0)$ in der Klasse aller Q -quasikonformen Abbildungen $g(\zeta)$ der Einheitskreisscheibe $|\zeta| < 1$ auf sich unter Festhaltung aller Punkte des Randes $|\zeta| = 1$ zu bestimmen. Dieser Wertebereich ist eine gewisse zu O konzentrische Kreisscheibe, und der Punkt P maximalen Realteils wird von genau einer Abbildung $g^*(z)$ angenommen, bei der infinitesimale Kreise in infinitesimale Ellipsen des Achsenverhältnisses Q übergehen, wobei die großen Achsen dieser Ellipsen auf einer gewissen Kurvenschar \mathfrak{S} der g^* -Ebene liegen. Zu \mathfrak{S} gehört eine horizontale Strecke mit rechtem Endpunkt P . Es ist \mathfrak{S} topologisch

äquivalent einer Schar konfokaler Parabeln innerhalb einer zum Brennpunkt konzentrischen Kreisscheibe. Und es gibt eine schlichte konforme Abbildung mit $P \rightarrow O$ der Einheitskreisscheibe der g^* -Ebene, bei der \mathfrak{G} in ein von einer geschlossenen Jordankurve \mathfrak{B} berandetes Gebiet $\ni O$ übergeht und \mathfrak{G} eine Bildschar bekommt, die auf einer Schar zu O konfokaler Parabeln liegt. (Konkret: \mathfrak{B} ist nach [13] eine zu O konfokale Ellipse, was hier aber nicht benutzt wird.)

Daneben gibt es eine schlichte konforme Abbildung des Inneren von \mathfrak{B} mit $O \rightarrow w_1$, so daß die Bilder genannter Parabeln (bzw. der Bögen innerhalb \mathfrak{B}) auf den Trajektorien des f_{*Q} beschreibenden quadratischen Differentials (9) liegen, falls dieses in w_1 einen einfachen Pol hat (das Analoge gilt bei w_2). Dabei gehe \mathfrak{B} in \mathfrak{B}' über. Durch Zusammensetzung erhalten wir eine schlichte konforme Abbildung des Inneren von \mathfrak{B}' auf das Innere des Einheitskreises der g^* -Ebene mit $w_1 \rightarrow P$, wobei die Schar der Trajektorien innerhalb \mathfrak{B}' in die Schar \mathfrak{G} übergeht. Eine lokale Abänderung (nämlich innerhalb \mathfrak{B}') bei der Lösung $f_{*Q}(z)$ von Problem II_Q^* , bei der wieder eine zulässige Abbildung $f_{**Q}(z)$ entsteht (die also insbesondere wieder Q -quasikonform ist innerhalb \mathfrak{K}_1), induziert eine Abänderung der Abbildung $g^*(\zeta)$ bei Festhaltung der Punkte des Einheitskreises $|\zeta| = 1$ unter Wahrung der Q -Quasikonformität, und umgekehrt.

Nach diesen umfangreichen Vorbereitungen ist die Behauptung des Hilfssatzes evident. Da es Abänderungen (genannter Art) von $g^*(\zeta)$ gibt, bei denen statt P ein beliebiger Punkt auf dem durch P verlaufenden und zu O konzentrischen Kreis erscheint, gibt es zulässige Abänderungen f_{**Q} der Extremalabbildung f_{*Q} von Problem II_Q , bei denen statt w_1 ein Punkt auf einer Kurve erscheint, die zur in w_1 endenden Trajektorie in w_1 orthogonal ist. Wenn der Hilfssatz falsch wäre, gäbe es also jedenfalls auch zulässige Abänderungen von $f_{*Q}(z)$, deren Dilatation z.Tl. $< Q$ ist und bei denen statt w_1 ein Punkt mit größerem Realteil erscheint. Das ist ein Widerspruch, weil diese Abänderung also auch Extremalfunktion von Problem I_Q^* wäre, die aber nicht die oben schon bewiesene Gestalt hat, nämlich nicht in \mathfrak{K}_1 durchweg die Dilatation Q besitzt.

g) Nach dem eben unter f) Bewiesenen ist nun also bei einer Extremalfunktion zu Problem II_Q^* sicher im quadratischen Differential (17) $\lambda \neq 0$ (bei $\lambda = 0$ endet in mindestens einem der beiden Punkte w_1 und w_2 die zugehörige Trajektorie unter einer Neigung $\neq \pi$), und bei dem dann also in der Gestalt (9) endlichen w_0 muß gelten: Entweder ist w_0

einer der Punkte w_1, w_2 oder (bei also $w_0 \neq w_1$ und $w_0 \neq w_2$) es gilt

$$(20) \quad \frac{w_1 - w_0}{w_1 - w_2} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{w_2 - w_0}{w_2 - w_1} > 0.$$

Das folgt unter Benutzung des Hilfssatzes von f) durch lokale Betrachtung der Trajektorien des quadratischen Differentials in Umgebung von w_1 bzw. w_2 . (20) zieht nach sich, daß w_0 auf der offenen Verbindungsstrecke von w_1 und w_2 liegt.

h) Damit gilt nun für jede Extremalfunktion zu Problem II_Q^* : Die Bildrandkomponenten werden durch $\Omega(w) dw^2 > 0$ mit dem quadratischen Differential (9) mit einem gewissen (endlichen) w_0 beschrieben. Es ist entweder w_0 gleich w_1 oder w_2 , oder es gilt $\Re w_1 = \Re w_2$, wobei w_0 auf der offenen Verbindungsstrecke von w_1 und w_2 liegt. Dabei liegt Konformität vor außer in \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 , wo die Extremalfunktion Q -quasikonform ist und die großen Achsen der infinitesimalen Bildellipsen durch $\Omega(w) dw^2 > 0$ beschrieben werden.

i) Nachdem wir nun zu jedem $Q > 1$ eine Extremalfunktion $f_{*Q}(z)$ von in h) beschriebener Bauart zu Problem II_Q gefunden haben, betrachten wir jetzt den Grenzübergang $Q \searrow 1$. Bei sinkendem Q sinken auch die zugehörigen Funktionale $\mathfrak{b}(f_{*Q})$. Für eine geeignete Folge von Q -Werten mit $Q \searrow 1$ ergibt sich aus einschlägigen Kompaktheitssätzen die im bekannten Sinne gleichmäßige Konvergenz der zugehörigen $f_{*Q}(z)$, wobei die Grenzfunktion $f_*(z)$ eine normierte rein konforme Abbildung sein muß, bei der Schlitzte beim Bildgebiet erscheinen, die durch $\Omega(w) dw^2 > 0$ mit einem quadratischen Differential der Gestalt (9) beschrieben werden, mit w_0 wie in h) besagt. Es ist $f_*(z)$ dazu Extremalfunktion zu Problem II^* , da andernfalls eine zulässige konforme Vergleichsabbildung f_{**} mit größerem Funktional $\mathfrak{b}(f_{**})$ existieren würde. Und f_{**} hätte auch ein größeres Funktional als gewisse f_{*Q} , was nicht angeht, da f_{**} zulässige Abbildung bei Extremalproblem II_Q^* ist.

Damit haben wir in Gestalt von $f_*(z)$ eine Extremalfunktion zu Problem II^* gefunden, wie in Teil b) des Satzes von §1 beschrieben. Der Satz ist nun vollständig bewiesen. \diamond

Bemerkung. Durch den Grenzübergang im Beweisteil i) entsteht leider nicht die schärfere Aussage im Satz von §1, daß bei jeder Extremalfunktion zu Problem II^* der Punkt w_0 auf der Verbindungsstrecke von w_1 und w_2 liegt, falls $\Re w_1 = \Re w_2$. An der Richtigkeit dieser schärferen Aussage ist aber wohl nicht zu zweifeln.

Literatur

- [1] GOLUSIN, G. M.: Geometrische Funktionentheorie, Berlin, 1957.
- [2] JENKINS, J. A.: Univalent functions and conformal mapping, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.
- [3] KOMATU, Y.: Über Verzerrungen bei der konformen Parallelschlitzabbildung von zweifach zusammenhängenden Gebieten, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* 21 (1945), 1-5.
- [4] KOMATU, Y.: Zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete IV, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* 21 (1945), 372-377.
- [5] KÜHNAU, R.: Über die analytische Darstellung von Abbildungsfunktionen, insbesondere von Extremalfunktionen der Theorie der konformen Abbildung, *J. reine angew. Math.* 228 (1967), 93-132.
- [6] KÜHNAU, R.: Geometrisch-funktionentheoretische Lösung eines Extremalproblems der konformen Abbildung, I und II, *J. reine angew. Math.* 229 (1968), 131-136 und 237 (1969), 175-180.
- [7] KÜHNAU, R.: Herleitung einiger Verzerrungseigenschaften konformer und allgemeinerer Abbildungen mit Hilfe des Argumentprinzipes, *Math. Nachr.* 39 (1969), 249-275.
- [8] KÜHNAU, R.: Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung, *Math. Nachr.* 40 (1969), 1-11.
- [9] KÜHNAU, R.: Interpolation durch möglichst konforme Jordankurven, *Sib. Mat. Žurn.* (in Russ.) 32/2 (1991), 94-103; *Sibir. Math. J.* (in Engl.) 32 (1991), 257-264.
- [10] LÖWNER, K.: Über Extremumsätze bei der konformen Abbildung des Äußeren des Einheitskreises, *Math. Z.* 3 (1919), 65-77.
- [11] RENELT, H.: Extremalprobleme bei quasikonformen Abbildungen unter höheren Normierungen, *Math. Nachr.* 66 (1975), 125-143.
- [12] STREBEL, K.: Extremal quasiconformal mappings, *Results in Math.* 10 (1986), 168-209.
- [13] TEICHMÜLLER, O.: Ein Verschiebungssatz der quasikonformen Abbildung, *Deutsche Math.* 7 (1944), 336-343; auch in den "Gesammelten Abhandlungen", Berlin-Heidelberg-New York, 1982.

A REVISION OF BANDLER – KOHOUT COMPOSITIONS OF RELATIONS

B. De Baets*

Department of Applied Mathematics and Computer Science, University of Gent, Krijgslaan 281 (S9), 9000 Gent, Belgium

E. Kerre

Department of Applied Mathematics and Computer Science, University of Gent, Krijgslaan 281 (S9), 9000 Gent, Belgium

Received January 1992

AMS Subject Classification: 04 A 05

Keywords: Compositions of relations, images under a relation.

Abstract: This paper contains a thorough investigation of the compositions of relations defined by Bandler and Kohout. It is shown that these compositions bear some shortcomings and improved definitions are suggested. Similar ideas are used to define new images of a set under a relation. Possible relationships among these images and among the compositions are investigated. An extensive overview of the properties, such as monotonicity and interaction with union and intersection, of the images and the compositions is given. Finally, the associativity properties of the compositions are examined.

1. Introduction

In 1980 W. Bandler and L. Kohout [1] introduced several new compositions of relations, called products in their terminology, based on the notions of aftersets and foresets of relations. They immediately

*Research Assistant of the N.F.S.R. (Belgium)

extended these compositions to fuzzy relations using fuzzy implication operators [2]. Bandler and Kohout claim that fuzzy relational compositions constitute a tool for the analysis and synthesis of complex natural and artificial systems. The list of application areas is appealing, including medical diagnosis [3] and information retrieval systems [4,5]. Their definitions have been generally accepted and have even become common property in fuzzy set theory.

An attempt to apply Bandler and Kohout's ideas on the concept of *direct image of a set under a relation* brought to light that the definitions of their compositions bear some shortcomings [6]. These become even more important when one considers the fuzzy counterparts of these definitions. The purpose of this paper is to provide more accurate versions of these compositions of relations and to give an extensive overview of their relevant properties.

2. Preliminary definitions

A relation R from a universe X to a universe Y is a subset of $X \times Y$, i.e. $R \subseteq X \times Y$. The formula $(x, y) \in R$ is abbreviated as xRy , and one says that x is in relation R with y .

Definition 2.1. The afterset xR of $x \in X$ and the foreset Ry of $y \in Y$ are defined as

$$xR = \{y \mid xRy\}$$

$$Ry = \{x \mid xRy\}.$$

Definition 2.2. The domain $\text{dom}(R)$ and the range $\text{rng}(R)$ of R are defined as

$$\text{dom}(R) = \{x \mid xR \neq \emptyset\}$$

$$\text{rng}(R) = \{y \mid Ry \neq \emptyset\}.$$

Definition 2.3. The converse relation R^T of R is the relation from Y to X defined by

$$yR^T x \Leftrightarrow xRy.$$

The complement $\text{co } R$ of R is the relation from X to Y defined by

$$x(\text{co } R)y \Leftrightarrow \neg(xRy).$$

Notice that $\text{dom}(R^T) = \text{rng}(R)$, $\text{rng}(R^T) = \text{dom}(R)$ and $\text{co}(R^T) = (\text{co } R)^T$.

Consider an arbitrary family $(R_i)_{i \in I}$ of relations from X to Y indexed by I .

Definition 2.4. The union $\bigcup_{i \in I} R_i$ of the family $(R_i)_{i \in I}$ is the relation from X to Y defined by

$$x \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) y \Leftrightarrow (\exists i \in I)(xR_i y).$$

The intersection $\bigcap_{i \in I} R_i$ of the family $(R_i)_{i \in I}$ is the relation from X to Y defined by

$$x \left(\bigcap_{i \in I} R_i \right) y \Leftrightarrow (\forall i \in I)(xR_i y).$$

All of these operations can be expressed in terms of after- and foresets in the following way [9].

Properties 2.1.

1.
$$\begin{aligned} xR &= R^T x \\ Ry &= yR^T \end{aligned}$$
2.
$$\begin{aligned} x(\text{co } R) &= \text{co}(xR) \\ (\text{co } R)y &= \text{co}(Ry) \end{aligned}$$
3.
$$\begin{aligned} x \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) &= \bigcup_{i \in I} xR_i \\ \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) y &= \bigcup_{i \in I} R_i y \end{aligned}$$
4.
$$\begin{aligned} x \left(\bigcap_{i \in I} R_i \right) &= \bigcap_{i \in I} xR_i \\ \left(\bigcap_{i \in I} R_i \right) y &= \bigcap_{i \in I} R_i y. \end{aligned}$$

3. Images of a set under a relation

3.1. Definition

Consider a relation R from X to Y and a subset A of X . The classical definition of the *direct* image of the set A under the relation R is given as follows

$$R(A) = \{y \mid (\exists x \in A)(xRy)\}.$$

The direct image $R(A)$ is the set of those elements of Y that are in relation R^T with *at least one* element of A . The intention of this subsection is to refine the direct image $R(A)$ in order to distinguish those

elements of Y that are in relation R^T with *all* elements of A and those elements of Y that are in relation R^T with elements of A *only*. This refinement is achieved in the following definition.

Definition 3.1. (Images of a set under a relation)

$$R(A) = \{y \mid A \cap Ry \neq \emptyset\}$$

$$R^a(A) = \{y \mid \emptyset \subset A \subseteq Ry\}$$

$$R^p(A) = \{y \mid \emptyset \subset Ry \subseteq A\}$$

$$R^o(A) = \{y \mid \emptyset \subset A = Ry\}.$$

This definition provides four different images of a set under a relation. It is obvious that the first definition coincides with the classical definition of the direct image of a set under a relation. The second image $R^a(A)$ is called the *subdirect* image of A under R , while the third image $R^p(A)$ is called the *superdirect* image of A under R . The fourth image $R^o(A)$ is called the *square* image of A under R .

For a non-empty set A , the subdirect image $R^a(A)$ can be written as

$$R^a(A) = \{y \mid (\forall x \in A)(xRy)\}.$$

This explains why the direct and subdirect image are called *existential* and *universal* compositions by Izumi, Tanaka and Asai [8]. They are also called *upper* and *lower* images by Dubois and Prade [7].

Remark 3.1.

- The non-emptiness condition $\emptyset \subset A$ in the definition of $R^a(A)$ seems superfluous at first sight and could be evaded by restricting the definition to a non-empty set A . Without the condition $\emptyset \subset A$ it would follow that $R^a(\emptyset) = Y$, which is unacceptable. Neither Izumi, Tanaka and Asai nor Dubois and Prade have observed the necessity of this non-emptiness condition.
- The non-emptiness condition $\emptyset \subset Ry$ in the definition of $R^p(A)$ has stronger consequences. Without the condition $\emptyset \subset Ry$ it would follow that $\text{co}(\text{rng}(R)) \subseteq R^p(A)$, which is unacceptable again. The condition $\emptyset \subset Ry$ ensures that $R^p(A)$ contains those elements of Y that are in relation R^T with elements of A only and that actually do so.
- The non-emptiness conditions imply that all images are contained in $\text{rng}(R)$ and that the images of the empty set under a relation all yield the empty set.

An equivalent way of defining the new images is the following

$$R^{\circ}(A) = R(A) \cap \{y \mid A \subseteq Ry\}$$

$$R^{\circ}(A) = R(A) \cap \{y \mid Ry \subseteq A\}$$

$$R^{\circ}(A) = R(A) \cap \{y \mid A = Ry\}.$$

These definitions interpret the non-emptiness conditions in a different way. Adopting these alternative definitions unnecessarily complicates the proofs of the properties of the new images. The condition $y \in R(A)$ not only implies the non-emptiness of A and Ry but also a certain overlap. This overlap is afterwards tested in a stricter way by the conditions of inclusion or equality in the second components of the above intersections.

Example 3.1. The images of a set under a relation can be illustrated on an example from medical diagnosis. Consider a set of patients X and a set of symptoms Y . Let R be the relation from X to Y defined by

$$xRy \Leftrightarrow \text{patient } x \text{ shows symptom } y.$$

Let A be the non-empty set of female patients in the population X , then the images of A under R are given by

- $R(A)$ is the set of symptoms shown by at least one female patient,
- $R^{\circ}(A)$ is the set of symptoms shown by all female patients,
- $R^{\circ}(A)$ is the set of symptoms shown by at least one female patient and not by any male patient,
- $R^{\circ}(A)$ is the set of symptoms shown by all female patients and not by any male patient.

A close examination of the relationships between the images and the properties of the images is discussed in the following subsections. A few of these relationships and properties can also be found in [7,8].

3.2. Relationships between the images

3.2.1. Containment. A first series of properties concerns the refining nature of the images.

Properties 3.1. (Containment)

$$R^{\circ}(A) = R^{\circ}(A) \cap R^{\circ}(A)$$

$$R^{\circ}(A) \subseteq R^{\circ}(A) \subseteq R(A)$$

$$R^{\circ}(A) \subseteq R^{\circ}(A) \subseteq R(A).$$

3.2.2. Relationships. This paragraph investigates among other things how the determination of a subdirect or a superdirect image

can be converted into the determination of a classical direct image. These properties not merely have an aesthetical character but also a functional one. As will become clear, they assist in discovering and proving new properties. The new images can be expressed in terms of the direct image in the following way.

Properties 3.2.

$$R^{\triangleleft}(A) = \text{co}((\text{co } R)(A)) \quad \text{if } A \neq \emptyset$$

$$R^{\triangleright}(A) = \text{co}(R(\text{co } A)) \cap \text{rng}(R)$$

$$R^{\circ}(A) = \text{co}((\text{co } R)(A)) \cap \text{co}(R(\text{co } A)) \quad \text{if } A \neq \emptyset.$$

Proof. As an example, the third equality is proven.

$$y \in \text{co}((\text{co } R)(A)) \cap \text{co}(R(\text{co } A))$$

$$\Leftrightarrow \neg(A \cap (\text{co } R)y \neq \emptyset) \wedge \neg(\text{co } A \cap Ry \neq \emptyset)$$

$$\Leftrightarrow A \cap \text{co}(Ry) = \emptyset \wedge \text{co } A \cap Ry = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \emptyset \subset A \subseteq Ry \wedge Ry \subseteq A$$

$$\Leftrightarrow \emptyset \subset A = Ry$$

$$\Leftrightarrow y \in R^{\circ}(A). \quad \diamond$$

The following relationships express the direct image in terms of the subdirect or the superdirect image.

Properties 3.3.

$$R(A) = \text{co}((\text{co } R)^{\triangleleft}(A)) \quad \text{if } A \neq \emptyset$$

$$R(A) = \text{co}(R^{\triangleright}(\text{co } A)) \cap \text{rng}(R).$$

Proof. The second equality can be proven as follows.

$$y \in \text{co}(R^{\triangleright}(\text{co } A)) \cap \text{rng}(R)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\emptyset \subset Ry \subseteq \text{co } A) \wedge Ry \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow (\neg(\emptyset \subset Ry) \vee \neg(Ry \subseteq \text{co } A)) \wedge Ry \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow (Ry = \emptyset \vee \neg(Ry \subseteq \text{co } A)) \wedge Ry \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \neg(Ry \subseteq \text{co } A)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in Ry)(x \in A)$$

$$\Leftrightarrow A \cap Ry \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow y \in R(A). \quad \diamond$$

Other interesting relationships are these existing between the subdirect and the superdirect image.

Properties 3.4.

$$\begin{aligned} R^q(A) &= (\text{co } R)^p(\text{co } A) \cup \text{co}(\text{rng}(\text{co } R)) && \text{if } A \neq \emptyset \\ R^p(A) &= (\text{co } R)^q(\text{co } A) \cap \text{rng}(R) && \text{if } \text{co } A \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Proof. As an example, the first equality is proven.

$$\begin{aligned} y \in (\text{co } R)^p(\text{co } A) \cup \text{co}(\text{rng}(\text{co } R)) \\ \Leftrightarrow \emptyset \subset (\text{co } R)y \subseteq \text{co } A \vee \neg((\text{co } R)y \neq \emptyset) \\ \Leftrightarrow (\emptyset \subset \text{co}(Ry) \wedge \text{co}(Ry) \subseteq \text{co } A) \vee \text{co}(Ry) = \emptyset \\ \Leftrightarrow (Ry \subset X \wedge \emptyset \subset A \subseteq Ry) \vee Ry = X \\ \Leftrightarrow \emptyset \subset A \subseteq Ry \\ \Leftrightarrow y \in R^q(A). \quad \diamond \end{aligned}$$

To conclude this paragraph, the following property for the square image is mentioned.

Property 3.5.

$$(\text{co } R)^\circ(\text{co } A) = R^\circ(A) \quad \text{if } A \neq \emptyset \text{ and } \text{co } A \neq \emptyset.$$

Proof.

$$\begin{aligned} y \in (\text{co } R)^\circ(\text{co } A) \\ \Leftrightarrow \emptyset \subset \text{co } A = (\text{co } R)y \Leftrightarrow \emptyset \subset \text{co } A \wedge \text{co } A = \text{co}(Ry) \\ \Leftrightarrow \text{co } A \neq \emptyset \wedge A = Ry \Leftrightarrow \emptyset \subset A \subseteq Ry \Leftrightarrow y \in R^\circ(A). \quad \diamond \end{aligned}$$

3.2.3. Expressions in terms of aftersets. Using properties 3.2 expressing the new images in terms of the direct image, definitions 3.1 can be written in the following elegant way.

Properties 3.6. (Expressions in terms of aftersets)

$$\begin{aligned} R(A) &= \bigcup_{x \in A} xR \\ R^q(A) &= \bigcap_{x \in A} xR && \text{if } A \neq \emptyset \\ R^p(A) &= \bigcap_{x \in \text{co } A} \text{co}(xR) \cap \text{rng}(R) \\ R^\circ(A) &= \left(\bigcap_{x \in A} xR \right) \cap \left(\bigcap_{x \in \text{co } A} \text{co}(xR) \right) && \text{if } A \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Proof. As an example, the second equality is proven.

$$\begin{aligned}
 R^{\diamond}(A) &= \text{co}((\text{co } R)(A)) = \text{co} \left(\bigcup_{x \in A} x(\text{co } R) \right) = \text{co} \left(\bigcup_{x \in A} \text{co}(xR) \right) \\
 &= \bigcap_{x \in A} \text{co}(\text{co}(xR)) = \bigcap_{x \in A} xR. \quad \diamond
 \end{aligned}$$

3.3. Monotonicity

In this subsection the relationship is investigated between the images of a subset of a set and the images of this latter set under a given relation. The same investigation is carried out for the images of a given set under a subrelation of a relation and under this latter relation. This investigation leads to the following results.

Properties 3.7: (Monotonicity)

$$\begin{aligned}
 A_1 \subseteq A_2 &\Rightarrow R(A_1) \subseteq R(A_2) \\
 \emptyset \subset A_1 \subseteq A_2 &\Rightarrow R^{\diamond}(A_2) \subseteq R^{\diamond}(A_1) \\
 A_1 \subseteq A_2 &\Rightarrow R^{\triangleright}(A_1) \subseteq R^{\triangleright}(A_2) \\
 R_1 \subseteq R_2 &\Rightarrow R_1(A) \subseteq R_2(A) \\
 R_1 \subseteq R_2 &\Rightarrow R_1^{\diamond}(A) \subseteq R_2^{\diamond}(A) \\
 (\text{rng}(R_1) = \text{rng}(R_2) \wedge R_1 \subseteq R_2) &\Rightarrow R_2^{\triangleright}(A) \subseteq R_1^{\triangleright}(A).
 \end{aligned}$$

Proof. Only the proof of the last property is mentioned.

$$y \in R_2^{\triangleright}(A) \Leftrightarrow \emptyset \subset R_2 y \subseteq A \Rightarrow \emptyset \subset R_1 y \subseteq A \Leftrightarrow y \in R_1^{\triangleright}(A). \quad \diamond$$

Remark 3.2. From the proof of the last property it actually follows that the condition $\text{rng}(R_2) \subseteq \text{rng}(R_1)$ has to be added. Since the condition $R_1 \subseteq R_2$ already implies that $\text{rng}(R_1) \subseteq \text{rng}(R_2)$ it is obvious that immediately the condition $\text{rng}(R_1) = \text{rng}(R_2)$ can be used.

3.4. Interaction with union and intersection

In this subsection the relationship is investigated between the images of the union and the intersection of an arbitrary family of sets under a given relation and the union and the intersection of the images of each of these sets under that given relation.

Consider a relation R from X to Y and an arbitrary non-empty family $(A_i)_{i \in I}$ of sets in X .

Properties 3.8. (Interaction with union)

$$\begin{aligned} R\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &= \bigcup_{i \in I} R(A_i) \\ R^{\circlearrowleft}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &= \bigcap_{i \in I} R^{\circlearrowleft}(A_i) \quad \text{if } (\forall i \in I)(A_i \neq \emptyset) \\ R^{\circlearrowright}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &\supseteq \bigcup_{i \in I} R^{\circlearrowright}(A_i). \end{aligned}$$

Proofs.

1. $y \in R\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \Leftrightarrow \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap Ry \neq \emptyset \Leftrightarrow \bigcup_{i \in I} (A_i \cap Ry) \neq \emptyset$
 $\Leftrightarrow (\exists i \in I)(A_i \cap Ry \neq \emptyset) \Leftrightarrow y \in \bigcup_{i \in I} R(A_i)$
2. $y \in R^{\circlearrowleft}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \Leftrightarrow \emptyset \subset \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \subseteq Ry \Leftrightarrow (\forall i \in I)(\emptyset \subset A_i \subseteq Ry)$
 $\Leftrightarrow y \in \bigcap_{i \in I} R^{\circlearrowleft}(A_i)$
3. $y \in \bigcup_{i \in I} R^{\circlearrowright}(A_i) \Leftrightarrow (\exists i \in I)(\emptyset \subset Ry \subseteq A_i) \Rightarrow \emptyset \subset Ry \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$
 $\Leftrightarrow y \in R^{\circlearrowright}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right). \quad \diamond$

Without the condition $(\forall i \in I)(A_i \neq \emptyset)$ one can deduce the following interaction of the subdirect image with union.

Property 3.9.

$$\bigcap_{i \in I} R^{\circlearrowleft}(A_i) \subseteq R^{\circlearrowleft}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcup_{i \in I} R^{\circlearrowleft}(A_i).$$

Proof.

$$\begin{aligned} y \in \bigcap_{i \in I} R^{\circlearrowleft}(A_i) &\Leftrightarrow (\forall i \in I)(\emptyset \subset A_i \subseteq Ry) \Rightarrow \emptyset \subset \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq Ry \\ &\Leftrightarrow y \in R^{\circlearrowleft}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \Rightarrow (\exists i \in I)(\emptyset \subset \overset{i \in I}{A_i} \subseteq Ry) \\ &\Leftrightarrow y \in \bigcup_{i \in I} R^{\circlearrowleft}(A_i). \quad \diamond \end{aligned}$$

Properties 3.10. (Interaction with intersection)

$$R\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} R(A_i)$$

$$R^{\triangleleft}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \supseteq \bigcup_{i \in I} R^{\triangleleft}(A_i) \quad \text{if } \bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$$

$$R^{\triangleright}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} R^{\triangleright}(A_i).$$

The same investigation is carried out for the relationship between the images of a given set under the union and the intersection of an arbitrary family of relations and the union and the intersection of the images of that given set under each of these relations.

Consider an arbitrary non-empty family $(R_i)_{i \in I}$ of relations from X to Y and a set A in X .

Properties 3.11. (Interaction with union)

$$\left(\bigcup_{i \in I} R_i\right)(A) = \bigcup_{i \in I} R_i(A)$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} R_i\right)^{\triangleleft}(A) \supseteq \bigcup_{i \in I} R_i^{\triangleleft}(A)$$

$$\bigcap_{i \in I} R_i^{\triangleright}(A) \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} R_i\right)^{\triangleright}(A) \subseteq \bigcup_{i \in I} R_i^{\triangleright}(A).$$

Properties 3.12. (Interaction with intersection)

$$\left(\bigcap_{i \in I} R_i\right)(A) \subseteq \bigcap_{i \in I} R_i(A)$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} R_i\right)^{\triangleleft}(A) = \bigcap_{i \in I} R_i^{\triangleleft}(A)$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} R_i\right)^{\triangleright}(A) \supseteq \bigcup_{i \in I} R_i^{\triangleright}(A) \quad \text{if } (\forall y \in Y) \left(\bigcap_{i \in I} R_i y \neq \emptyset\right).$$

4. Compositions of relations

4.1. Introduction

As already mentioned in the introduction, this paper has been inspired by the results of Bandler and Kohout [1] concerning compositions of relations.

Consider a relation R from X to Y and a relation S from Y to Z . The classical definition of the composition of the relations R and S is given as follows

$$R \circ S = \{(x, z) \mid (\exists y \in Y)(xRy \wedge ySz)\}.$$

The composition $R \circ S$ is a relation from X to Z , consisting of those couples (x, z) for which there exists *at least one* element of Y that is in relation R^T with x and that is in relation S with z . The relation $R \circ S$ is read as R before S or R followed by S . This definition can be written in terms of after- and foresets in the following way

$$R \circ S = \{(x, z) \mid xR \cap Sz \neq \emptyset\}.$$

Bandler and Kohout have introduced the following new compositions.

Definition 4.1. (Bandler-Kohout compositions)

$$R \triangleleft_{bk} S = \{(x, z) \mid xR \subseteq Sz\}$$

$$R \triangleright_{bk} S = \{(x, z) \mid Sz \subseteq xR\}$$

$$R \diamond_{bk} S = \{(x, z) \mid xR = Sz\}.$$

These compositions are called *products* by Bandler and Kohout, more specifically *round product* \circ , *subproduct* \triangleleft_{bk} , *superproduct* \triangleright_{bk} and *square product* \diamond_{bk} . The subproduct and superproduct are also called *triangular products*.

It is clear that definitions 3.1 of the new images have been inspired by definitions 4.1. It is surprising that the definitions of Bandler and Kohout do not mention any non-emptiness condition. This is a regrettable shortcoming. One easily verifies that

$$\text{co}(\text{dom}(R)) \times Z \subseteq R \triangleleft_{bk} S$$

$$X \times \text{co}(\text{rng}(S)) \subseteq R \triangleright_{bk} S.$$

The first expression means that x is in relation $R \triangleleft_{bk} S$ with all elements of Z even if there is no element of Y that is in relation R^T with x . A similar remark holds for the second expression. In this way, the compositions $R \triangleleft_{bk} S$, $R \triangleright_{bk} S$ and $R \diamond_{bk} S$ can contain a lot of unwanted couples. It is clear that only those couples can be accepted for which both components are involved in the relations. An apparent solution would be to consider only those relations R for which $\text{dom}(R) = X$ and $\text{rng}(R) = Y$. This becomes too big a restriction when one wants to consider several relations between the same universes. It is unrealistic that all of these relations would have the same domain and range.

The intention of this section is to improve the definitions of Bandler and Kohout and to carry out a close examination of the properties of the compositions and the relationships between these compositions.

4.2. Definition

Consider a relation R from X to Y and a relation S from Y to Z .

Definition 4.2. (De Baets-Kerre)

$$R \triangleleft S = \{(x, z) \mid \emptyset \subset xR \subseteq Sz\}$$

$$R \triangleright S = \{(x, z) \mid \emptyset \subset Sz \subseteq xR\}$$

$$R \diamond S = \{(x, z) \mid \emptyset \subset xR = Sz\}.$$

These compositions are called the sub-, super- and square composition.

Remark 4.1. The non-emptiness conditions imply that all compositions are contained in $\text{dom}(R) \times \text{rng}(R)$. As for the images, an equivalent way of defining the new compositions is the following

$$R \triangleleft S = (R \circ S) \cap \{(x, z) \mid xR \subseteq Sz\}$$

$$R \triangleright S = (R \circ S) \cap \{(x, z) \mid Sz \subseteq xR\}$$

$$R \diamond S = (R \circ S) \cap \{(x, z) \mid xR = Sz\}.$$

Example 4.1. The compositions of two relations can also be illustrated on an example from medical diagnosis. Consider a set of patients X , a set of symptoms Y and a set of illnesses Z . Let R be the relation from X to Y defined by

$$xRy \Leftrightarrow \text{patient } x \text{ shows symptom } y$$

and S the relation from Y to Z defined by

$$ySz \Leftrightarrow y \text{ is a symptom of illness } z.$$

The compositions of R and S are given by

- $x(R \circ S)z \Leftrightarrow$ patient x shows at least one symptom of illness z ,
- $x(R \triangleleft S)z \Leftrightarrow$ all symptoms shown by patient x are symptoms of illness z (and patient x shows at least one symptom),
- $x(R \triangleright S)z \Leftrightarrow$ patient x shows all symptoms of illness z (and patient x shows at least one symptom),
- $x(R \diamond S)z \Leftrightarrow$ the symptoms shown by patient x are exactly those of illness z (and patient x shows at least one symptom).

4.3. Relationships between the compositions

4.3.1. Containment. A first series of properties concerns the refining nature of the compositions.

Properties 4.1. (Containment)

$$R \diamond S = (R \triangleleft S) \cap (R \triangleright S)$$

$$R \diamond S \subseteq R \triangleleft S \subseteq R \circ S$$

$$R \diamond S \subseteq R \triangleright S \subseteq R \circ S.$$

4.3.2. Relationships. A similar investigation is carried out as for the images. The new compositions can be expressed in terms of the classical composition in the following way.

Properties 4.2.

$$R \triangleleft S = \text{co}(R \circ (\text{co } S)) \cap (\text{dom}(R) \times Z)$$

$$R \triangleright S = \text{co}((\text{co } R) \circ S) \cap (X \times \text{rng}(S))$$

$$\begin{aligned} R \diamond S &= \text{co}(R \circ (\text{co } S)) \cap \text{co}((\text{co } R) \circ S) \cap (\text{dom}(R) \times Z) \\ &= \text{co}(R \circ (\text{co } S)) \cap \text{co}((\text{co } R) \circ S) \cap (X \times \text{rng}(S)). \end{aligned}$$

Proof. As an example, the first equality is proven.

$$\begin{aligned} (x, z) \in \text{co}(R \circ (\text{co } S)) \cap (\text{dom}(R) \times Z) \\ \Leftrightarrow \neg((x, z) \in R \circ (\text{co } S)) \wedge (x \in \text{dom}(R)) \\ \Leftrightarrow \neg(xR \cap (\text{co } S)z \neq \emptyset) \wedge xR \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow xR \cap \text{co}(Sz) = \emptyset \wedge xR \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow \emptyset \subset xR \subseteq Sz \\ \Leftrightarrow (x, z) \in R \triangleleft S. \quad \diamond \end{aligned}$$

The inverse relationships are given next.

Properties 4.3.

$$R \circ S = \text{co}(R \triangleleft (\text{co } S)) \cap (\text{dom}(R) \times Z)$$

$$R \circ S = \text{co}((\text{co } R) \triangleright S) \cap (X \times \text{rng}(S)).$$

Bandler and Kohout established the following relationships for their definitions

$$R \triangleright_{bk} S = (\text{co } R) \triangleleft_{bk} (\text{co } S)$$

$$R \diamond_{bk} S = (\text{co } R) \diamond_{bk} (\text{co } S).$$

Finding the correct relationships for the improved definitions is a delicate matter. These relationships between the subcomposition and the supercomposition are given next.

Properties 4.4.

$$R \triangleleft S = ((\text{co } R) \triangleright (\text{co } S) \cap (\text{dom}(R) \times Z)) \cup (\text{dom}(R) \times \text{co}(\text{rng}(\text{co } S)))$$

$$R \triangleright S = ((\text{co } R) \triangleleft (\text{co } S) \cap (X \times \text{rng}(S))) \cup (\text{co}(\text{dom}(\text{co } R)) \times \text{rng}(S)).$$

Proof. As an example, the second equality is proven. First note that
 $(x, z) \in \text{co}(\text{dom}(\text{co } R)) \times \text{rng}(S) \Leftrightarrow xR = Y \wedge Sz \neq \emptyset.$

Then it follows

$$\begin{aligned} (x, z) &\in ((\text{co } R) \triangleleft (\text{co } S) \cap (X \times \text{rng}(S))) \cup (\text{co}(\text{dom}(\text{co } R)) \times \text{rng}(S)) \\ &\Leftrightarrow (\emptyset \subset \text{co}(xR) \subseteq \text{co}(Sz) \wedge Sz \neq \emptyset) \vee (xR = Y \wedge Sz \neq \emptyset) \\ &\Leftrightarrow (\emptyset \subset Sz \subseteq xR \wedge xR \neq Y) \vee (xR = Y \wedge Sz \neq \emptyset) \\ &\Leftrightarrow (x, z) \in R \triangleright S. \quad \diamond \end{aligned}$$

To conclude this paragraph, the following relationship is mentioned.

Property 4.5.

$$R \diamond S = ((\text{co } R) \diamond (\text{co } S) \cap (\text{dom}(R) \times Z)) \cup (\text{co}(\text{dom}(\text{co } R)) \times \text{co}(\text{rng}(\text{co } S)))$$

Proof.

$$\begin{aligned} (x, z) &\in ((\text{co } R) \diamond (\text{co } S) \cap (\text{dom}(R) \times Z)) \cup \\ &\quad \cup (\text{co}(\text{dom}(\text{co } R)) \times \text{co}(\text{rng}(\text{co } S))) \\ &\Leftrightarrow (\emptyset \subset \text{co}(xR) = \text{co}(Sz) \wedge xR \neq \emptyset) \vee (xR = Sz = Y) \\ &\Leftrightarrow (\emptyset \subset xR = Sz \wedge xR \neq Y) \vee (\emptyset \subset xR = Sz = Y) \\ &\Leftrightarrow (x, z) \in R \diamond S. \quad \diamond \end{aligned}$$

4.3.3. Expressions in terms of after- and foresets. The classical composition can be written in terms of after- and foresets in the following way.

Property 4.6.

$$R \circ S = \bigcup_{y \in Y} (Ry \times yS).$$

Proof.

$$\begin{aligned} (x, z) \in \bigcup_{y \in Y} (Ry \times yS) &\Leftrightarrow (\exists y \in Y)(x \in Ry \wedge z \in yS) \\ &\Leftrightarrow (\exists y \in Y)(y \in xR \wedge y \in Sz) \\ &\Leftrightarrow xR \cap Sz \neq \emptyset \Leftrightarrow (x, z) \in R \circ S. \quad \diamond \end{aligned}$$

In contrast with the expressions of the new images in terms of aftersets, the expressions of the new compositions in terms of after- and foresets are not so elegant. For instance, the subcomposition can be expressed as follows

$$R \triangleleft S = \left(\bigcap_{y \in Y} ((\text{co}(Ry) \times Z) \cup (Ry \times yS)) \right) \cap \left(\bigcup_{y \in Y} (Ry \times Z) \right).$$

4.3.4. Convertibility. Important relationships exist between the converses of the compositions of two relations and the compositions of the converses of these relations. These convertibility properties are a welcome help when proving other properties.

Properties 4.7. (Convertibility)

$$\begin{aligned} (R \circ S)^T &= S^T \circ R^T \\ (R \triangleleft S)^T &= S^T \triangleright R^T \\ (R \triangleright S)^T &= S^T \triangleleft R^T \\ (R \diamond S)^T &= S^T \diamond R^T. \end{aligned}$$

4.4. Monotonicity

In this subsection the relationship is investigated between the compositions of a subrelation of a relation and the compositions of this latter relation and a given relation.

Properties 4.8. (Monotonicity)

$$\begin{aligned} R_1 \subseteq R_2 &\Rightarrow R_1 \circ S \subseteq R_2 \circ S \\ (\text{dom}(R_1) = \text{dom}(R_2) \wedge R_1 \subseteq R_2) &\Rightarrow R_2 \triangleleft S \subseteq R_1 \triangleleft S \\ R_1 \subseteq R_2 &\Rightarrow R_1 \triangleright S \subseteq R_2 \triangleright S \\ S_1 \subseteq S_2 &\Rightarrow R \circ S_1 \subseteq R \circ S_2 \\ S_1 \subseteq S_2 &\Rightarrow R \triangleleft S_1 \subseteq R \triangleleft S_2 \\ (\text{rng}(S_1) = \text{rng}(S_2) \wedge S_1 \subseteq S_2) &\Rightarrow R \triangleright S_2 \subseteq R \triangleright S_1. \end{aligned}$$

Proof. As an example, the second property is proven:

$$(x, z) \in R_2 \triangleleft S \Leftrightarrow \emptyset \subset xR_2 \subseteq Sz \Rightarrow \emptyset \subset xR_1 \subseteq Sz \Leftrightarrow (x, z) \in R_1 \triangleleft S. \diamond$$

4.5. Interaction with union and intersection

As for the images the relationship is investigated between the compositions of the union and the intersection of an arbitrary family of relations and a given relation and the union and the intersection of the compositions of each of these relations and that given relation.

Consider an arbitrary non-empty family $(R_i)_{i \in I}$ of relations from X to Y and a relation S from Y to Z .

Properties 4.9. (Interaction with union)

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) \circ S &= \bigcup_{i \in I} (R_i \circ S) \\ \bigcap_{i \in I} (R_i \triangleleft S) &\subseteq \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) \triangleleft S \subseteq \bigcup_{i \in I} (R_i \triangleleft S) \\ \left(\bigcup_{i \in I} R_i \right) \triangleright S &\supseteq \bigcup_{i \in I} (R_i \triangleright S). \end{aligned}$$

Properties 4.10. (Interaction with intersection)

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{i \in I} R_i \right) \circ S &\subseteq \bigcap_{i \in I} (R_i \circ S) \\ \left(\bigcap_{i \in I} R_i \right) \triangleright S &= \bigcap_{i \in I} (R_i \triangleright S). \end{aligned}$$

Similarly, consider a relation R from X to Y and an arbitrary non-empty family $(S_i)_{i \in I}$ of relations from Y to Z .

Properties 4.11. (Interaction with union)

$$\begin{aligned} R \circ \left(\bigcup_{i \in I} S_i \right) &= \bigcup_{i \in I} (R \circ S_i) \\ R \triangleleft \left(\bigcup_{i \in I} S_i \right) &\supseteq \bigcup_{i \in I} (R \triangleleft S_i) \\ \bigcap_{i \in I} (R \triangleright S_i) &\subseteq R \triangleright \left(\bigcup_{i \in I} S_i \right) \subseteq \bigcup_{i \in I} (R \triangleright S_i). \end{aligned}$$

Properties 4.12. (Interaction with intersection)

$$\begin{aligned} R \circ \left(\bigcap_{i \in I} S_i \right) &\subseteq \bigcap_{i \in I} (R \circ S_i) \\ R \triangleleft \left(\bigcap_{i \in I} S_i \right) &= \bigcap_{i \in I} (R \triangleleft S_i). \end{aligned}$$

4.6. Associativity

Compared to the study of the images, a new issue comes up in the study of the compositions, namely that of associativity. It is well-known that the classical composition of relations is associative. In this subsection other possible associativity properties are investigated.

Consider a relation R from X to Y , a relation S from Y to Z and a relation T from Z to U .

Properties 4.13. (Associativity)

$$\begin{aligned} R \circ (S \circ T) &= (R \circ S) \circ T \\ R \circ (S \triangleright T) &\subseteq (R \circ S) \triangleright T \\ R \triangleleft (S \circ T) &\supseteq (R \triangleleft S) \circ T \\ R \triangleleft (S \triangleleft T) &\subseteq (R \circ S) \triangleleft T \\ R \triangleleft (S \triangleright T) &= (R \triangleleft S) \triangleright T \\ R \triangleright (S \circ T) &\supseteq (R \triangleright S) \triangleright T. \end{aligned}$$

Proofs.

2. First note that

$$\begin{aligned} (x, u) \in R \circ (S \triangleright T) &\Leftrightarrow xR \cap (S \triangleright T)u \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow (\exists y \in xR)(y \in (S \triangleright T)u) \\ &\Leftrightarrow (\exists y \in xR)(\emptyset \subset Tu \subseteq yS) \\ &\Leftrightarrow (\exists y \in xR)(\forall z \in Tu)(z \in yS) \wedge Tu \neq \emptyset \quad (A) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (x, u) \in (R \circ S) \triangleright T &\Leftrightarrow \emptyset \subset Tu \subseteq x(R \circ S) \\ &\Leftrightarrow (\forall z \in Tu)(z \in x(R \circ S)) \wedge Tu \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow (\forall z \in Tu)(xR \cap Sz \neq \emptyset) \wedge Tu \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow (\forall z \in Tu)(\exists y \in xR)(y \in Sz) \wedge Tu \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow (\forall z \in Tu)(\exists y \in xR)(z \in yS) \wedge Tu \neq \emptyset \quad (B). \end{aligned}$$

Comparing expressions (A) and (B) shows that expression (B) follows from expression (A) but not conversely. Hence $R \circ (S \triangleright T) \subseteq (R \circ S) \triangleright T$.

3. Follows immediately from the foregoing property using the convertibility properties.

$$\begin{aligned} T^T \circ (S^T \triangleright R^T) &\subseteq (T^T \circ S^T) \triangleright R^T \\ &\Leftrightarrow (T^T \circ (S^T \triangleright R^T))^T \subseteq ((T^T \circ S^T) \triangleright R^T)^T \\ &\Leftrightarrow (S^T \triangleright R^T)^T \circ T \subseteq R \triangleleft (T^T \circ S^T)^T \\ &\Leftrightarrow (R \triangleleft S) \circ T \subseteq R \triangleleft (S \circ T). \end{aligned}$$

4. First note that

$$\begin{aligned}
 (x, u) \in R \triangleleft (S \triangleleft T) &\Leftrightarrow \emptyset \subset xR \subseteq (S \triangleleft T)u \\
 &\Leftrightarrow xR \neq \emptyset \wedge (\forall y \in xR)(y \in (S \triangleleft T)u) \\
 &\Leftrightarrow xR \neq \emptyset \wedge (\forall y \in xR)(\emptyset \subset yS \subseteq Tu) \\
 &\Leftrightarrow xR \neq \emptyset \wedge (\forall y \in xR)(yS \neq \emptyset) \wedge (\forall y \in xR)(\forall z \in yS)(z \in Tu) \quad (A)
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 (x, u) \in (R \circ S) \triangleleft T &\Leftrightarrow \emptyset \subset x(R \circ S) \subseteq Tu \\
 &\Leftrightarrow (\exists z \in Z)(z \in x(R \circ S)) \wedge (\forall z \in Z)(z \in x(R \circ S) \Rightarrow z \in Tu) \\
 &\Leftrightarrow (\exists z \in Z)(xR \cap Sz \neq \emptyset) \wedge (\forall z \in Z)(xR \cap Sz \neq \emptyset \Rightarrow z \in Tu) \quad (B).
 \end{aligned}$$

It is easy to show that expression (B) can be deduced from expression (A).

Indeed, from $xR \neq \emptyset \wedge (\forall y \in xR)(yS \neq \emptyset)$ it follows that $(\exists y \in Y)(\exists z \in Z)(y \in xR \wedge z \in yS)$ and thus $(\exists z \in Z)(xR \cap Sz \neq \emptyset)$. Consider $z \in Z$ such that $xR \cap Sz \neq \emptyset$. This means that $(\exists y \in Y)(y \in xR \wedge y \in Sz)$ and thus $(\exists y \in Y)(y \in xR \wedge z \in yS)$. With (A) it follows that $z \in Tu$, and hence (B). Notice that from (B) it does not follow that $(\forall y \in xR)(yS \neq \emptyset)$!

$$\begin{aligned}
 5. \quad (x, u) \in R \triangleleft (S \triangleright T) &\Leftrightarrow \emptyset \subset xR \subseteq (S \triangleright T)u \\
 &\Leftrightarrow xR \neq \emptyset \wedge (\forall y \in xR)(y \in (S \triangleright T)u) \\
 &\Leftrightarrow xR \neq \emptyset \wedge (\forall y \in xR)(\emptyset \subset Tu \subseteq yS) \\
 &\Leftrightarrow xR \neq \emptyset \wedge Tu \neq \emptyset \wedge (\forall y \in xR)(\forall z \in Tu)(z \in yS) \\
 &\Leftrightarrow xR \neq \emptyset \wedge Tu \neq \emptyset \wedge (\forall z \in Tu)(\forall y \in xR)(y \in Sz) \\
 &\Leftrightarrow Tu \neq \emptyset \wedge (\forall z \in Tu)(\emptyset \subset xR \subseteq Sz) \\
 &\Leftrightarrow \emptyset \subset Tu \subseteq x(R \triangleleft S) \\
 &\Leftrightarrow (x, u) \in (R \triangleleft S) \triangleright T.
 \end{aligned}$$

6. Follows immediately from the fourth property using the convertibility properties. \diamond

Remark 4.2.

- Only the first property is an example of genuine associativity, while the fifth property can be seen as some kind of mixed associativity. Due to the equalities in these properties the following notations are justified: $R \circ S \circ T$ and $R \triangleleft S \triangleright T$.
- For their definitions, Bandler and Kohout found the following associativity properties

$$R \triangleleft_{bk} (S \triangleleft_{bk} T) = (R \circ S) \triangleleft_{bk} T$$

$$R \triangleleft_{bk} (S \triangleright_{bk} T) = (R \triangleleft_{bk} S) \triangleright_{bk} T$$

$$R \triangleright_{bk} (S \circ T) = (R \triangleright_{bk} S) \triangleright_{bk} T.$$

Comparing these results with properties 4.13 shows that for the improved definitions the first and the third of these equalities become inequalities. Moreover, some new properties have been discovered.

- Concerning the fourth property it is easy to show that the equality does not hold in general. Let $X = \{x\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z\}$ and $U = \{u\}$. Let $R = \{(x, y_1), (x, y_2)\}$, $S = \{(y_1, z)\}$ and $T = \{(z, u)\}$. It is easy to see that $(x, u) \in (R \circ S) \triangleleft T$ while $(x, u) \notin R \triangleleft (S \triangleleft T)$.

5. Conclusion

It has been shown that the compositions of Bandler and Kohout are subject to some improvement. Modified definitions have been suggested and have been studied intensively. Throughout the overview of their properties, it has been indicated that most of the properties of the Bandler-Kohout compositions are no longer valid for the new definitions. Similar to the new compositions, new images of a set under a relation have been introduced and have been discussed in detail. This paper serves as a reference for researchers working with compositions of relations.

Acknowledgement. The authors are grateful to the National Fund for Scientific Research (Belgium).

References

- [1] BANDLER, W. and KOHOUT, L. J.: Fuzzy relational products as a tool for analysis and synthesis of the behaviour of complex natural and artificial systems, in *Fuzzy Sets: Theory and Application to Policy Analysis and Information Systems* (eds.: S. K. Wang and P. P. Chang), Plenum Press, New York and London 1980, 341-367.
- [2] BANDLER, W. and KOHOUT, L. J.: Semantics of implication operators and fuzzy relational products, *International Journal of Man-Machine Studies* 12 (1980), 89-116.
- [3] BANDLER, W. and KOHOUT, L. J.: A survey of fuzzy relational products in their applicability to medicine and clinical psychology, in *Knowledge Representation in Medicine and Clinical Behavioural Science* (eds.: W. Bandler and L. J. Kohout), Abacus Press, Cambridge and Turnbridge Wells, 1986, 107-118.

- [4] KOHOUT, L. J., KERAVNOU, E. and BANDLER, W.: Automatic documentary information retrieval by means of fuzzy relational products, *TIMS/Studies in the Management Sciences* 20, Elsevier Science Publishers, North-Holland, 1984, 383-404.
- [5] KOHOUT, L. J., KERAVNOU, E. and BANDLER, W.: Information retrieval system using fuzzy relational products for thesaurus construction, in *IFAC Fuzzy Information*, Marseille, France, 1988, 7-13.
- [6] DE BAETS, B.: Theoretical basis for some modules from an environment for fuzzy relational calculus, Postgraduate Thesis in Knowledge Technology, University of Gent, Belgium (in Dutch), 1991.
- [7] DUBOIS, D. and PRADE, H.: Upper and lower images of a fuzzy set induced by a fuzzy relation - A fresh look at fuzzy inference and diagnosis, in *Fuzzy Expert Systems*, (ed.: A. Kandel), Addison-Wesley.
- [8] IZUMI, K., TANAKA, H. and ASAI, K.: Adjointness of fuzzy systems, *Fuzzy Sets and Systems* 20 (1986), 211-221.
- [9] KERRE, E.: Fuzzy sets and approximate reasoning, *Lecture notes for the course Special Topics in Computer Sciences*, University of Nebraska, Lincoln, USA, 1990.

ENDOMORPHISMS OF GROUP AUTOMATA

S. C. Geller

*Department of Mathematics, Texas A & M University, Collage
Station, Texas 77843-3368*

P. Natarajan

*Department of Mathematics, Texas A & M University, Collage
Station, Texas 77843-3368*

K. C. Smith

*Department of Mathematics, Texas A & M University, Collage
Station, Texas 77843-3368*

Received September 1991

AMS Subject Classification: 68 Q 68, 16 Y 30

Keywords: Automaton, endomorphism.

Abstract: Relationships between the structure of a group automaton M and its semigroup of endomorphisms $\text{End } M$ are found. It is shown that $\text{End } M$ is trivial precisely when M is strongly connected. Moreover if $\text{End } M$ consists solely of linear maps then M has at most two components. Conditions are found as to when $\text{End } M$ contains only linear maps.

1. Introduction

In [3] Maxson and Smith studied the endomorphism semigroup of a linear automaton. They showed that the endomorphisms of a linear automaton give information about the connectivity, or lack of connectivity, in the automaton. The methods used in [3] relied heavily

on the vector space structure of a linear automaton. It is the goal of this paper to obtain similar results for a group automaton. Since every linear automaton is a group automaton we will generalize the results in [3]. The arguments used are new, relying on the theory of finite groups. We will obtain connectivity results analogous to the linear case. It will soon be clear that our work essentially involves the study of certain maps on a finite group G which commute with a given endomorphism A of G .

The reader is referred to the references in [3] concerning the background of endomorphisms of automata as well as basic information on automata theory.

2. Preliminaries

Let $M \equiv \langle Q, \Sigma, F \rangle$ be a finite automaton with states Q , inputs Σ and transition function $F: Q \times \Sigma \rightarrow Q$. The automaton M is called a *group automaton* if Q and Σ are (finite) groups (written additively but not necessarily abelian) and F is a homomorphism from the group $Q \times \Sigma$ into Q . Throughout this paper $M = \langle Q, \Sigma, F \rangle$ will denote a group automaton with state group Q , input group Σ and state-transition homomorphism F .

The homomorphism $F: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ gives rise to two other homomorphisms as follows. Define $A: Q \rightarrow Q$ by $Aq = F(q, 0)$ and $B: \Sigma \rightarrow Q$ by $B\sigma = F(0, \sigma)$. We have $F(q, \sigma) = F((q, 0) + (0, \sigma)) = F(q, 0) + F(0, \sigma) = Aq + B\sigma$. Moreover, since $(q, 0) + (0, \sigma) = (0, \sigma) + (q, 0)$ in $Q \times \Sigma$, we have $F(q, 0) + F(0, \sigma) = F(0, \sigma) + F(q, 0)$ in Q , or equivalently $Aq + B\sigma = B\sigma + Aq$. This proves the following lemma.

Lemma 1. *If $M = \langle Q, \Sigma, F \rangle$ is a group automaton with $F(q, \sigma) = Aq + B\sigma$ then every element in the range of A commutes with every element in the range of B . In particular if A is an automorphism of Q then W , the range of B , is a subgroup of the center of Q and therefore a normal subgroup of Q .*

In our investigation of the endomorphisms of the group automaton M we will make use of group theory results which we now review. Let G be a finite group and let $A: G \rightarrow G$ be an endomorphism of G . For each positive integer i , A^i is an endomorphism of G and we have a descending chain

$$G > A(G) > A^2(G) > \dots > A^i(G) > \dots$$

of subgroups of G . Since G is finite, there exists an integer $k > 0$ such that $A^k(G) = A^{k+1}(G) = \dots$, which implies $\ker A^k = \ker A^{k+1} = \dots$. Let $H = A^k(G)$ and $K = \ker A^k$. Then $H \cap K = \{0\}$, for if $x \in H \cap K$ then $A^k x = 0$, but A^k is one-to-one on H , so $x = 0$.

We show now that G is the sum of H and K . If $x \in G$ then there exists a $y \in H$ such that $A^k x = A^{2k} y$. We have $x = A^k y + (-A^k y + x)$ where $A^k y \in H$, and $-A^k y + x$ belongs to K since $A^k(-A^k y + x) = -A^{2k} y + A^k x = 0$. So $G = H + K$. Therefore G is a semidirect product of H and K since K is normal in G . This proves a version of Fitting's Lemma (see [2], page 84).

Lemma 2. *If G is a finite group and $A: G \rightarrow G$ is an endomorphism, then every $x \in G$ has the unique form $x = x_1 + x_0$ where, for some $k > 0$, $A^k x_1 = x_1$ and $A^k x_0 = 0$.*

Referring to Lemma 2, we will call an element $x_1 \in G$ such that $A^k x_1 = x_1$ for some $k > 0$ an *invertible element*. If $x_2 \in G$ such that $A^k x_2 = 0$ for some $k > 0$, then x_2 is a *nilpotent element*. From Lemma 2 every element in G is (uniquely) the sum of an invertible and a nilpotent element.

In $M = \langle Q, \Sigma, F \rangle$ we extend Σ to the free monoid Σ^* over Σ consisting of all finite sequences of elements of Σ (inputs), including the empty sequence \emptyset . If $w \in \Sigma^*$ then $w = \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_{n-1}$ where $\sigma_i \in \Sigma$ and one defines, for $q \in Q$,

$$\begin{aligned} F(q, w) &= F(q, \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_{n-1}) = F(F(q, \sigma_0), \sigma_1 \dots \sigma_{n-1}) = \\ &= F(F(F(q, \sigma_0), \sigma_1), \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}) = \dots \\ &= F(F(\dots F(F(q, \sigma_0), \sigma_1), \sigma_2), \dots, \sigma_{n-2}), \sigma_{n-1}). \end{aligned}$$

In terms of A, B we have

$$F(q, w) = A^n q + A^{n-1} B \sigma_0 + A^{n-2} B \sigma_1 + \dots + AB \sigma_{n-2} + B \sigma_{n-1}.$$

If $w = \emptyset$, the empty sequence, then we define $F(q, \emptyset) = q$.

In a group automaton $M = \langle Q, \Sigma, F \rangle$ we define, for $q \in Q$, the *reach* of q to be $\text{reach}(q) = \{q' \in Q \mid F(q, w) = q' \text{ for some } w \in \Sigma^*\}$. So $\text{reach}(q) = \{A^n q + A^{n-1} B \sigma_0 + \dots + AB \sigma_{n-2} + B \sigma_{n-1} \mid n \text{ is a nonnegative integer and each } \sigma_i \in \Sigma\}$. Finally the component of q in Q is defined to be $\text{comp}(q) = \{q' \in \text{reach}(q) \mid \text{there exists a } w' \in \Sigma^* \text{ with } F(q', w') = q\}$.

Lemma 3. *In a group automaton. $\text{comp}(0) = \text{reach}(0)$*

Proof. Clearly $\text{comp}(0) \subseteq \text{reach}(0)$. Let $x \in \text{reach}(0)$. Then there exists a positive integer k and elements $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k$ in Σ such that $x = A^k B \sigma_0 + \dots + AB \sigma_{k-1} + B \sigma_k$.

Suppose x is invertible. Then there exists a positive integer s such that $x = A^s x = A^{2s} x = \dots$; so we may assume $s > k$. Let $w = 0 \dots 0(-\sigma_0)(-\sigma_1) \dots (-\sigma_k)$ ($s - k - 1$ zeros). Then (using Lemma 1 repeatedly)

$$\begin{aligned} F(x, w) &= F(A^{s-k-1} x, (-\sigma_0)(-\sigma_1) \dots (-\sigma_k)) = \\ &= A^s x - A^k B \sigma_0 - \dots - AB \sigma_{k-1} - B \sigma_k = \\ &= A^s x - (B \sigma_k + AB \sigma_{k-1} + \dots + A^k B \sigma_0) = \\ &= A^s x - (A^k B \sigma_0 + \dots + AB \sigma_{k-1} + B \sigma_k) = x - x = 0. \end{aligned}$$

So $x \in \text{comp}(0)$.

Suppose x is nilpotent with $A^s x = 0$. Then let $w = 0 \dots 0$ (s zeros) and we have $F(x, w) = A^s x = 0$. So $x \in \text{comp}(0)$.

For x arbitrary we have $x = x_1 + x_0$ where x_1 is invertible and x_0 is nilpotent. So if $A^t x_0 = 0$ and $A^s x_1 = x_1$, then $A^s A^t x = A^t x$. Let $w = 0 \dots 0$ ($s - k - 1$ zeros) and $\tilde{w} = 0 \dots 0$ (t zeros). Then $F(x, w(-\sigma_0) \dots (-\sigma_k) \tilde{w}) = A^{s+t} x - A^t x = 0$ as above. Thus x belongs to $\text{comp}(0)$. \diamond

Lemma 4. In a group automaton $M = \langle Q, \Sigma, F \rangle$, $\text{comp}(0)$ is a subgroup of Q . If A is invertible then $\text{comp}(0)$ is a normal subgroup of Q contained in the center of Q .

Proof. From Lemma 3 $\text{comp}(0) = \{A^n B \sigma_0 + \dots + AB \sigma_{n-1} + B \sigma_n \mid n \text{ is a nonnegative integer and } \sigma_i \in \Sigma\}$. Repeated use of Lemma 1 shows $\text{comp}(0)$ is closed under addition. The normality of $\text{comp}(0)$ when A is invertible follows from Lemma 1 and the fact that every element in Q has the form Ax , so each $A^i B \sigma_{n-i}$ belongs to the center of Q . \diamond

3. Endomorphisms of group automata

An *endomorphism* of a group automaton $M = \langle Q, \Sigma, F \rangle$ is a function $g: Q \rightarrow Q$ such that $g(F(q, \sigma)) = F(g(q), \sigma)$ for all $q \in Q, \sigma \in \Sigma$. In terms of the linear maps $A: Q \rightarrow Q$ and $B: \Sigma \rightarrow Q$ for M we have that g is an endomorphism of M if $g(Aq + B\sigma) = Ag(q) + B\sigma$ for all $q \in Q, \sigma \in \Sigma$. We let $\text{End } M$ denote the set of endomorphisms of M .

For $g \in \text{End } M$ we can write $g = 1 + (-1 + g)$ where $1: Q \rightarrow Q$ is the identity map. The function $-1 + g$ has the property that

$$\begin{aligned}
 (-1 + g)(Aq + B\sigma) &= -(Aq + B\sigma) + g(Aq + B\sigma) = \\
 &= -B\sigma - Aq + Ag(q) + B\sigma = -Aq + Ag(q) = \\
 &= A(-1 + g)(q).
 \end{aligned}$$

So if $g \in \text{End } M$ then the function $-1 + g$ belongs to the set

$$T \equiv \{f: Q \rightarrow Q \mid f(Aq + B\sigma) = Af(q), q \in Q, \sigma \in \Sigma\}.$$

Conversely it is easy to verify that if $f \in T$ then $1 + f$ is in $\text{End } M$.

Lemma 5. $\text{End } M = 1 + T$.

In creating endomorphisms of a group automaton M we will find it convenient to create elements of T and then use Lemma 5. The properties of functions in T are listed in the following result.

Lemma 6. *If $f: Q \rightarrow Q$ belongs to T then*

- (i) $fA = Af$;
- (ii) $f(0)$ is a fixed point of A , that is $Af(0) = f(0)$;
- (iii) $f(x) = f(0)$ for all x in $\text{comp}(0)$;
- (iv) If A is invertible then f is constant on each left coset of $\text{comp}(0)$ in Q .

Proof. Parts (i) – (iii) are easily proved. For (iv) we note that Q finite and A an automorphism mean $A^k = 1$, the identity map, for some positive integer k . If $x, y \in Q$ such that $-x + y \in \text{comp}(0)$, then there exist elements $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_t \in \Sigma$ such that

$$y = x + A^t B\sigma_0 + \dots + AB\sigma_{t-1} + B\sigma_t.$$

There exists an $s > t$ such that $x = A^s x$ so

$$y = A^s x + A^t B\sigma_0 + \dots + AB\sigma_{t-1} + B\sigma_t$$

and repeated use of the fact that $f \in T$ gives $f(y) = A^s f(x) = f(A^s x) = f(x)$. \diamond

An automaton $M = \langle Q, \Sigma, F \rangle$ is called *strongly connected* if $\text{comp}(0) = Q$. Our next result says that if M is strongly connected then its endomorphisms are, in a sense, trivial, i.e. translation maps using fixed points of A .

Theorem 1. *If $M = \langle Q, \Sigma, F \rangle$ is strongly connected then $\text{End } M = \{g: Q \rightarrow Q \mid g(x) = x + a \text{ where } a \in Q \text{ such that } Aa = a\}$.*

This follows directly from Lemmas 5 and 6 (iii). \diamond

We now begin to show that the converse of Th. 1 is also true, that is, if $M = \langle Q, \Sigma, F \rangle$ is not strongly connected then $\text{End } M$ contains functions which are not translation maps. We split our investigation up into two cases: A invertible and A not invertible. In the invertible case we will need a group theory result, found in [1], page 334. Recall

that an automorphism A of a group G is fixed point free if $Ax = x$ only when $x = 0$.

Lemma 7. *Let G be a finite group and let $A: G \rightarrow G$ be a fixed point free automorphism of G . Then every element in G can be uniquely expressed in the form $-x + Ax$ for a suitable x in G .*

Proof. Suppose $x, y \in G$ with $-x + Ax = -y + Ay$. Then $y - x = A(y - x)$. Since A is fixed point free then $y - x = 0$ or $y = x$. This shows that the map $h: G \rightarrow G$ defined by $h(x) = -x + Ax$ is one-to-one. Since G is finite, h is onto. \diamond

Corollary 1. *Let G be a finite group and let $A: G \rightarrow G$ be a fixed point free automorphism. If W is an A -invariant subgroup of G , then $-x + Ax$ belongs to W if and only if x belongs to W .*

Proof. Since W is A -invariant, $x \in W$ implies $-x + Ax \in W$. Suppose now that x belongs to G with $-x + Ax$ in W . Since W is A -invariant, A is fixed point free on W , and so by Lemma 7 there is a $w \in W$ such that $-x + Ax = -w + Aw$. But A is fixed point free on G , so $w = x$ and $x \in W$.

Corollary 2. *Let $A: G \rightarrow G$ be an automorphism of G and let W be an A -invariant subgroup of G . If x belongs to G such that x does not belong to W and if $-x + A^k x$ belongs to W for some positive integer k , then A^k is not fixed point free on G .*

We are assuming that A is invertible and $M = \langle Q, \Sigma, F \rangle$ is not strongly connected. If $H = \text{comp}(0)$, then $H \neq Q$. Select $x \in Q \setminus H$ (so $x \in Q$ but $x \notin H$). We show now that the relation " $y \in \text{reach}(x)$ " is symmetric and transitive if A is invertible.

Suppose $y \in \text{reach}(x)$. Then y has the form $y = A^r x + A^{r-1} B \sigma_0 + \cdots + AB \sigma_{r-2} + B \sigma_{r-1}$ where each $\sigma_j \in \Sigma$. Solving for $A^r x$ gives $A^r x = y + A^{r-1} B(-\sigma_0) + \cdots + AB(-\sigma_{r-2}) + B(-\sigma_{r-1})$, using Lemma 1. Since A is invertible there exists a positive integer $t \geq r$ such that $A^{t-r} = 1$, so $x = A^{t-r} A^r x = A^{t-r} y + A^{t-1} B(-\sigma_0) + \cdots + AB(-\sigma_{r-2}) + B(-\sigma_{r-1})$ and $x \in \text{reach}(y)$.

If $y \in \text{reach}(x)$ and $z \in \text{reach}(y)$ then $y = A^r x + A^{r-1} B \sigma_0 + \cdots + AB \sigma_{r-2} + B \sigma_{r-1}$ and $z = A^s y + A^{s-1} B \tau_0 + \cdots + AB \tau_{s-2} + B \tau_{s-1}$ where each $\sigma_i \in \Sigma$ and each $\tau_j \in \Sigma$. This means $A^s y = A^{s+r} x + A^{s+r-1} B \sigma_0 + \cdots + A^{s+1} B \sigma_{r-2} + A^s B \sigma_{r-1}$ and so

$$\begin{aligned} z &= A^{s+r} x + A^{s+r-1} B \sigma_0 + \cdots + A^{s+1} B \sigma_{r-2} + A^s B \sigma_{r-1} + \\ &\quad + A^{s-1} B \tau_0 + \cdots + AB \tau_{s-2} + B \tau_{s-1} \end{aligned}$$

and $z \in \text{reach}(x)$.

The following lemma describes $\text{comp}(x)$.

Lemma 8. *Let A be invertible and $M = \langle Q, \Sigma, F \rangle$ be not strongly connected. If $x \in Q \setminus \text{comp}(0)$ then $\text{comp}(x) = \text{reach}(x) = \bigcup_{i=0}^{k-1} A^i x + \text{comp}(0)$ where k is minimal such that $-x + A^k x$ belongs to $\text{comp}(0)$.*

Proof. Since Q is finite and A is an automorphism of Q there exists a positive integer s such that $A^s = 1$, the identity map on Q . Let $H = \text{comp}(0)$, a normal subgroup of Q by Lemma 4. For $x \in Q \setminus H$ we have $\text{comp}(x) \subseteq \text{reach}(x) = \{A^r x + A^{r-1} B \sigma_0 + \dots + A B \sigma_{r-2} + B \sigma_{r-1} \mid r \text{ is a positive integer and each } \sigma_i \in \Sigma\} = \bigcup_{i=0}^{s-1} A^i x + H = \bigcup_{i=0}^{k-1} A^i x + H$, where k is minimal such that $-x + A^k x \in H$. Conversely

if $y \in \bigcup_{i=0}^{k-1} A^i x + H$ then

$$y = A^t x + A^j B \sigma_0 + \dots + A B \sigma_{j-1} + B \sigma_j$$

where each $\sigma_i \in \Sigma$. Since $A^s = 1$, we can change t if necessary so that $t > j$. We now have $y = A^t x + \sum_{i=0}^{t-1} A^i B \sigma_{t-1-i}$ where some of the σ_i 's may be 0. Hence $y = F(x, w)$ where $w = \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_{t-1}$ and $y \in \text{comp}(x)$. \diamond

Proposition 1. *If A is invertible then the group automaton $M = \langle Q, \Sigma, F \rangle$ is strongly connected iff $\text{End } M$ is trivial.*

Proof. It suffices to show that, if M is not strongly connected, then $\text{End } M$ is not trivial. Select $x \in Q \setminus H$ where $H = \text{comp}(0)$ and let $k > 0$ be minimal such that $-x + A^k x \in H$. Since H is A -invariant, by Cor. 2 A^k is not fixed point free on Q . So there exists a $y \neq 0$ in Q such that $A^k y = y$. Define $f: Q \rightarrow Q$ as follows:

(i) if $z \in \text{comp}(x)$, whence $z = A^i x + h$ where $h \in H$, let $f(z) = f(A^i x + h) = A^i y$,

(ii) if $z \notin \text{comp}(x)$, let $f(z) = 0$.

We need to show f is well-defined. Assume $z = A^i x + h = A^j x + h'$ where $h' \in H$ and $j \geq i$. Then $-A^i x + A^j x = h - h' = A^i(-x + A^{j-i} x)$ belongs to H . Since H is A -invariant, $-x + A^{j-i} x$ belongs to H , so k divides $j - i$ due to the minimality of k . This implies that $f(z) = A^j y = A^i y$ since $A^k y = y$. So f is well-defined.

We now show that f belongs to T . If $z \notin \text{comp}(x)$ then $Az + B\sigma \notin \text{comp}(x)$ for any $\sigma \in \Sigma$ and conversely since A is invertible. We have

$f(Az + B\sigma) = 0 = Af(z)$. If $z \in \text{comp}(x)$ then $z = A^i x + h$ where $0 \leq i < k$ and $h \in H$. For $\sigma \in \Sigma$ we have $Ah + B\sigma \in H$ and

$$\begin{aligned} f(Az + B\sigma) &= f(A^{i+1}x + Ah + B\sigma) \\ &= \begin{cases} A^{i+1}y & \text{if } 0 \leq i+1 < k \\ y & \text{if } i+1 = k \end{cases} \\ &= Af(z). \end{aligned}$$

So f belongs to T and f is not constant. Hence $\text{End } M = 1 + T$ is not trivial.

We now can describe all the functions in T and hence all the endomorphisms of M . Since Q is finite we have elements $x_1, \dots, x_t \in Q \setminus H$ with

$$Q = \text{comp}(x_0) \cup \text{comp}(x_1) \cup \dots \cup \text{comp}(x_t),$$

where $\text{comp}(x_0) = \text{comp}(0) = H$ and $\text{comp}(x_i) \cap \text{comp}(x_j) = \emptyset$ if

$i \neq j$. By Lemma 8, $\text{comp}(x_j) = \bigcup_{i=0}^{k_j-1} A^i x_j + H$ where $k_j > 0$ is minimal

such that $-x_j + A^{k_j} x_j \in H$. (Each component of Q is a union of cosets of H in Q .) By Lemma 6 part (iv) each $f \in T$ is constant on any coset of H in Q . So to define a function f in T it is enough to define f on x_0, x_1, \dots, x_t . Moreover we must have $f(x_j) = y_j$ where $A^{k_j} y_j = y_j$. It is now easy to check that $f: Q \rightarrow Q$ defined by $f(A^i x_j + h) = A^i y_j$ is a function belonging to T . \diamond

If A is not invertible we have the same result but by a different route.

Proposition 2. *If A is not invertible then the group automaton $M = \langle Q, \Sigma, F \rangle$ is strongly connected iff $\text{End } M$ is trivial.*

Proof. Again it is enough to show that, if M is strongly connected, then $\text{End } M$ is not trivial. We split the argument up into two cases.

Case 1: Assume $\text{reach}(x) \cap H = \emptyset$ for every $x \in Q \setminus H$ where $H = \text{comp}(0)$. From Lemma 2 we have $Q = G_1 + G_0$, a semidirect sum of subgroups G_1, G_0 where G_1 contains the A -invertible elements and G_0 consists of the A -nilpotent elements of Q . Our assumption in Case 1 implies $H \supseteq G_0$. Since $H \supseteq G_0$ and since every element in G_1 belongs to the range of A , Lemma 1 implies that H is a normal subgroup of Q . If $x \in Q \setminus H$ then $x = x_1 + x_0$ where x_1 is invertible and x_0 is nilpotent. Since $\text{reach}(x) \cap H = \emptyset, x_1 \neq 0$. As in the proof of Lemma 8 we have

$\text{reach}(x) = \text{reach}(x_1) = \text{comp}(x_1)$. Also $\text{comp}(x_1) = \bigcup_{j=0}^{k-1} A^j x_1 + H$

where $k > 0$ is minimal such that $-x_1 + A^k x_1$ belongs to H . Since G_1 is a group and since A restricted to G_1 is an automorphism of G_1 , Cor. 2 implies that A^k is not fixed point free on G_1 . So there exists a $y \in G_1$ such that $y \neq 0$ and $A^k y = y$. Define $f: Q \rightarrow Q$ as follows:

- (i) if $z \in \text{reach}(x) = \text{reach}(x_1) = \text{comp}(x_1)$ with $z = A^i x_1 + h$, then $f(z) = f(A^i x_1 + h) = A^i y$;
- (ii) if $z \notin \text{reach}(x)$ then $f(z) = 0$.

As in the proof of Th. 2, f is well defined, it belongs to T and is not constant. So $\text{End } M = 1 + T$ is not trivial.

Case 2: Assume that A is not invertible and that there exists an $x \in Q \setminus H$ such that $\text{reach}(x) \cap H \neq \emptyset$. For $y \in Q$ let y have H -order $n > 0$ if $A^n y \in H$ but $A^{n-1} y \notin H$. If $A^n y \notin H$ for all n then y has H -order ∞ . If $y \in H$ then y has H -order 0 . Our assumption in Case 2 means that there exist elements in Q of finite H -order greater than 0 .

Let $x \in Q \setminus H$ have finite H -order $n > 0$. So $A^n x \in H$. From Lemma 2, $x = x_1 + x_0$, where x_1 is invertible and x_0 is nilpotent. Since $A^n x = A^n x_1 + A^n x_0$ belongs to H and since x_1 is invertible, we must have $x_1 \in H$. This means x_0 has H -order n .

For $x_0 \in Q$ such that $x_0 \neq 0$ is nilpotent let $n > 0$ be such that $A^n x_0 = 0$ but $A^{n-1} x_0 \neq 0$. Call n the *nilpotent order* of x_0 . Among all the nilpotent elements in Q select z_0 to have maximal nilpotent order, say $k > 0$. From the above observation, if $x \in Q$ has finite H -order t then $t \leq k$.

Define $f: Q \rightarrow Q$ as follows:

- (i) $f(y) = 0$ if y has H -order 0 or ∞ ;
- (ii) $f(y) = A^{k-i} z_0$ if y has H -order $i > 0$.

We show now that f belongs to T . If $Ay + B\sigma$ has H -order $i > 0$ then y has H order $i + 1$ and

$$f(Ay + B\sigma) = A^{k-i} z_0 = AA^{k-(i+1)} z_0 = Af(y).$$

If $Ay + B\sigma$ has H -order 0 then y has H -order 0 or 1 , so

$$f(Ay + B\sigma) = 0 = Af(y).$$

If $Ay + B\sigma$ has H -order ∞ then so does y and conversely. Thus $f(Ay + B\sigma) = 0 = Af(y)$. This shows $f \in T$. Since $k > 1$ then f is not the zero function, and T does not consist of constant maps, i.e. $\text{End } M$ is not trivial. \diamond

Propositions 1 and 2 establish the following theorem.

Theorem 2. *A group automaton $M = \langle Q, \Sigma, F \rangle$ is strongly connected iff $\text{End } M$ is trivial, i.e. $\text{End } M = \{g: Q \rightarrow Q \mid g(x) = x + a \text{ with } Aa = a\}$.*

4. Linear endomorphisms

If $M = \langle Q, \Sigma, F \rangle$ is a group automaton, is it possible that $\text{End } M$ consists only of linear maps? If M is strongly connected then Th. 1 implies $\text{End } M$ is linear iff the only fixed point of A is 0, in which case $\text{End } M = \{1\}$. If M is not strongly connected it can happen that $\text{End } M$ is linear.

We investigate the linearity of $\text{End } M$ only when A is invertible. Then Q is partitioned into disjoint components $Q = \text{comp}(x_0) \cup \text{comp}(x_1) \cup \dots \cup \text{comp}(x_n)$ where $\text{comp}(x_0) = \text{comp}(0) = H$, and $\text{comp}(x_i) = \bigcup_{j=0}^{k_i-1} A^j x_i + H$ where $k_i > 0$ is minimal such that

$$-x_i + A^{k_i} x_i \in H.$$

Proposition 3. *Suppose $M = \langle Q, \Sigma, F \rangle$ and A is invertible. Let Q be the union of at least three disjoint components. Then $\text{End } M$ contains nonlinear maps.*

Proof. We have $Q = \text{comp}(0) \cup \text{comp}(x_1) \cup \text{comp}(x_2) \cup \dots \cup \text{comp}(x_n)$, a disjoint union as above. Define $f: Q \rightarrow Q$ as follows: let $f(z) = 0$ if $z \notin \text{comp}(x_1)$ and $f(x_1) = y$ where $y \neq 0$ is such that $A^{k_1} y = y$. Then f belongs to T and $g = 1 + f$ belongs to $\text{End } M$ by Lemma 5. Suppose $x_1 + x_2 \notin \text{comp}(x_1)$, then $g(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 \neq x_1 + y + x_2 = g(x_1) + g(x_2)$ and g is not linear. So in order for g to be linear we must have $x_1 + x_2 \in \text{comp}(x_1)$. But then define $f': Q \rightarrow Q$ by $f'(z) = 0$ if $z \notin \text{comp}(x_2)$ and $f'(x_2) = y'$ where $A^{k_2} y' = y'$ with $y' \neq 0$. Then $g' = 1 + f'$ belongs to $\text{End } M$ and g' is not linear because $x_1 + x_2 \in \text{comp}(x_1)$ means $g'(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 \neq x_1 + x_2 + y' = g'(x_1) + g'(x_2)$.

The remaining case is the one in which Q has two components, $Q = \text{comp}(0) \cup \text{comp}(x)$. We have $H = \text{comp}(0)$ is a subgroup of the center of Q and $\text{comp}(x) = \bigcup_{i=0}^{k-1} A^i x + H$ where $k > 0$ is minimal such

that $-x + A^k x \in H$.

Lemma 9. *Let Q and H be as above. Then $Q/H \cong Z_p \oplus \dots \oplus Z_p$ for some prime p .*

Proof. $Q/H = \{A^i x + H \mid i = 0, 1, \dots, k-1\} \cup \{0 + H\}$ since $\text{comp}(x) = \bigcup_{i=0}^{k-1} A^i x + H$. The automorphism A of Q induces an automorphism \tilde{A} on Q/H defined by $\tilde{A}(y + H) = Ay + H$. The cyclic group $\langle \tilde{A} \rangle$ acts transitively on the nonzero elements of Q/H , from which

it follows that Q/H is a p -group of exponent p . Since p -groups have nontrivial centers and since the center of a group is invariant under automorphisms, the center of Q/H is all of Q/H , i.e. Q/H is abelian, whence $Q/H \cong Z_p \oplus \cdots \oplus Z_p$. \diamond

Lemma 10. *Let $M = \langle Q, \Sigma, F \rangle$ with A invertible and $Q = \text{comp}(0) \cup \text{comp}(x)$. Let g be an endomorphism of M with $g = 1 + f$ where $f \in T$. Then g is linear if and only if*

$$f(A^i x + A^j x) = -A^j x + f(A^i x) + A^j x + f(A^j x)$$

for all i, j .

Proof. Let $H = \text{comp}(0)$. Since H is a subgroup of the center of Q , $A^i x + h = h + A^i x$ for all i and all $h \in H$. If g is linear then for all i, j and all $h_i, h_j \in H$, we have

$$(1) \quad g(A^i x + h_i + A^j x + h_j) = g(A^i x + h_i) + g(A^j x + h_j).$$

Let $A^i x + h_i + A^j x + h_j = A^t x + h_t$. Then since $g = 1 + f$ we have from (1)

$$A^i x + h_i + A^j x + h_j + f(A^t x) = A^i x + h_i + f(A^i x) + A^j x + h_j + f(A^j x)$$

or

$$A^j x + f(A^t x) = f(A^i x) + A^j x + f(A^j x)$$

or

$$f(A^i x + A^j x) = -A^j x + f(A^i x) + A^j x + f(A^j x).$$

The above steps are reversible. \diamond

Corollary 3. *Let $g \in \text{End}(M)$ with $g = 1 + f$ where $f \in T$. Let $Q = \text{comp}(0) \cup \text{comp}(x)$. Then*

- (i) *if $f(x) \in \text{comp}(0)$ then g is linear if and only if f is linear;*
- (ii) *if Q is abelian then g is linear if and only if f is linear.*

Lemmas 9 and 10 raise the following question: if $\text{End } M$ is linear must T also be linear? If Q is abelian the answer is yes. If $\text{comp}(x) = \bigcup_{i=0}^{k-1} A^i x + H$ and A^k is fixed point free on $\text{comp}(x)$ the answer is yes, for if $f \in T$ then f is completely determined by the value $f(x) = y$ and y must have the property that $A^k y = y$. This means $y \in H = \text{comp}(0)$ and f is linear by Lemma 10 (because y is central).

The question now reduces to the following situation: $Q = \text{comp}(0) \cup \text{comp}(x)$, $\text{comp}(x) = \bigcup_{i=0}^{k-1} A^i x + H$ and there exists a $y \in \text{comp}(x)$ such that $A^k y = y$. Without loss of generality we may

assume $y = x$, i.e. $A^k x = x$. We now define $f: Q \rightarrow Q$ by $f(h) = 0$ if $h \in H = \text{comp}(0)$ and $f(A^i x + h) = A^i x$. Since $A^k x = x$, we have that f belongs to T and $g = 1 + f$ belongs to $\text{End } M$. If g is linear then by Lemma 10

$$(2) \quad f(A^i x + A^j x) = -A^j x + A^i x + A^j x + A^j x$$

for all i, j . If $A^i x + A^j x = A^t x + h$ then (2) says that

$$(3) \quad A^t x = -A^j x + A^i x + A^j x + A^j x.$$

We now define a new binary operation $*$ on the set Q in terms of the old binary operation $+$ as follows: if $y, z \in Q$ then $y * z = -z + y + z + z$. Since Q/H is abelian and since H is a subgroup of the center of Q then every commutator of Q belongs to the center of Q . Because of the above properties of $(Q, +)$, we have that $(Q, *)$ is a group. (To verify associativity, let a, b, c be in Q . Using multiplicative notation and the fact that $c^{-1}b^{-1}cb$ is central gives

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (c^{-1}bcc) = c^{-1}c^{-1}b^{-1}cac^{-1}bcc^{-1}bcc \\ &= c^{-1}(c^{-1}b^{-1}cb)b^{-1}ac^{-1}bcbcc = c^{-1}b^{-1}ac^{-1}bc(c^{-1}b^{-1}cb)bcc \\ &= c^{-1}b^{-1}abbcc = (a * b) * c. \end{aligned}$$

We note that if y or z belongs to the center of $(Q, +)$ then $y * z = y + z$. Since “ $*$ ” is defined in terms of “ $+$ ”, the automorphism A on $(Q, +)$ is also an automorphism on $(Q, *)$. Also $(Q, *) = \text{comp}(0) \cup \cup \text{comp}(x)$ where $H = \text{comp}(0)$ is a subgroup of the center of $(Q, *)$, and A acts transitively on $(Q/H, *)$. Moreover by Lemma 9, $Q/H \cong \cong Z_p \oplus \cdots \oplus Z_p$. We have $\text{comp}(x) = \bigcup_{i=0}^{k-1} A^i x + H$ where $A^k x = x$, k minimal.

By equation (3) we see that $K = \{A^i x \mid i = 0, 1, \dots, k-1\} \cup \{0\}$ is a group under $*$. This means that $(Q, *)$ is a direct sum of H and K and so $(Q, *)$ is abelian.

We now need some group theory results. For these we switch to the multiplicative notation in our finite group Q . As above we define a new group $(Q, *)$ using $a * b = b^{-1}abb$ where $a, b \in Q$.

Lemma 11. *Let G be a group such that $(G, *)$ forms an abelian group then $(ab)^3 = a^3b^3$ for all $a, b \in G$, or equivalently $(ab)^2 = b^2a^2$ for all $a, b \in G$.*

Proof. In $(G, *)$, $a * b = b * a$ for all a, b implies $b^{-1}abb = a^{-1}baa$ for all a, b in G . Rearranging factors gives $b^{-1}ab^{-1}a = aab^{-1}b^{-1}$,

or $ab^{-1}ab^{-1}ab^{-1} = aaab^{-1}b^{-1}b^{-1}$, or $(ab^{-1})^3 = a^3(b^{-1})^3$ for all a, b in G . \diamond

Lemma 12. *Let G be a group such that $(G, *)$ is abelian and such that G' , the commutator subgroup of G , is a subgroup of $Z(G)$, the center of G . Then a^3 belongs to $Z(G)$ for every $a \in G$.*

Proof. By Lemma 11 we have $(ab)^3 = a^3b^3$ for every $a, b \in G$. Since G' is a subgroup of $Z(G)$, $aba^{-1}b^{-1} = c$ is a central element. We have $ab = cba$ and $b^2a^2 = (ab)^2 = abab = c^2baba = c^3b^2a^2$, so $c^3 = 1$. Also $(ab)^3 = ababab = c^3bababa = c^6bbbaaa = b^3a^3$ since $c^3 = 1$. We now have

$$b^3a^3 = (ab)^3 = (ab)^2ab = b^2a^2ab = b^2a^3b$$

which implies $ba^3 = a^3b$, so a^3 is central in G . \diamond

Lemma 13. *Suppose $Q = \text{comp}(0) \cup \text{comp}(x)$ where $\text{comp}(x) = \bigcup_{i=0}^{k-1} A^i x + H$, $H = \text{comp}(0)$ and k is minimal such that $-x + A^k x \in H$.*

If s is a positive integer such that s divides k and $s \neq k$ and if A^s has a fixed point $y \neq 0$ in Q , then $\text{End } M$ contains nonlinear maps.

Proof. We have $A^s y = y$ with $y \neq 0$, $s < k$ and s divides k . We show now that y must belong to H . If $y \notin H$ then $y = A^i x + h$ where $0 \leq i < k-1$ and $h \in H$. We have $0 = (1 - A^s)y = (1 - A^s)(A^i x + h) = A^i(1 - A^s)x + (1 - A^s)h$. This implies $A^i(1 - A^s)x$ belongs to H and thus $(1 - A^s)x = x - A^s x$ belongs to H . But this is not possible since $s < k$. So y belongs to H .

Define $f: Q \rightarrow Q$ by $f(A^i x + h) = A^i y$ and $f(h) = 0$ for all $h \in H$. Since s divides k then f belongs to T . Since $s < k$ then $-x + A^s x \notin H$ and so $f(-x + A^s x) \neq 0$. If f were linear then $f(-x + A^s x) = f(-x) + f(A^s x) = -f(x) + A^s f(x) = -y + A^s y = 0$. So f is not linear. The endomorphism $g = 1 + f$ is not linear since f is not linear and $f(x) = y$ is in $H = \text{comp}(0)$ (Cor. 3). \diamond

Lemma 14. ([1], page 336) *If A is a fixed point free automorphism of order 2 in a finite group G , then G is abelian.*

Proof. By Lemma 7 every element in G has the form $-x + Ax$, and so $A(-x + Ax) = -Ax + A^2 x = -Ax + x = -(-x + Ax)$. This means $Ay = -y$ for all y in G . So $-x - y = A(y + x) = Ay + Ax = -y - x$ and G is abelian. \diamond

We return to our group of states $(Q, +)$ where $Q = \text{comp}(0) \cup \text{comp}(x)$, $\text{End } M$ linear and $A^k x = x$. Then $(Q, *)$ is abelian and Lemma 11 and 12 apply to Q . In particular we have $3y$ belongs to the

center of Q for every $y \in Q$. Using Lemma 9 we now have $Q/H \cong \cong Z_3 \oplus \cdots \oplus Z_3$, i.e. Q/H is a 3-group.

Theorem 3. *If $M = \langle Q, \Sigma, F \rangle$ is a group automaton such that $Q = \text{comp}(0) \cup \text{comp}(x)$, then $\text{End } M$ is linear iff T is linear.*

Proof. We have seen that we may assume $A^k x = x$ and Q/H is an elementary abelian 3-group. Since A acts transitively on Q/H and since k is minimal such that $A^k x = x$, $k = |Q/H| - 1 = 3^t - 1$ for some integer $t > 0$. In particular k is even, so let $r = k/2$. If A^r has any nonzero fixed points in Q then $\text{End } M$ and T contain nonlinear maps by Lemma 13. So A^r must be fixed point free on Q . Also $(A^r)^2 = A^{2r} = A^k$.

Let Q_x be the subgroup of Q generated by $\{x, Ax, A^2x, \dots, A^{k-1}x\}$. Then Q_x is A -invariant and $A^k = 1$ on Q_x since $A^k x = x$. On Q_x , A^r is fixed point free and has order 2. By Lemma 14 Q_x is abelian, and this implies Q is abelian. The result follows from Cor. 3. \diamond

Theorem 4. *Let $M = \langle Q, \Sigma, F \rangle$ be a group automaton with A invertible.*

- (i) *If M is strongly connected then $\text{End } M$ is linear iff the only fixed point of A is 0;*
- (ii) *If M has at least three components then $\text{End } M$ is not linear;*
- (iii) *Suppose M has two components, $Q = \text{comp}(0) \cup \text{comp}(x)$. Let $k > 0$ be minimal such that $-x + A^k x$ belongs to $H = \text{comp}(0)$. Then $\text{End } M$ is linear if and only if whenever $y \neq 0$ in Q is such that $A^k y = y$ then $\{A^i y \mid i = 0, \dots, k-1\} \cup \{0\}$ is an elementary abelian p -group isomorphic to Q/H via $A^i y \rightarrow A^i x + H$.*

Proof. It suffices to prove part (iii). By Th. 3 $\text{End } M$ is linear iff T is linear, so we may replace $\text{End } M$ by T . If $f \in T$ is linear with $f(x) = y$ then f induces an isomorphism of the elementary abelian p -group Q/H onto $\{A^i y \mid i = 0, \dots, k-1\} \cup \{0\}$ given by $A^i x + H \rightarrow A^i y$. Moreover if $y \neq 0 \in Q$ is such that $A^k y = y$ then there exists an $f \in T$ with $f(x) = y$. Also k is minimal such that $A^k y = y$ otherwise f is not linear (Lemma 13).

Conversely select $y \neq 0$ in Q such that $A^k y = y$. Then $\{A^i y \mid i = 0, \dots, k-1\} \cup \{0\}$ is a group isomorphic to Q/H via $\phi: A^i y \rightarrow A^i x + H$. This implies $A^j y \neq y$ for $1 \leq j < k$. Define $f \in T$ by $f(x) = y$. If $A^i x + h_i, A^j x + h_j \in Q$ with $h_i, h_j \in H$ and $(A^i x + h_i) + (A^j x + h_j) = A^t x + h_t, h_t \in H$, then

$$\begin{aligned} f(A^i x + h_i + A^j x + h_j) &= f(A^t x + h_t) = A^t y = \phi^{-1}(A^t x + H) \Leftarrow \\ &= \phi^{-1}(A^i x + H) + \phi^{-1}(A^j x + H) = \\ &= A^i y + A^j y = f(A^i x + h_i) + f(A^j x + h_j), \end{aligned}$$

and f is linear. But every f in T arises in this way, so T is linear. \diamond

We end with an **example** of a group automaton M with two components such that $\text{End } M$ is linear. Let $K = GF(p^n)$, the finite field with p^n elements where p is prime. The multiplicative group K^* of nonzero elements of K is cyclic ([2], page 279); so let α be a generator of K^* . Let $M = \langle Q, \Sigma, F \rangle = \langle K^2, K, F \rangle$ where $F: K^2 \times K \rightarrow K^2$ is defined by $F(q, \sigma) = F((\beta_1, \beta_2), \gamma) = \begin{pmatrix} \alpha^1 & \beta_1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \gamma \end{pmatrix}$. We have $H =$

$$\text{comp}(0, 0) = \{(\beta, 0) \mid \beta \in K\} \text{ and } Q \setminus H = \text{comp}(x) = \bigcup_{i=0}^{k-1} A^i x + H$$

where $x = (0, 1)$, $A = \begin{pmatrix} \alpha^1 & \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ and $k = p^n - 1$. Since $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k\alpha^{k-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^k z \neq z$ for all $z \in \text{comp}(x)$. If $f \in T$ then $f(x) = y$ where $A^k y = y$, which means $y \in H$. Thus $f(x) = (\gamma, 0)$ for some $\gamma \in K$. Since α generates K^* , A^i is fixed point free on Q for all i , $1 \leq i \leq k-1$.

We show now that $T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \gamma \in K \right\}$. For all $i \geq 0$ we have $A^i f(x) = A^i \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^i \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$ and $A^i f(x) = f(A^i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = f \begin{pmatrix} i\alpha^{i-1} \\ \alpha^i \end{pmatrix}$. This shows $f \begin{pmatrix} i\alpha^{i-1} \\ \alpha^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^i \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$. For any $\beta \in K$ we have $f \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha^i \end{pmatrix} = f \left(\begin{pmatrix} i\alpha^{i-1} \\ \alpha^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta - i\alpha^{i-1} \\ 0 \end{pmatrix} \right) = f \left(A^i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta - i\alpha^{i-1} \\ 0 \end{pmatrix} \right) = A^i f(x) = A^i \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \alpha^i \\ 0 \end{pmatrix}$.

Since f annihilates $H = \{(\beta, 0) \mid \beta \in K\}$ then $f = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

This shows T consists of linear maps. By Cor. 3, $\text{End } M$ is also linear.

References

- [1] GORENSTEIN, D.: Finite Groups (2nd edition, Chelsea, New York, 1980.
- [2] HUNGERFORD, T. W.: Algebra, Springer-Verlag, 1974.
- [3] MAXSON, C. and SMITH, K.: Endomorphism of Linear Automata, *J. of Computer and System Sciences* 17 (1978), 98-107.

ON AN INTEGRAL EQUATION

Zbigniew Grande

*Department of Mathematics, Pedagogical University, 76-200
Stupsk, ul. Arciszewskiego 2a, Poland*

Received March 1991

AMS Subject Classification: 45 D 05, 34 A 10, 35 D 05

Keywords: Integral equation, Carathéodory conditions, Carathéodory solutions, nowhere dense set of solutions.

Abstract: A class G of functions f is introduced such that the integral equation $x(t) = \int_0^t f(s, x(s))ds$ has solutions. This class is more general than the class of functions f satisfying the classical Carathéodory's conditions.

Let \mathbb{R} be the set of all reals, $I = [t_0, t_0 + a]$, $J = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq b\}$. A function $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfies the *Carathéodory's conditions* (C) if

- (i) almost all sections $f_t(x) = f(t, x)$ ($t \in I, x \in J$) are continuous,
- (ii) all sections $f^x(t) = f(t, x)$ ($t \in I, x \in J$) are measurable (in the sense of Lebesgue), and
- (iii) there is an integrable function (in the sense of Lebesgue) $m : I \rightarrow \mathbb{R}$ such that $|f(t, x)| \leq m(t)$ for every $(t, x) \in I \times J$.

It is well known the following theorem:

Theorem 0. ([2], p.7-8, Th. 1). *Suppose that $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a function satisfying the conditions (C) and d is a number such that*

$0 < d \leq a$, $\bar{g}(t_0 + d) = \int_{t_0}^{t_0+d} m(s)ds \leq b$. *Then there is an absolutely*

continuous function $h : [t_0, t_0 + d] \rightarrow J$ such that $h(t_0) = x_0$, and

$$h(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, h(s)) ds.$$

In this paper we prove that Th. 0 remains true if the conditions (C) will be replaced by more general conditions (G).

We say that a function $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfies the conditions (G) if

- (j) for every continuous function $h : I \rightarrow J$ the superposition $t \rightarrow f(t, h(t))$ is measurable,
- (jj) there exists an integrable function $m : I \rightarrow \mathbb{R}$ such that $|f(t, x)| \leq m(t)$ for every $(t, x) \in I \times J$, and
- (jjj) there is a sequence of functions $f_k : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$, satisfying the conditions (C) with $|f_k(t, x)| \leq m(t)$ for $(t, x) \in I \times J$, $k = 1, 2, \dots$, and such that for every subsequence (f_{k_n}) , for every sequence of continuous functions $g_n : I \rightarrow J$ which converges uniformly on I to a function g and for every $t \in I$ there is a strictly increasing sequence (n_i) of positive integers such that

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f_{k_{n_i}}(s, g_{n_i}(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds.$$

Theorem 1. Suppose that $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfies the conditions (G) and d is a number such that $0 < d \leq a$, and $\bar{g}(t_0 + d) = \int_{t_0}^{t_0 + d} m(s) ds \leq b$. Then there is an absolutely continuous function $h : [t_0, t_0 + d] \rightarrow J$ such that

$$h(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, h(s)) ds, \quad t \in [t_0, t_0 + d].$$

Proof. Since f satisfies the conditions (G), there is a sequence of functions f_k satisfying the condition (jjj). Without loss of generality we may assume that $|f_k(t, x)| \leq m(t)$ for $(t, x) \in I \times J$, $k = 1, 2, \dots$. Since each f_k ($k = 1, 2, \dots$) satisfies the conditions (C), by Th. 0 there are absolutely continuous functions $h_k : [t_0, t_0 + d] \rightarrow J$ which satisfy the integral equations

$$h_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_k(s, h_k(s)) ds \quad \text{for } t \in [t_0, t_0 + d].$$

Remark that the functions h_k ($k = 1, 2, \dots$) are uniformly bounded and equicontinuous on $[t_0, t_0 + d]$. By the Ascoli-Arzelà Theorem, there is a subsequence $(h_{k_i})_i$ which converges uniformly on $[t_0, t_0 + d]$ to a continuous function $h : [t_0, t_0 + d] \rightarrow \mathbb{R}^n$. We shall prove that

$$h(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, h(s)) ds \quad \text{for } t \in [t_0, t_0 + d].$$

Evidently, $h_k(t_0) = x_0$ ($k = 1, 2, \dots$). So $h(t_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} h_{k_i}(t_0) = x_0$.

Fix $t \in [t_0, t_0 + d]$. There exists a subsequence $(m_j)_j$ of the sequence $(k_i)_i$ such that

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f_{m_j}(s, h_{m_j}(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, h(s)) ds.$$

Since

$$h_{m_j}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_{m_j}(s, h_{m_j}(s)) ds,$$

and

$$\lim_{j \rightarrow \infty} h_{m_j}(t) = h(t),$$

we obtain by (jjj) the relation

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{j \rightarrow \infty} h_{m_j}(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(x_0 + \int_{t_0}^t f_{m_j}(s, h_{m_j}(s)) ds \right) = \\ &= x_0 + \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f_{m_j}(s, h_{m_j}(s)) ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, h(s)) ds. \quad \diamond \end{aligned}$$

From Th. 1 it follows immediately

Corollary 1. *If a function $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfying the conditions (G) is such that for every continuous function $h : [t_0, t_0 + d] \rightarrow J$ the superposition $t \rightarrow f(t, h(t))$ is a derivative then there exists a solution of the Cauchy's problem $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = x_0$, defined on $[t_0, t_0 + d]$.*

Recollect that $g : [t_0, t_0 + d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a derivative at a point t if

$$\lim_{r \rightarrow t} \int_t^r g(s) ds / (r - t) = g(t) \quad ([1] \text{ or } [3]).$$

Theorem 2. *If $f, g : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ are functions satisfying the conditions (G) then the sum $f + g$ satisfies the conditions (G).*

Proof. Evidently, the sum $f + g$ satisfies the conditions (j), (jj). Let $(f_k), (g_k)$ be sequences of functions satisfying the condition (jjj) for f and g , respectively. Obviously, the sums $f_k + g_k$ ($k = 1, 2, \dots$) satisfy the conditions (C). Suppose that a sequence of continuous functions $h_k : I \rightarrow J$ converges uniformly on I to a function h . Fix $t \in I$. Let (k_n) be a strictly increasing sequence of positive integers. By (jjj) there are a subsequence (n_i) of the sequence $(1, 2, \dots)$ and a subsequence (i_j) of (n_i) such that

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f_{k_{n_i}}(s, h_{n_i}(s)) = \int_{t_0}^t f(s, h(s)) ds, \text{ and}$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t g_{k_{i_j}}(s, h_{i_j}(s)) = \int_{t_0}^t g(s, h(s)) ds.$$

Consequently,

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t (f_{k_{i_j}}(s, h_{i_j}(s)) + g_{k_{i_j}}(s, h_{i_j}(s))) ds &= \\ &= \int_{t_0}^t (f(s, h(s))) ds + \int_{t_0}^t g(s, h(s)) ds. \quad \diamond \end{aligned}$$

Remark 1. Analogously as above we may prove that the product kf satisfies the conditions (G) whenever $k \in \mathbb{R}$ is a constant and the function $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfies the conditions (G).

Remark 2. From Remark 1 and Th. 2 it follows that the space $G = \{f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^n : f \text{ satisfies (G)}\}$ with the metric $\rho(f, g) = \min(1, \sup\{|f(t, x) - g(t, x)| : (t, x) \in I \times J\})$ is a linear metric space.

Theorem 3. *Assume the Continuum Hypothesis. Then the set $C = \{f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^n : f \text{ satisfies (C)}\}$ is closed and nowhere dense in G .*

Proof. Of course, if $f \in C$ then f satisfies the conditions (j), (jj) and the functions $f_k = f$ ($k = 1, 2, \dots$) satisfy all requirements of the condition (jjj). So $C \subset G$. Moreover, if a sequence of functions $f_k : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfying the conditions (C) converges uniformly (with respect to the metric ρ from Remark 2) to a function f then f satisfies also the conditions (C). So C is a closed set in G with respect to the metric ρ . Fix $f \in C$ and $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$). Denote by ω the first ordinal number of the continuum power. Let $(h_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ be a transfinite sequence of all continuous functions $(h_\alpha : I \rightarrow J)$ and let $(F_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ be a transfinite sequence of all closed subsets of $I \times J$ which are of positive (Lebesgue) measure and all sets $E_t = \{(t, x) : x \in J\}$, $t \in I$. Denote by $G(h_\alpha)$ the graph of the function h_α ($\alpha < \omega_1$). By transfinite induction, there is a set

$$B = \{(t_\alpha, x_\alpha) \in I \times J : \alpha < \omega_1\}$$

such that

$$(t_\alpha, x_\alpha) \in F_\alpha - \bigcup_{\beta < \alpha} G(h_\beta), \quad \text{and} \quad x_\alpha \neq x_0 \quad \text{for} \quad \alpha < \omega_1,$$

and for each $t \in I$ the intersection $B \cap E_t$ contains a sequence $((t, x_k))_k$ such that $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$. Let $u \in \mathbb{R}^n$ be a point such that $|u| = 1$. Let us put

$$g(t, x) = \begin{cases} \varepsilon u & \text{for } (t, x) \in B \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$h = f + g.$$

Evidently, $\rho(f, h) = \varepsilon$. To prove that $h \in G - C$ it suffices to show that $g \in G - C$. Since for each $\alpha < \omega_1$ the set $\{t \in I : g(t, h_\alpha(t)) \neq 0\}$ is countable, g satisfies the conditions (j), (jj) and

$$\int_I g(s, h_\alpha(s)) ds = 0 \quad \text{for} \quad \alpha < \omega_1.$$

Consequently, g satisfies the condition (jjj), and $g \in G$. Fix $t \in I$. Since $g(t, x_0) = 0$ and x_0 is an accumulation point of the set $B \cap E_t$, the section g_t is not continuous at x_0 . So $g \notin C$, and the proof is completed. \diamond

Remark 3. In Th. 4 the Continuum Hypothesis can be replaced by the Martin's Axiom.

Example 1. Let $I = [0, 1]$, $J = [-1, 1]$, and let

$$f(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0 \text{ and } 1/(2n + 1) < t < 1/2n, n = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The function f is of Baire class 1. If the function $x : [0, d] \rightarrow J$ ($d \leq 1$) satisfies the equation

$$(*) \quad x(t) = \int_0^t f(s, x(s)) ds$$

then $x(0) = 0$, x is nondecreasing, and $x(t) > 0$ for $t > 0$ ($t \leq d$). But, in this case $f(s, x(s)) = 0$ for $s > 0$ and $x(t) = 0$ for $t \in [0, d]$. This contradiction proves that the integral equation (*) has not an absolutely continuous solution, and consequently $f \notin G$.

Example 2. Let $I = [0, 1]$ and $J = [-1, 1]$. Denote by T_e and T_d , respectively the euclidean and the density topologies in \mathbb{R} (for the definition of the density topology see [1]). There is an approximately continuous (i.e. (T_d, T_e) continuous) function $g : J \rightarrow [0, 1]$ is such that $g[1/k] = 1$ for $k = 1, 2, \dots$, and $g(0) = 0$ (see [1]). Consequently, the function $f(t, x) = g(x)$ is a $(T_e \times T_d, T_e)$ continuous mapping. Assume that $f \in G$, Let (f_k) be a sequence of functions from C corresponding to f by the condition (jjj). For $k = 1, 2, \dots$ there are an index n_k and a number y_k such that $n_{k+1} > n_k$, $|y_k - 1/k| < 1/k(k+1)$, and

$$(i) \quad \left| \int_0^1 f_{n_k}(s, y_k) ds - \int_0^1 f(s, 1/k) ds \right| < 1/2.$$

Since

$$\int_0^1 f(s, 1/k) ds = 1,$$

it follows from (i) that

$$\int_0^1 f_{n_k}(s, y_k) ds > 1/2.$$

Then the sequence (y_k) converges uniformly to 0 and there is not a strictly increasing sequence (k_i) of positive integers such that

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^1 f_{n_{k_i}}(s, y_{k_i}) ds = \int_0^1 f(s, 0) ds = 0.$$

So, $f \notin G$. Observe that the integral equation (*) has a solution $x(t) = 0$ for $t \in I$.

References

- [1] BRUCKNER, A. M.: Differentiation of real functions, *Lecture Notes in Math.* 659, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1987.
- [2] FILIPPOV, A. F.: Differential equations with discontinuous right hand (in Russian), Moscow, 1985.
- [3] GRANDE, Z. and RZEPKA, D.: Sur le produit de deux dérivées vectorielles, *Real Anal. Exch.* 6 (1980-81), 95-110.

ABSOLUTE END POINTS AND THEIR MAPPING PROPERTIES

Janusz J. Charatonik

*Mathematical Institute, Wrocław University, pl. Grunwaldzki 2/4,
50-384 Wrocław, Poland*

Paweł Krupski

*Mathematical Institute, Wrocław University, pl. Grunwaldzki 2/4,
50-384 Wrocław, Poland*

Janusz R. Prajs

*Institute of Mathematics, Pedagogical University, ul. Oleska 48,
54-951 Opole, Poland*

Received December 1991

AMS Subject Classification: 54 C 10, 54 F 15

Keywords: Absolute end point, arc-like, confluent, continuum, end point, irreducible, local absolute end point, mapping, monotone, open.

Abstract: The concept of an absolute end point of an irreducible continuum is used to introduce the new concept of a local absolute end point of a continuum. Some characterizations of these concepts are obtained and their mapping properties are studied, especially for open, atomic, monotone and related mappings.

1. Introduction

Rosenholtz defined a concept of an absolute end point of an arc-like continuum and showed that such a point of an arc-like continuum is characterized by any of some four equivalent conditions given in ([8],

Prop. 1.3, p. 1309). It has been recently observed in [3] that each of these conditions is also equivalent to each of two other conditions and that the scope of application of the definition can be extended to arbitrary irreducible continua, not necessarily arc-like ones (see below, Th. 3.1).

The extended notion of an absolute end point is applied in the present paper to define a local absolute end point of an arbitrary continuum. Some necessary and sufficient conditions are obtained under which a given point of a continuum is either a local absolute end point or an absolute end point.

The concept of an absolute end point is related to that of an end point introduced by Bing in Section 5 of [1], p. 660–662 (see [8], Remark, p. 1310) which is known to be invariant under confluent (thus under open as well as under monotone) mappings (see [2], Lemma, p. 172). It is known that an arc-like continuum is invariant under monotone ([1], Th. 3, p. 654) and under open mappings ([7], Th. 1.0, p. 259; compare also [6], Th. 1, p. 77), and that an irreducible continuum is preserved under monotone mappings (see e.g. [5], §48, I. Th. 3, p. 192). Therefore, it seems to be quite natural to know whether such mappings also preserve (local) absolute end points. This question is discussed in Section 4. Theorems of this sort are widely known to be useful in the study of various mapping properties of topological spaces in continua theory.

2. Preliminaries

All spaces considered in this paper are assumed to be metric and nondegenerate, and all mappings are continuous. For all undefined herein notions the reader is referred to books [5] and [9] and to Rosenholtz's paper [7]. Following Kuratowski [5], §49, I. p. 227, we say that a space X is *locally connected at a point* p of X provided that for each open set U of X containing p , the point p lies in the interior of a connected subset of U . Note that some other authors use name "connected im kleinen" in the same sense. By a *composant* of a point y in a continuum X we mean the union of all proper subcontinua of X containing y . A *simple triod* means the union of three arcs (called *arms*) emanating from a common end point and mutually disjoint outside the point. The other end points of the arcs are called *ends* of the triod. A continuum is called *irreducible* if it is irreducible between some pair of its points.

A mapping $f : X \rightarrow Y$ from a continuum X onto a continuum Y is said to be:

- (a) *monotone*, provided that the inverse image of each subcontinuum of Y is connected;
- (b) *interior at a point* $p \in X$, provided for every open neighbourhood U of p in X the point $f(p)$ is in the interior of $f(U)$;
- (c) *open*, if for each open subset of X its image under f is an open subset of Y ;
- (d) *confluent*, if for each subcontinuum Q of Y each component of $f^{-1}(Q)$ is mapped onto Q by f ;
- (e) *light*, if $\dim f^{-1}(y) = 0$ for each $y \in Y$;
- (f) *atomic*, provided that for each subcontinuum K of X either $f(K)$ is degenerate, or $f^{-1}(f(K)) = K$.

We shall collect several known properties of mappings of continua which will be needed in the sequel. For the proof of the first of them see [5], §48. I, Th. 3, p. 192.

Proposition 2.1. *If a continuum X is irreducible between points p and q and a surjection $f : X \rightarrow Y$ is monotone, then the continuum Y is irreducible from $f(p)$ to $f(q)$.*

The next two propositions are immediate consequences of the definitions.

Proposition 2.2. *A mapping is open if and only if it is interior at each point of its domain.*

Proposition 2.3. *Let a continuum X be locally connected at a point p . If a mapping f defined on X is interior at p , then $f(X)$ is locally connected at $f(p)$.*

Further, the following results are known.

Proposition 2.4. *Each atomic mapping of a continuum is monotone (see [4], Th. 1, p. 49).*

Proposition 2.5. *Open mappings of compact spaces are confluent (see [9], Th. 7.5, p. 148)*

Proposition 2.6. *Open mappings preserve arc-likeness of continua (see [7], Th. 1.0, p. 259; compare also [6], Th. 1, p. 77).*

3. Characterizations of absolute end points and of local absolute end points

A point p of a continuum X is called an *absolute end point* of X if $X \setminus \{p\}$ is a composant (of some point) in X . Observe that a continuum

with an absolute end point must be nondegenerate. Th. 3.1 below is a part of a result in [3].

Theorem 3.1. *The following conditions on a continuum X and a point p of X are equivalent:*

- (1) p is an absolute end point of X ;
- (2) X is irreducible between p and some other point, and X is locally connected at p ;
- (3) X is irreducible, and if X is irreducible between points x and y , then either x or y is p .

The next proposition will lead to a new characterization of absolute end points in the realm of irreducible continua (see Th. 3.4).

Proposition 3.2. *If a continuum X contains an absolute end point p , then for each nondegenerate subcontinuum K of X the condition $p \in K$ implies $p \in \text{int} K$.*

Proof. By Th. 3.1 the continuum X is irreducible from p to some other point $q \in X$. Let a nondegenerate subcontinuum K of X contain p . Then there is a point x such that $x \in K \setminus \{p\} \subset X \setminus \{p\}$. Since $X \setminus \{p\}$ is a composant in X , there exists a proper subcontinuum C of X containing both x and q , with $C \subset X \setminus \{p\}$. Since $p \in K$, $q \in C$ and $x \in K \cap C$, we conclude $K \cup C = X$ by the irreducibility of X between p and q . So $X \setminus C \subset K$. Since $C \subset X \setminus \{p\}$, the difference $X \setminus C$ is a nonempty open subset of K containing the point p , and thus $p \in \text{int} K$. \diamond

A point p of a continuum X is called a *local absolute end point* of X provided there is a subcontinuum K of X such that $p \in \text{int} K$ and p is an absolute end point of K .

Theorem 3.3. *The following conditions on a continuum X and a point p of X are equivalent:*

- (a) p is a local absolute end point of X ;
- (b) there is a subcontinuum K of X irreducible between p and some other point of X , such that K is locally connected at p and $p \in \text{int} K$;
- (c) for each nondegenerate subcontinuum K of X if $p \in K$ then $p \in \text{int} K$;
- (d) p is a local absolute end point of each nondegenerate subcontinuum Y of X containing p .

Proof. Conditions (a) and (b) are equivalent by Th. 3.1. Condition (a) implies (c) by Prop. 3.2. Assume (c) is satisfied. Consider a subcontinuum Y of X with $p \in Y$. Let a subcontinuum K of Y be irreducible

between the point p and some other point of Y . Then (c) obviously implies the local connectedness of K at p , and thus (b) is satisfied for $X = Y$. By the above mentioned equivalence of (a) and (b) (still for $X = Y$), we get (d), which obviously implies (a). \diamond

Theorem 3.4. *A local absolute end point of a continuum X is an absolute end point of X if and only if X is irreducible.*

Proof. One implication is a consequence of Th. 3.1. To show the other one, assume that the continuum X is irreducible between points a and b , and let a point p be a local absolute end point of X . Suppose $a \neq p \neq b$. Denote by A and B subcontinua of X which are irreducible between p and a and between p and b , respectively. By the implication (a) \implies \implies (c) of Th. 3.3, the continua A and B are both locally connected at p . Thus $p \in \text{int } A \cap \text{int } B$, whence there is a point $q \in A \cap B \setminus \{p\}$. Since p is an absolute end point of each of the continua A and B , by the implication (2) \implies (1) of Th. 3.1, we have a subcontinuum A' of A and a subcontinuum B' of B such that $a, q \in A'$, $b, q \in B'$, and $p \in X \setminus (A' \cup B')$. Hence X is not irreducible between a and b , a contradiction. Consequently, either $a = p$ or $b = p$, and thus p is an absolute end point of X according to the implication (3) \implies (1) of Th. 3.1. \diamond

As an immediate consequence of Th. 3.4 we have the following result.

Corollary 3.5. *If p is a local absolute end point of a continuum X , then p is an absolute end point of each irreducible nondegenerate subcontinuum of X containing p .*

Note that a similar heredity with respect to subcontinua was proved for arc-like continua as the final part of Th. 1.0 of [8], p. 1308.

4. Mapping properties of absolute end points

Let us accept the following definition. A mapping $f : X \rightarrow Y$ between continua X and Y is said to be *partially confluent at a point* $p \in X$ provided that for each nondegenerate subcontinuum Q of Y such that $f(p) \in Q$ the component of $f^{-1}(Q)$ containing the point p is nondegenerate. Note that every confluent mapping $f : X \rightarrow Y$ of a continuum X onto Y is obviously partially confluent at each point of its domain just by the definition and that if $f : X \rightarrow Y$ is partially confluent at $p \in X$ and $g : Y \rightarrow Z$ is partially confluent at $f(p) \in Y$, then the composition $gf : X \rightarrow Z$ is partially confluent at p .

The main result of this section of the paper is the following theorem.

Theorem 4.1. *Let a surjective mapping $f : X \rightarrow Y$ between continua X and Y be both interior at a point p of X and partially confluent at p . If p is a local absolute end point of X , then $f(p)$ is a local absolute end point of Y .*

Proof. To show that $f(p)$ is a local absolute end point of Y we shall use Th. 3.3. Consider a nondegenerate subcontinuum Q of Y containing the point $f(p)$. We must show $f(p) \in \text{int } Q$. Take the component K of $f^{-1}(Q)$ with $p \in K$ and observe that K is nondegenerate by the assumption of partial confluence of f at p . Since p is a local absolute end point of X , we conclude $p \in \text{int } K$ by Th. 3.3. Now, since f is interior at p , it follows that $f(p) \in \text{int } f(\text{int } K) \subset \text{int } f(K) \subset \text{int } Q$, and thereby the proof is completed. \diamond

Our next result concerns atomic mappings.

Proposition 4.2. *Let a surjection $f : X \rightarrow Y$ between continua X and Y be atomic. Then f is interior at each absolute end point of X .*

Proof. Let an absolute end point p of X be given. Observe that since X is irreducible between the point p and some other point q in X by Th. 3.1, the continuum Y is irreducible between $f(p)$ and $f(q)$ by Props. 2.4 and 2.1. Given a neighbourhood U of p in X , let C be a nondegenerate continuum in U satisfying $p \in C$ and $f(q) \in Y \setminus f(C)$. Since $X \setminus \{p\}$ is a component in the (irreducible) continuum X , there is a continuum $K \subset X \setminus \{p\}$ with $K \cap C \neq \emptyset$ and $q \in K$. Then $f(K)$ is nondegenerate. As f is atomic we have $f^{-1}(f(K)) = K$, and thus $f(p) \in Y \setminus f(K)$. Since $f(C) \cap f(K) \neq \emptyset$, and since Y is irreducible between $f(p) \in f(C)$ and $f(q) \in f(K)$, we have $Y = f(C) \cup f(K)$ and

$$\begin{aligned} f(p) \in Y \setminus f(K) &= f(C) \setminus f(K) = \text{int}(f(C) \setminus f(K)) \subset \\ &\subset \text{int } f(C) \subset \text{int } f(U). \quad \diamond \end{aligned}$$

The next corollary is an easy consequence of Ths. 3.4, 4.1 and Props. 2.1–2.6 and 4.2.

Corollary 4.3. *Assume p is a local absolute end point of a continuum X and $f : X \rightarrow Y$ is a surjection. Then:*

- The point $f(p)$ is a local absolute end point of Y if*
- (i) *f is both confluent and interior at p , or*
 - (ii) *f is open.*

The point $f(p)$ is an absolute end point of Y in each of the following cases:

- (iii) f is open and X is arc-like;
- (iv) f is both confluent and interior at p , and X and Y are irreducible;
- (v) f is open and X and Y are irreducible;
- (vi) f is both monotone and interior at p , and X is irreducible;
- (vii) f is atomic and X is irreducible.

Remark 4.4. The two assumptions made on the mapping f in Th. 4.1 are independent in the sense that neither of them implies the other one. To see this we consider the following two easy examples.

Example 4.5. *There is a light retraction of an arc which is interior at both end points of the domain and which maps one end point onto an interior point of the range.*

Proof. The (orthogonal) projection of the arc pr onto the subarc pq pictured in Fig. A is such a mapping. \diamond

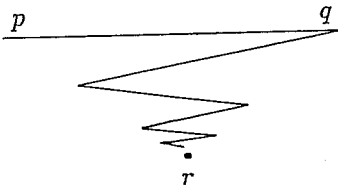


Fig. A

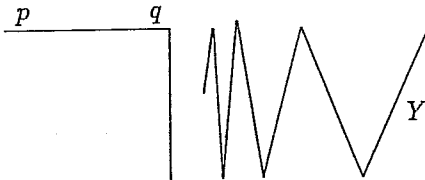


Fig. B

Example 4.6. *There are an arc-like continuum X with an absolute end point p and a monotone retraction f of X such that $f(p)$ is not an absolute end point of $Y = f(X)$.*

Proof. Take the one-point union X of the topologist's sine curve Y and an arc pq (a homeomorphic copy of X is illustrated in Fig. B). Then both $X = pq \cup Y$ and Y are arc-like continua. Let $f : X \rightarrow Y$ be the monotone retraction that shrinks the arc pq to the point q . Then p is an absolute end point of X , while $f(p) = q$ is not an absolute end point of Y . \diamond

Note that the mapping f , being monotone, is partially confluent at p and, by its definition, is not interior at the point p .

Remark 4.7. Ex. 4.5 also shows that partial confluence of f at the point p is an essential assumption in Th. 4.1. Similarly, Ex. 4.6 shows that f being interior at p cannot be omitted in the assumptions of this theorem.

Remark 4.8. One cannot substitute “absolute end point” for “local absolute end point” both in the assumption and in the conclusion of Th. 4.1. Indeed, let f be the mapping from an arc pq onto a simple triod with end points a , b , c and the center d as pictured in Fig. C.

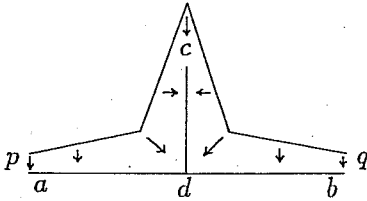


Fig. C

Then the mapping f is interior at p and partially confluent at p and the point p is an absolute end

point of pq , while the image $f(p) = a$ is not an absolute end point of the triod.

Remark 4.9. The irreducibility of the range continuum Y is essential in parts (iv) and (v) of Cor. 4.3. The following example shows this.

Example 4.10. *There exists an open, light, surjective mapping $f : X \rightarrow Y$ of an irreducible continuum X with an absolute end point such that the range continuum Y is not irreducible (and thus contains no absolute end point).*

Proof. Let C be the standard Cantor ternary set in the unit interval $[0, 1]$, and let p_i, q_i for $i \in \mathbb{N}$ be the end points of all components of $[0, 1] \setminus C$ such that $p_i < q_i$ and that the sets $\{p_{3n} : n \in \mathbb{N}\}$, $\{p_{3n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ and $\{p_{3n+2} : n \in \mathbb{N}\}$ are dense in C . Denote by T a simple triod with center r and ends a , b and c . Take the Cartesian product $C \times T$ and consider the quotient mapping $g : C \times T \rightarrow X_0$ which identifies for each $n \in \mathbb{N}$ all pairs of points of the form: (p_{3n}, a) with (q_{3n}, a) , (p_{3n+1}, b) with (q_{3n+1}, b) , and (p_{3n+2}, c) with (q_{3n+2}, c) , and only these pairs (i.e., g is one-to-one out of them). Observe that for each $t_1, t_2 \in T$ the continuum X_0 is irreducible between $g(0, t_1)$ and $g(1, t_2)$. Further, put $r_0 = g(0, r)$, take an arc r_0s such that $r_0s \cap X_0 = \{r_0\}$, and define $X = X_0 \cup r_0s$. Note that X is an irreducible continuum having s as its absolute end point.

Finally consider an arbitrary homeomorphism $h : r_0s \rightarrow ra \subset T$ such that $h(r_0) = r$ and a mapping $f : X \rightarrow T$ defined by $f(x) = t$ if $x = g(y, t)$ for some $y \in C$, and $f(x) = h(x)$ if $x \in r_0s$. It is easy to see that the mapping f is open and light. Since its range T is not an irreducible continuum, $f(s)$ is not an absolute end point of T . The proof is completed. \diamond

Remark 4.11. That the mapping f be both interior at p and monotone is an essential assumption in part (vi) of Cor. 4.3 because Exs. 4.5 and 4.6 show that even retractions of arc-like continua do not preserve absolute end points.

References

- [1] BING, R. H.: Snake-like continua, *Duke Math. J.* **18** (1951), 653-663.
- [2] CHARATONIK, J. J.: Generalized homogeneity and some characterizations of solenoids, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* **31** (1983), 171-174.
- [3] CHARATONIK, J. J.: Absolute end points of irreducible continua, *Math. Bohemica* **118** (1993), 19-28.
- [4] EMERYK, A. and HORBANOWICZ, Z.: On atomic mappings, *Colloq. Math.* **27** (1973), 49-55.
- [5] KURATOWSKI, K.: *Topology*, Vol. II, Academic Press and PWN, 1968.
- [6] ODINTSOV, A. A.: Open images of cyclicly snake-like continua, (Russian) *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I. Mat. Mekh.* No. 5 (1989), 76-78.
- [7] ROSENHOLTZ, I.: Open maps of chainable continua *Proc. Amer. Math. Soc.* **42** (1974), 258-264.
- [8] ROSENHOLTZ, I.: Absolute endpoints of chainable continua, *Proc. Amer. Math. Soc.* **103** (1988), 1305-1314.
- [9] WHYBURN, G. T.: *Analytic topology*, *Amer. Math. Soc. Colloq. Publications* **28**, Providence RI, 1963.

KLASSIFIKATION DER HYPERBOLISCHEN DODEKAEDERPFLASTERUNGEN VON MAXIMALEN FLÄCHENTRANSITIVEN BEWEGUNGSGRUPPEN

Emil Molnár*

Lehrstuhl für Geometrie, Technische Universität, H-1521 Budapest, Egrý J. u. 1, Ungarn

In memoriam Professor Heinrich Brauner[†]

Received June 1991

AMS Subject Classification: 51 M 20, 51 N 15, 52 B 70, 52 C 22; 05 B 45, 57 Q 91, 57 S 30

Keywords: Equivariant classification of tilings by D -symbols, maximal face-transitive tiling, projective metric realization.

Abstract: All the hyperbolic dodecahedron tilings (T, Γ) are classified, where an isometry group Γ acts transitively on the pentagonal faces of the tiling T in H^3 and Γ is equivariant to $\text{Aut } T$. The D -symbol method leads also to a complete classification of face transitive dodecahedron tilings in S^3 and in H^3 by symmetry breaking.

1. Einführung, Resultate

*Unterstützt von der Ungarischen Wissenschaftlichen Forschungsstiftung (OTKA) No. 1615 (1991).

†Die Arbeit ist eine erweiterte Fassung des Vortrags: Projektive Metrik und eine unendliche Serie von hyperbolischen raumfüllenden Pentagondodekaedern, *Kolloquium über Konstruktive Geometrie in memoriam o. Prof. DDr Heinrich Brauner*, 28.4 – 3.5.1991, Seggauberg (bei Leibnitz), Österreich.

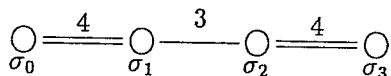
In der Arbeit [7] haben wir mit A. W. M. Dress und D. H. Huson diejenigen euklidischen Pflasterungen (\mathcal{T}, Γ) klassifiziert, wo eine Bewegungsgruppe Γ auf den Flächen der Pflasterung \mathcal{T} transitiv wirkt. Der kombinatorische Algorithmus und das Computerprogramm ergaben auch solche Pflasterungen, die nur in verschiedenen nicht-euklidischen Räumen realisierbar sind. Die Frage, in welchem Raum eine kombinatorische Pflasterung metrisch, d.h. unter einer Bewegungsgruppe Γ verwirklicht wird, ist im allgemeinen ein schwieriges Problem. Dabei können exotische Räume, wie $H^2 \times \mathbb{R}$, $S^2 \times \mathbb{R}$ und andere vorkommen. Bezüglich dieses Themenkreises verweise ich auf die Arbeiten [13], [14], [16], [17] und [18]. Ein wertvolles Hilfsmittel zur Beschreibung nicht-euklidischer Geometrien liefert die projektive Geometrie, die z.B. in [1] hervorragend dargestellt wird und in [2] mit anschaulichem Inhalt belegt wird. Wir werden im folgenden die Methoden der projektiven Metrik (vgl. [9], [12]) benutzen.

Es sei (\mathcal{T}, Γ) eine Pflasterung des hyperbolischen Raumes H^3 , wo ein beliebiger Stein T von \mathcal{T} kombinatorisch ein Pentagondodekaeder mit dem Schläfli-Symbol $\{5, 3\}$ ist. Wir nehmen an, daß eine Bewegungsgruppe Γ auf den (pentagonalen) Flächen von \mathcal{T} transitiv wirkt, d.h., daß für je zwei Flächen f_1 und f_2 der Polyeder von \mathcal{T} (mindestens) eine Bewegung $\gamma \in \Gamma$ existiert, die f_1 in $f_2 = f_1^\gamma$ überführt, so daß die ganze Pflasterung \mathcal{T} auf sich abgebildet wird. Zwei Pflasterungen $(\mathcal{T}_1, \Gamma_1)$ und $(\mathcal{T}_2, \Gamma_2)$ sind in derselben Klasse, sie heißen kombinatorisch äquivalent, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ gibt, die die kombinatorische Inzidenzstruktur der Körper, Flächen, Kanten und Ecken von \mathcal{T}_1 erhält und $\Gamma_2 = \varphi^{-1}\Gamma_1\varphi$ gilt. Mit kombinatorisch isomorphen Pflasterungen $\mathcal{T}_1 \cong \mathcal{T}_2$ kann die Gruppe Γ_2 reichhaltiger als Γ_1 sein, d.h. mit einem obigen φ kann $\Gamma_2 > \varphi^{-1}\Gamma_1\varphi$ gelten. Dann sagen wir: $(\mathcal{T}_1, \Gamma_1)$ ist ein Symmetriebruch von $(\mathcal{T}_2, \Gamma_2)$.

Wir interessieren uns für die Pflasterungen (\mathcal{T}, Γ) von maximalen Bewegungsgruppen $\Gamma \cong \text{Aut } \mathcal{T}$, d.h. die Gruppe Γ ist zu der die Inzidenzstruktur erhaltenden Automorphismengruppe äquivalent. Die flächentransitiven Symmetriebrüche (\mathcal{T}, Γ_1) von (\mathcal{T}, Γ) liefern dann eine vollständige Klassifikation der gewünschten äquivalenten Pflasterungen.

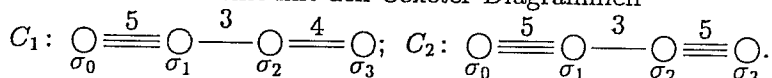
In diesem Sinne habe ich in [15] die 43 Klassen der äquivalenten Würfelpflasterungen $(\mathcal{T}_w, \Gamma_w)$ des euklidischen Raumes E^3 beschrieben. Hier ist $\text{Aut } \mathcal{T}_w = [4, 3, 4] \cong \text{Pm}\bar{3}\text{m}$ eine kristallographische Gruppe, die von den 4 Spiegelungen an den Seitenflächenebenen des charakteris-

tischen Orthoschemes C des Würfels erzeugt wird. Im Coxeter-Diagramm



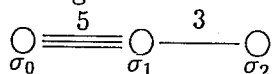
weisen die Ecken auf die 4 Seitenebenen σ_i ($i = 0, \dots, 3$) des Orthoschemes C hin, wo z.B. σ_0 und σ_1 längs der Kante $A_2 A_3$ den Keilwinkel $\frac{\pi}{n_{01}} = \frac{\pi}{4}$ einschließen und die nicht eingezeichneten Linien die 3 rechten Winkel darstellen.

Wir kennen 2 Pentagonododekaeder, die den hyperbolischen Raum H^3 regulär auspflastern können [3]. Diese haben die analogen charakteristischen Orthoscheme mit den Coxeter-Diagrammen



Diese zwei Orthoscheme haben den eigentlichen (inneren) Eckpunkt A_0 , (z.B. im projektiven Modell von H^3), da die Teilscheme von $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sphärische Diagramme mit endlichen Gruppen bilden.

Das gemeinsame Teildiagramm



kennzeichnet das lokale sphärische Orthoschem um das Zentrum A_3 des regulären Pentagonododekaeders. Die Winkel $\frac{\pi}{4}$, bzw. $\frac{\pi}{5}$ zwischen den Simplexebenen σ_2 und σ_3 längs der Kante $A_0 A_1$ ergeben die Keilwinkel $\frac{2\pi}{4}$, bzw. $\frac{2\pi}{5}$ der entsprechenden Dodekaeder (Abb. 1.1).

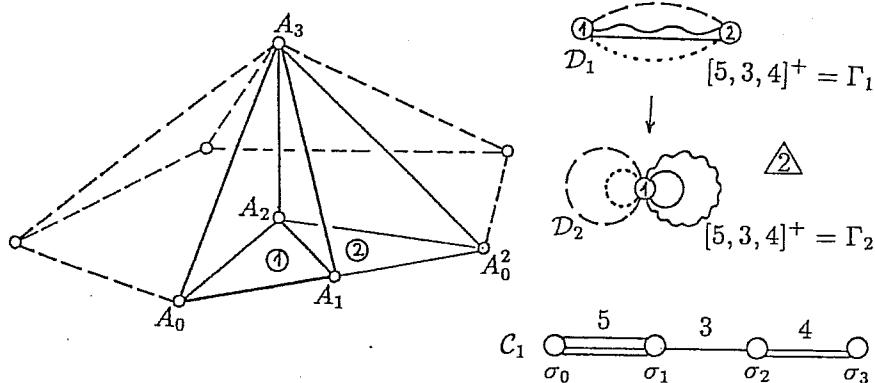


Abb. 1.1.

So haben wir 2 Dodekaederpflasterungen $(\mathcal{T}_k, \Gamma_k)$ ($k = 1, 2$) von maximalen flächentransitiven Bewegungsgruppen Γ_k mit den Darstellungen

$$\Gamma_k = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 - \sigma_i^2 = 1 = (\sigma_i \sigma_j)^{m_{ij}}; i, j \in I = \{0, 1, 2, 3\}),$$

$$(1.1) \quad \text{wo } (m_{ij})_k = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & m_k \\ 2 & 2 & m_k & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} m_1 = 4 \text{ für } \Gamma_1, \\ m_2 = 5 \text{ für } \Gamma_2 \end{array}$$

die entsprechenden *Coxeter-Schlüßflischen Matrizen* sind.

In Abschnitt 3 werde ich eine neue unendliche Serie $(\mathcal{T}_p, \Gamma(p, 4); 3 \leq p, p \neq 4)$ von gewünschten Dodekaederpflasterungen konstruieren, wo die Parameter $(p, 4)$ auf die Anzahl der Nachbarn bei den Dodekaederkanten hinweisen. In Abschnitt 4 werde ich analog 3 neue gewünschte Pflasterungen $(\mathcal{T}_q, \Gamma(q, 6); q = 3, 4, 5)$ kurz beschreiben.

Als Hauptresultat haben wir den folgenden

Satz. *Außer den 2 Coxeterschen Dodekaederpflasterungen $(\mathcal{T}_k, \Gamma_k)$ gibt es im hyperbolischen Raum H^3 genau die unendliche Serie $(\mathcal{T}_p, \Gamma(p, 4); 3 \leq p, p \neq 4)$ von Dodekaederpflasterungen sowie die 3 weiteren Pflasterungen $(\mathcal{T}_q, \Gamma(q, 6); q = 3, 4, 5)$ wobei jede Bewegungsgruppe $\Gamma \cong \text{Aut } \mathcal{T}$ auf den Flächen der entsprechenden Pflasterung \mathcal{T} transitiv wirkt, und jedes Dodekaeder T von \mathcal{T} eigentliche Ecken besitzt.*

Im Falle $p = 4$ gilt $\text{Aut } \mathcal{T}_p = \Gamma_1 > \Gamma(p, 4)$, d.h. ist $\Gamma(4, 4)$ nicht maximal und $(\mathcal{T}_4, \Gamma(4, 4))$ ist ein Symmetriebruch von $(\mathcal{T}_1, \Gamma_1)$.

Natürlich könnten wir auch ideale Ecken (auf der Absolutfigur von H^3) mit endlich vielen weiteren Fällen zulassen.

Äußere Ecken würden unendlich viele Serien ergeben.

2. Beschreibung der äquivarianten Pflasterungen durch D -Symbole

Zunächst erinnern wir kurz an einige Begriffe. Hinsichtlich der allgemeinen Konzeption und 2-dimensionaler Anwendungen seien die Arbeiten [4], [5], [6] und [8] erwähnt. In [7], [15], [17] sind die räumlichen Beziehungen auf Grund der Arbeiten [13] und [16] weiterentwickelt.

2.1. Wir gehen aus von einer kombinatorischen d -dimensionalen Polyederpflasterung \mathcal{T} mit ihrer formalen baryzentrischen Unterteilung im Sinne der stückweisen-linearen Topologie und gelangen so von \mathcal{T} zur

Simplexzerlegung C. Ein solches Simplex $C \in \mathcal{C}$ hat i -Ecken $A_i, i \in I := \{0, 1, \dots, d\}$, sowie die formalen i -Mittelpunkte einer Fahne der inzidenten d -Körper, \dots , i -Fläche, \dots 0-Eck von \mathcal{T} . Die zu A_i nicht inzidente Seitenhyperfläche von C sei mit σ_i bezeichnet, ebenso wie die *formale Spiegelung*, die die Hyperfläche $\sigma_i = A_0 \cdot \dot{\vee} \cdot A_d$ punktweise festläßt und A_i mit dem i -Eckpunkt $A_i^{\sigma_i}$ des i -benachbarten Simplexes C^{σ_i} vertauscht. Auf diese Weise führen wir die auf den Körpern von \mathcal{C} frei wirkenden *involutorischen σ_i -Operationen* und die durch sie erzeugte *freie Coxeter-Gruppe* mit der Darstellung

$$(2.1) \quad \Sigma_I := (\sigma_i, i \in I - \sigma_i^2 = 1, i \in I := \{0, 1, \dots, d\})$$

ein. Die Formel

$$(2.2) \quad (C^{\sigma_i})^\sigma = (C^\sigma)^{\sigma^{-1}\sigma_i\sigma} =: (C^\sigma)^{\sigma_i^\sigma}$$

zeigt unsere Schreibweise, wie Σ_I auf \mathcal{C} von links operiert. Wenn $\sigma = \sigma_{i_r} \dots \sigma_{i_2} \sigma_{i_1}$ ein Element von Σ_I ist, so gehen wir durch die Simplexe

$$(2.3) \quad C, C^{\sigma_{i_1}}, C^{\sigma_{i_2}\sigma_{i_1}}, \dots, C^{\sigma_{i_r} \dots \sigma_{i_2}\sigma_{i_1}} = C^\sigma, C^{\sigma_i\sigma}$$

von C bis zu $C^{\sigma_i\sigma}$. In das letzte Simplex treten wir durch die i -Seitenhyperfläche $(\sigma_i)^\sigma$ von $(C)^\sigma$ mit der konjugierten i -Spiegelung $\tau^{-1}\sigma_i\sigma$ ein.

Wir nehmen an, daß \mathcal{T} *einfach zusammenhängend* ist, d.h. Σ_I wirkt auf den d -Körpern von \mathcal{C} transitiv, und jede eventuelle Relation in Σ_I kann man aus den vorkommenden *Schlingenrelationen*

$$(2.4) \quad C = C^{\tau^{-1}(\sigma_i\sigma_j)^{m_{ij}(C^\tau)}}; \quad C \in \mathcal{C}; \tau \in \Sigma_I; i, j \in I$$

herleiten. Wir gehen also von C zu C^τ ; kehren dann wir die $(d-2)$ -Fläche von C^τ um, wobei seine j - und i -Hyperflächen und die der $2 \cdot m_{ij}(C^\tau)$ benachbarten Simplexe sich treffen; dann gehen wir von C^τ bis C zurück. Die Konstruktion von Σ_I hängt von einem *Anfangssimplex* C_0 ab. Verschiedene Anfangssimplexe ergeben aber dieselbe Gruppe Σ_I bis auf eine Konjugation.

2.2. Wir führen gemäß (2.4) allgemein, die *Matrixfunktion*

$$(2.5) \quad M: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}_{I \times I}, \quad C \mapsto (m_{ij}(C)); \quad i, j \in I$$

ein. Hier ist die natürliche Zahl $m_{ij}(C)$ minimal bezüglich

$$(2.6) \quad C^{(\sigma_i\sigma_j)^{m_{ij}(C)}} = C.$$

Wir könnten auch $m_{ij}(C) = \infty$ zulassen, dann schreiben wir lieber $m_{ij}(C) = 0$, um (2.6) formal zu erfüllen.

Wir haben so die Pflasterung \mathcal{T} mit \mathcal{C} und M durch die verallgemeinerte Coxeter-Gruppe $\Sigma_I(\mathcal{C}, M)$ nach (2.4) gekennzeichnet. M ist die verallgemeinerte Coxeter-Schläflische Matrixfunktion mit den folgenden zusätzlichen Eigenschaften

$$(2.7) \quad m_{ij}(C) = m_{ji}(C) = m_{ij}(C^{\sigma_i});$$

$$(2.8) \quad m_{ii}(C) = 1; \quad m_{ij}(C) = 2, \quad \text{wenn } |i - j| \geq 2;$$

$$(2.9) \quad m_{ij}(C) \geq 3, \quad \text{wenn } |i - j| = 1 \\ \text{für jedes } C \in \mathcal{C} \text{ und } i, j \in I := \{0, 1, \dots, d\}.$$

2.3. Zunächst nehmen wir an, daß \mathcal{T} eine *periodische Pflasterung* ist, d.h. daß eine nicht triviale Gruppe Γ auf \mathcal{T} wirkt, die die kombinatorische Inzidenzstruktur von \mathcal{T} erhält. Wir setzen voraus, daß Γ auf den Körpern der baryzentrische Simplexzerlegung \mathcal{C} von rechts frei wirkt, und dabei die σ_i -Operationen wie folgt erhält:

$$(2.10) \quad (C^{\sigma_i})^\gamma = (C^\gamma)^{\gamma^{-1}\sigma_i\gamma} =: (C^\gamma)^{\sigma_i^\gamma}, \quad C \in \mathcal{C}, \gamma \in \Gamma.$$

Das heißt, das γ -Bild von C^{σ_i} ist das i -benachbarte Simplex von C^γ bei seiner i -Seitenhyperfläche $(\sigma_i)^\gamma$. Wir sagen: Γ ist *äquivariant* bezüglich $\Sigma_I(\mathcal{C}, M)$. Die Gruppe Γ faktorisiert dann sowohl die Zerlegung \mathcal{C} als auch die Matrixfunktion M . Ein Element von $\mathcal{D} := \mathcal{C}/\Gamma$ ist eine Γ -Bahn (Orbit)

$$(2.11) \quad D := C^\Gamma := \{C^\gamma \in \mathcal{C} : \gamma \in \Gamma\}.$$

Die i -Nachbarschaft oder die induzierte σ_i -Operation auf der sogenannten D -Menge \mathcal{D} wird durch

$$(2.12) \quad D^{\sigma_i} := C^{\sigma_i\Gamma} := \{C^{\sigma_i\gamma} \in \mathcal{C}, \gamma \in \Gamma\}$$

für jedes $i \in I := \{0, 1, \dots, d\}$ erklärt. Die induzierte Matrixfunktion M auf \mathcal{D} wird mittels

$$(2.13) \quad M: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{N}_{I \times I}; \quad D \mapsto (m_{ij}(C)); \quad C \in D; \quad i, j \in I$$

eingeführt.

Damit haben wir zu einer periodischen Pflasterung (\mathcal{T}, Γ) das D -Symbol $\mathcal{D}(\Sigma_I, M)$ definiert. Dieses besteht aus einer D -Menge \mathcal{D} , die mit den σ_i -Operationen von Σ_I zu einem $d + 1$ -farbigen D -Graph ausgestattet ist, und aus der Matrixfunktion M nach (2.13).

Zum Beispiel hat jede der 2 Coxeterschen Dodekaederpflasterungen $(\mathcal{T}_k, \Gamma_k)$ ($k = 1, 2$ nach (1.1)) das D -Symbol bestehend aus dem eineckigen Graph mit 4 Schlingen

$\sigma_0: \cdots \cdots$, $\sigma_1: - - - - -$, $\sigma_2: \text{---}$, $\sigma_3: \text{~~~~}$ (Abb. 1.1)
 und aus der Matrix \mathcal{M}_k nach Formel (1.1).

2.4. Wenn wir umgekehrt von einem D -Graph ausgehen, so können wir aus $|\mathcal{D}|$ Simplexten nach den σ_i -Operationen (mehrdeutig) einen *Fundamentalebereich* \mathcal{F}_Γ für eine Gruppe Γ topologisch zusammenkleben. Die natürlichen Forderungen, entsprechend zu den obigen Formeln, ermöglichen dann die *Erzeugenden* und die *definierenden Relationen* für Γ bis auf gewisse *freien Parameter* einzuführen. Diese Freien Parameter beschreiben die möglichen Matrixfunktionen sowie die Simplexzerlegungen \mathcal{C} der möglichen Pflasterungen \mathcal{T} mit ihrer verallgemeinerten Coxeter-Gruppen $\Sigma_I(\mathcal{C}, M)$. Die allgemeine topologische Konstruktion ist auf Grund [13] in [7] und [15] beschrieben.

In Abschnitt 3 wird genau dieses inverse Problem illustriert werden. Hier erwähnen wir noch einige Sätze.

2.5. **Bemerkungen.** a) *Zwei Pflasterungen $(\mathcal{T}_1, \Gamma_1)$ und $(\mathcal{T}_2, \Gamma_2)$ sind genau dann äquivariant (siehe Abschnitt 1), wenn ihre D -Symbole isomorph sind, d.h. wenn es eine Bijektion*

$$(2.14) \quad \varphi: \mathcal{D}_1(\Sigma_I, \mathcal{M}_1) \rightarrow \mathcal{D}_2(\Sigma_I, \mathcal{M}_2), \quad D_1 \mapsto D_2 = D_1^\varphi$$

gibt, die die entsprechenden σ_i -Operationen und die Matrixfunktionen erhält:

$$(2.15) \quad (D_1^{\sigma_i})^\varphi = (D_1^\varphi)^{\varphi^{-1}\sigma_i\varphi} =: (D_1^\varphi)^{\sigma_i^\varphi}$$

$$\text{und } (m_{ij}(D_1))_1 = (m_{ij}(D_1^\varphi))_2.$$

b) $(\mathcal{T}_1, \Gamma_1)$ ist ein *Symmetriebruch* von $(\mathcal{T}_2, \Gamma_2)$, wenn es eine *Surjektion* φ mit (2.14) und (2.15) gibt (Abb. 1.1).

Um zu entscheiden, ob a) oder b) oder kein weder a) und b) gilt, hat D. Huson (im Druck) effektive Computerprogramme entwickelt.

c) Ein *Teilsymbol* $\mathcal{D}_{ij}(\Sigma_{ij}, \mathcal{M}_{ij})$ von $\mathcal{D}(\Sigma_I, \mathcal{M})$, bestehend aus einer Komponente des Teildiagrammes mit i - und j -Operationen und aus der entsprechenden *Minorfunktion*, beschreibt eine 1-dimensionale Pflasterung $(\mathcal{T}_{ij}, \Gamma_{ij})$. Hier ist Γ_{ij} der *Stabilisator* der entsprechenden $(d-2)$ -Fläche von \mathcal{C} und damit jeder $(d-2)$ -Fläche in ihrer Γ -Bahn (bis auf Konjugation) in der Gruppe Γ .

d) *Analoge Behauptungen gelten für die Komponenten der $k+1$ -farbigen Teilsymbole von $\mathcal{D}(\Sigma_I, \mathcal{M})$ ($1 \leq k \leq d$) und für k -Pflasterungen.*

Da die 1- und 2-dimensionalen Pflasterungen mit ihren Gruppen "wohlbekannt" sind, haben wir die Hoffnung, diese für die Dimension 3

induktiv beschreiben zu können. Die Schwierigkeiten scheinen aber sehr groß zu sein.

3. Die unendliche Serie $(T_p, \Gamma(p, 4); 3 \leq p)$

3.1. In Abb. 3.1 sehen wir den D -Graph D mit den involutorischen Permutationen (Transpositionen)

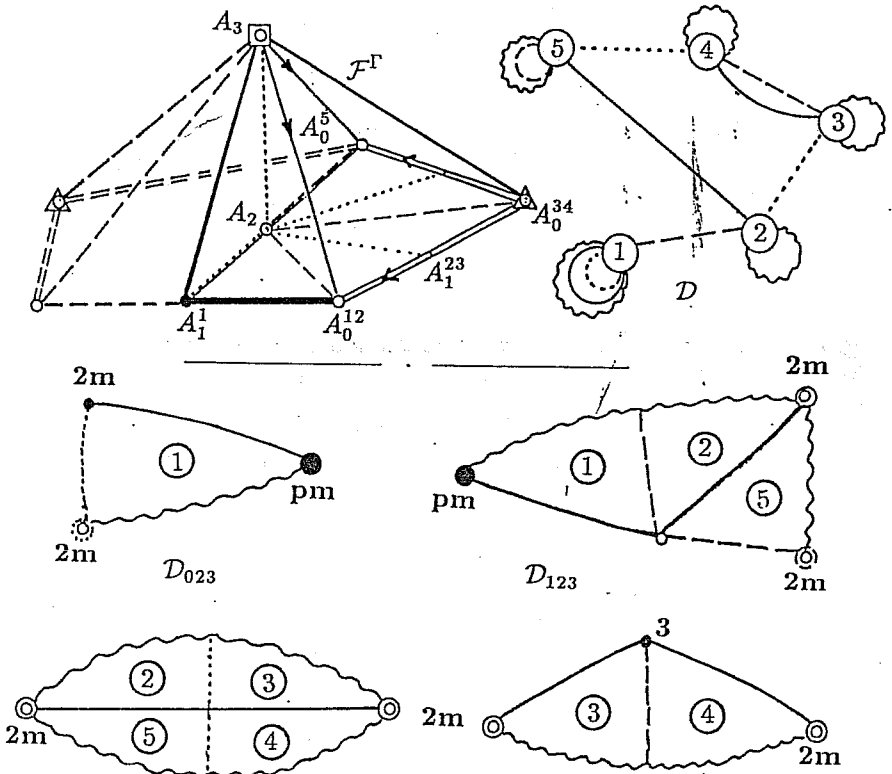


Abb. 3.1-3.2.

$$(3.1) \quad \begin{array}{ll} \sigma_0: (1)(2,3)(4,5) \cdots \cdots \cdots & \sigma_2: (1)(2,5)(3,4) \text{ ———} \\ \sigma_1: (1,2)(3,4)(5) \text{ - - - - -} & \sigma_3: (1)(2)(3)(4)(5) \text{ ~~~~~} \end{array}$$

gelistet von unserem Computer, wo $x \leftrightarrow D_x$ ($x = 1, 2, 3, 4, 5$).

Wenn wir das Teildigramm $D_{013} =: D^2$ nach Weglassen der Kan-

ten der σ_2 -Operation studieren, finden wir eine Komponente. Das bedeutet nach 2.5. d), daß die dem D -Symbol entsprechende (kombinatorische) Pflasterung (T, Γ) flächentransitiv ist. In Abb. 3.1 wird auch der aus 5 Simplexen zusammengesetzte Fundamentalebenebereich

$$(3.2) \quad \mathcal{F}_\Gamma = A_3 A_2 A_1^1 A_0^{12} \cup A_3 A_2 A_1^{23} A_0^{12} \cup A_3 A_2 A_1^{23} A_0^{34} \cup \\ \cup A_3 A_2 A_1^{45} A_0^{34} \cup A_3 A_2 A_1^{45} A_0^5 =: \bigcup_{k=1}^5 D_k$$

mit den flächenidentifizierenden Erzeugenden für die Gruppe Γ angegeben. Diese sind die Spiegelungen:

$$m_0 \text{ an der Fläche } A_3 A_2 A_1^1, \text{ wie } D_1^{\sigma_0} = D_1 \text{ zeigt;}$$

$$\text{und } m_1: A_3 A_1^1 A_0^{12} \text{ nach } D_1^{\sigma^2} = D_1.$$

Ferner haben wir die "Drehung"

$$r: A_3 A_0^{12} A_0^{34} \rightarrow A_3 A_0^5 A_0^{34} \text{ nach } D_2^{\sigma^2} = D_5, D_3^{\sigma^2} = D_4$$

und nach $m_{02}(D_k) = 2$ ($k = 2, 3, 4, 5$) d.h. der Stabilisator $\Gamma_{02}(D_k)$ der Kantenklasse $(A_1^{23} A_3, A_1^{34} A_3)$ ist trivial, wie die Teilpflasterung zu $D_{02}(D_k)$ ($k = 2, 3, 4, 5$) zeigt. Erzeugenden sind ferner

$$m_2: A_3 A_2 A_0^5 \text{ nach } D_5^{\sigma^1} = D_5;$$

$$m_3: A_1^1 A_0^{12} A_0^{34} A_0^5 \text{ nach } D^{\sigma^3} = D \text{ (für jede } D \in \mathcal{D})$$

und nach $m_{03}(D_\ell) = m_{13}(D_k) = 2$ ($\ell = 2, 3, 4, 5$ bzw. $k = 1, 2, 3, 4$), wie zuvor.

Die Relation $(m_0 m_1)^2 = 1$ ist eine Folgerung aus $m_{02}(D_1) = 2$. Ferner gelten $(m_0 m_3)^2 = 1$ und $(m_2 m_3)^2 = 1$ nach $m_{03}(D_1) = 2$ und $m_{13}(D_5) = 2$.

Weitere Relationen für Γ werden mittels

$$(3.3) \quad m_{01}(D) = 5, \quad m_{12}(D) = 3 \quad (D \in \mathcal{D})$$

festgelegt, da wir Pflasterungen mit Pentagondodekaedern wollen. Somit bestehen die Relationen

$$m_0 m_2 = 1 \quad (\text{so } m_2 = m_0) \text{ nach } m_{01}(D) = 5;$$

$$\text{ferner } m_1 r m_2 r^{-1} = 1 \text{ nach } m_{12}(D_1) = m_{12}(D_2) = m_{12}(D_5) = 3,$$

$$\text{und } r^3 = 1 \text{ nach } m_{12}(D_3) = m_{12}(D_4) = 3.$$

Wir haben weiters

$$(3.4) \quad m_{23}(D_1) = p \text{ und } m_{23}(D_2) = m_{23}(D_5) = 2x, \\ m_{23}(D_3) = m_{23}(D_4) = 2y,$$

was unmittelbar zu den Relationen

(3.5) $(m_1 m_3)^p = 1$, $(m_3 r m_3 r^{-1})^x = 1 = (m_3 r m_3 r^{-1})^y$ so $x = y$
führt. Damit haben wir die zwei freien Parameter $(p, 2x)$, $3 \leq p$, $2 \leq x$
für Γ und die Darstellung

$$(3.6) \quad \Gamma(p, 2x) = \left(m_0, m_1, m_3, r - 1 = m_0^2 = m_1^2 = m_3^2 = r^3 = \right. \\ \left. = (m_0 m_1)^2 = (m_0 m_3)^2 = (m_1 m_3)^p = m_1 r m_0 r^{-1} = (m_3 r m_3 r^{-1})^x \right)$$

durch die Matrixfunktion \mathcal{M} nach (3.3-5).

3.2. Nun untersuchen wir die Teilsymbole von $\mathcal{D}(\Sigma_I, \mathcal{M})$ mit 3 Operationen und die zu ihnen gehörenden 2-dimensionalen Pflasterungen, um die Stabilisatoren der Eckenklassen des Fundamentalbereiches \mathcal{F}_Γ zu bestimmen.

Abb. 3.2 zeigt den sphärischen Fundamentalbereich für den Stabilisator $\Gamma_{012} = \Gamma(A_3)$, der zum Teilsymbol $\mathcal{D}^3 := \mathcal{D}_{012}(\Sigma_{012}, \mathcal{M}_{012})$ gehört. Die Gruppe $\Gamma(A_3) \cong [3^+, 4] \cong \mathfrak{m}\bar{3}$ hat 24 Elemente, und transformiert das Pentagondodekaeder T des Zentrums A_3 in sich. Die sphärische Gruppe $\mathfrak{m}\bar{3}$ hat eine Signatur $(+, 0; [3]; \{(2)\})$ im Sinne von [10], [11], [20].

Hier ist die Faktorfläche $S^2/\mathfrak{m}\bar{3} \sim \mathcal{F}_{\mathfrak{m}\bar{3}}$ orientierbar (+) mit Genus 0. Sie besitzt ein singuläres 3-Rotationszentrum, wie wir in Klammer [3] des Symbols finden. Sie besitzt auch ein Randkomponent mit einem 2-Diederzentrum, wie $\{(2)\}$ im Symbol zeigt.

Kein Problem gibt es mit dem Stabilisator $\Gamma(A_1^4) = \Gamma_{023}(A_1^4)$, der zu $\mathcal{D}_{023}(D_1)$ gehört. Das ist ebenfalls eine endliche sphärische Gruppe $[2, p] =: \frac{p}{m}\mathfrak{m}$ mit Signatur $(+, 0; []; \{(2, 2, p)\})$ (Abb. 3.2). Der Stabilisator $\Gamma_{023}(A_1^{23}, A_1^{45})$ gehört zu $\mathcal{D}_{023}(D_k)$ ($k = 2, 3, 4, 5$) und ist eine sphärische Gruppe $\mathfrak{xm} = [x]$ mit Signatur $(+, 0; []; \{(x, x)\})$ (Abb. 3.2).

Eine zentrale Rolle spielen die 0-Eckenstabilisatoren. $\Gamma_{123}(A_0^{12}, A_0^5)$ gehört zum Teilsymbol $\mathcal{D}_{123}(D_1, D_2, D_5)$. Die entsprechende 2-dimensionale Pflasterung (Abb. 3.2) besitzt die Signatur $(+, 0; []; \{(2, x, p)\})$. $\Gamma_{123}(A_0^{34})$ wird durch $\mathcal{D}_{123}(D_3, D_4)$ und die entsprechende 2-Pflasterung (Abb. 3.2) beschrieben. Die Signatur $(+, 0; [3]; \{(x)\})$ zeigt, daß $\Gamma_{123}(A_0^{34})$ nur im Falle $x = 2$ eine sphärische Gruppe $\mathfrak{m}\bar{3} = [3^+, 4]$ der Ordnung 24 ist (Abb. 3.2). Dann ist aber $\Gamma_{123}(A_0^{12}, A_0^5) = [2, p] =: \frac{p}{m}\mathfrak{m}$ eine sphärische Gruppe der Ordnung $4p$.

3.3. Das Hauptproblem ist, ob die obigen unendlich vielen Fälle in H^3 realisierbar sind, oder nicht. Die Antwort ist ja.

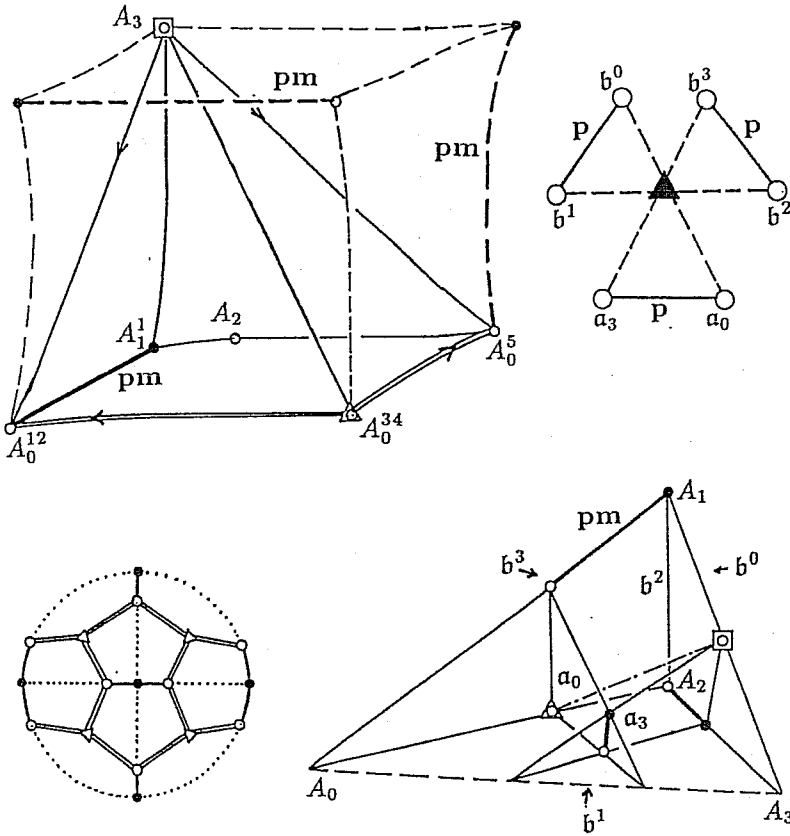


Abb. 3.3-3.4.

Zunächst konstruieren wir den sogenannten Spitzenwürfel oder Lambert-Würfel (Abb. 3.3), mit 3 Keilwinkeln von $\frac{\pi}{p}$ an 3 schiefen Kanten und mit rechten Winkeln bei den anderen. Das wird zur metrischen Konstruktion von \mathcal{F}_Γ in Abb. 3.1 notwendig und hinreichend sein. Wenn wir nämlich 3 Bilder von \mathcal{F}_Γ um die "Drehachse" kombinatorisch zusammenkleben, dann haben wir einen würfelförmigen Fundamentalbereich $\mathcal{F}_w(p)$ für eine durch 6 Spiegelungen erzeugte Gruppe $\Gamma_w(p)$ mit dem Coxeter-Diagramm in Abb. 3.3. Gebrochene Linien weisen auf die gemeinsamen Lotstrecken der entsprechenden zwei Ebenen hin. Die metrische Existenz eines solchen Würfels in H^3 ist wohlbekannt. Eine einfache Konstruktion, wie folgt, beruht auf dem Vektormodell

von H^3 [12].

3.4. Wir gehen von der folgenden Matrix

$$(3.7) \quad (b^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \frac{\pi}{p} & 0 & 0 \\ -\cos \frac{\pi}{p} & 1 & -\operatorname{ch} t & 0 \\ 0 & -\operatorname{ch} t & 1 & -\cos \frac{\pi}{p} \\ 0 & 0 & -\cos \frac{\pi}{p} & 1 \end{pmatrix} = \\ = ((b^i; b^j)) \quad (3 \leq p \in \mathbb{N}; 0 < t \in \mathbb{R})$$

aus, die wir als eine Coxeter-Schläfli Matrix betrachten. Dann definieren (b^{ij}) die Skalarprodukte der linear-unabhängigen Formen b^0, b^1, b^2, b^3 des dualen Raumes \mathcal{V}_4 eines 4-Vektorraums V^4 über dem Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen.

Wir können nun mittels (b^{ij}) ein Skalarprodukt

$$(3.8) \quad \langle ; \rangle: \mathcal{V}_4 \times \mathcal{V}_4 \rightarrow \mathbb{R}, \langle u, v \rangle := \langle b^i u_i; b^j u_j \rangle = u_j b^{ij} u_j$$

zunächst im dualen Raum \mathcal{V}_4 definieren, wobei wir die Einstein-Schouten Konventionen benutzen.

Sei $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ in V^4 die duale Basis zu $\{b^0, b^1, b^2, b^3\}$ d.h. es gelte

$$(3.9) \quad a_i b^j = \delta_i^j \quad (\text{das Kronecker-Symbol}).$$

Wegen

$$(3.10) \quad \operatorname{Det}(b^{ij}) = \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{p}\right)^2 - \operatorname{ch}^2 t =: B < 0,$$

können wir die inverse Matrix

$$(3.11) \quad (a_{ij}) = (b^{ij})^{-1} \quad \text{mit} \quad a_{ik} b^{kj} = \delta_i^j$$

bilden, und ein Skalarprodukt

$$(3.12) \quad \langle ; \rangle: V^4 \times V^4 \rightarrow \mathbb{R}, \langle x, y \rangle := \langle x^i a_i; y^j a_j \rangle = x^i a_{ij} y^j$$

in V^4 definieren.

Die lineare Polarität und ihre inverse Polarität

$$(3.13) \quad \begin{aligned} (*) &: \mathcal{V}_4 \rightarrow V^4: u \mapsto u_* = u; \\ (*) &: V^4 \rightarrow \mathcal{V}_4: x \mapsto x^* = \bar{x} \end{aligned}$$

sind über

$$u := u_* = (b^i u_i)_* = u_i b_*^i = u_i b^{ij} a_j \quad \text{bzw.}$$

$$\bar{x} = x^* = (x^i a_i)^* = a_i^* x^i = b^k a_{ki} x^i$$

definiert. In Zusammenhang mit den Gleichungen

$$(3.14) \quad \langle \mathbf{x}; \mathbf{u} \rangle = \mathbf{xu} = \langle \mathbf{x}; \mathbf{u} \rangle$$

können wir die Vektoren und Formen und ebenso \mathcal{V}_4 und \mathbf{V}^4 kanonisch identifizieren.

Wir können den projektiv metrischen Raum $\mathcal{P}^3(\mathbf{V}^4, \mathcal{V}_4, \langle ; \rangle)$, nun wie üblich, über die Teilraumstrukturen von \mathbf{V}^4 bzw. \mathcal{V}_4 mit Skalarprodukt $\langle ; \rangle$ definieren. Eine Ebene (\mathbf{u}) ist mit einem Punkt (\mathbf{x}) inzident, oder (\mathbf{u}) und (\mathbf{x}) sind orthogonal, oder (\mathbf{x}) und (\mathbf{u}) sind konjugierte (polare) Punkte in \mathcal{P}^3 , wenn $0 = \mathbf{xu} = \langle \mathbf{x}; \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{x}; \mathbf{u} \rangle$ gilt.

Dieses $\langle ; \rangle$ hat nach (3.7) die Signatur $(+++)$, sodaß wir eine hyperbolische Metrik haben. Punkte (\mathbf{x}) mit $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0$ und Ebene (\mathbf{u}) mit $\langle \mathbf{u}; \mathbf{u} \rangle > 0$ definieren die eigentlichen Punkte bzw. Ebenen des hyperbolischen Raumes $H^3 \subset \mathcal{P}^3$. Die idealen Punkte (\mathbf{x}) und ihre Polaren, die idealen Ebenen (\mathbf{x}) werden über $0 = \langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle$ erklärt. Die Pole von eigentlichen Ebenen und die Polaren von eigentlichen Punkten sind die äußeren Raumelemente von H^3 .

Die Entfernung s der eigentlichen Punkte (\mathbf{x}) und (\mathbf{y}) ist durch

$$(3.15) \quad \text{ch } s = -\langle \mathbf{x}; \mathbf{y} \rangle / (\langle \mathbf{x}; \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{y}; \mathbf{y} \rangle)^{1/2} > 1$$

wohl definiert; ebenso der Winkel α der eigentlichen Ebenen (\mathbf{u}) und (\mathbf{v}) durch

$$(3.16) \quad \cos \alpha = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle / (\langle \mathbf{u}; \mathbf{u} \rangle \cdot \langle \mathbf{v}; \mathbf{v} \rangle)^{1/2}.$$

Die Bewegungsgruppe von $H^3 \subset \mathcal{P}^3$ wird durch Spiegelungen an Pol-Polaren Paaren erzeugt. Die Gleichungen

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{p}): \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{x} - \frac{2\langle \mathbf{x}; \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}; \mathbf{p} \rangle} \mathbf{p}; \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{u} - \mathbf{p} \frac{2\langle \mathbf{u}; \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}; \mathbf{p} \rangle} \end{aligned}$$

definieren die Spiegelung für Punkte bzw. Ebenen. Eine Spiegelung ist involutorisch und sie erhält das Skalarprodukt $\langle ; \rangle$.

3.5. Wir kehren zum Spitzenwürfel im Coxeter-Diagramm in Abb. 3.3 zurück.

Es seien über Formen $\mathbf{b}^0, \mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^3$ nach (3.7) die Seitenflächen eines Simplexes von $H^3 \subset \mathcal{P}^3$ dargestellt. Aus den Formeln (3.15–16) ersehen wir, daß die Winkel zwischen (\mathbf{b}^0) und (\mathbf{b}^1) sowie zwischen (\mathbf{b}^2) und (\mathbf{b}^3) gleich $\frac{\pi}{p}$ sind. Die Entfernung der Ebenen (\mathbf{b}^1), (\mathbf{b}^2) ist unter Beachtung von (3.15–16) genau der Parameter t . Die anderen

rechten Winkel werden ebenfalls durch unsere Formeln realisiert. Die duale Basis $\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ zu $\{\mathbf{b}^i\}$ kennzeichnet die Eckpunkte unseres Simplexes. Wie die symmetrische Matrix

$$(3.18) \quad (a_{ij}) = ((\mathbf{a}_i; \mathbf{a}_j)) = (b^{ij})^{-1}$$

mit

$$\begin{aligned} a_{00} = a_{33} &= \frac{1}{B} \left(\sin^2 \frac{\pi}{p} - \operatorname{ch}^2 t \right) > 0, & a_{11} = a_{22} &= \frac{1}{B} \sin^2 \frac{\pi}{p} < 0, \\ a_{01} = a_{23} &= \frac{1}{B} \cos \frac{\pi}{p} \sin^2 \frac{\pi}{p} < 0, & a_{02} = a_{13} &= \frac{1}{B} \cos \frac{\pi}{p} \operatorname{ch} t < 0, \\ a_{03} &= \frac{1}{B} \cos^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{ch} t < 0, & a_{12} &= \frac{1}{B} \operatorname{ch} t < 0 \end{aligned}$$

$$B = \sin^4 \frac{\pi}{p} - \operatorname{ch}^2 t$$

zeigt, liegen die Eckpunkte (\mathbf{a}_0) und (\mathbf{a}_3) außerhalb der Absolutfigur von H^3 , (\mathbf{a}_1) und (\mathbf{a}_2) sind eigentliche Punkte. Die Polarebenen (\mathbf{a}_3) und (\mathbf{a}_0) sind eigentlich. Wir erfüllen alle Forderungen des Coxeter-Diagrammes in Abb. 3.3, wenn der Winkel $\frac{\pi}{p}$ zwischen (\mathbf{a}_0) und (\mathbf{a}_3) genau $\frac{\pi}{p}$ ist. Dazu müssen wir den Parameter t noch geeignet wählen. Nach (3.16) und (3.18) folgt die Bedingung

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \cos \frac{\pi}{p} &= -a_{03} / \sqrt{(a_{00} a_{33})} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{ch} t}{\operatorname{ch}^2 t - \sin^2 \frac{\pi}{p}}, \\ \text{also } \operatorname{ch} t &= \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{p} + \left(1 - \frac{3}{4} \cos^2 \frac{\pi}{p} \right)^{1/2} > 1, \\ \text{wenn } 0 > \cos \frac{\pi}{p} &\left(\cos \frac{\pi}{p} - 1 \right), \text{ d.h. } p \geq 3 \text{ gilt.} \end{aligned}$$

Wir können nun leicht nachprüfen, daß die Entfernung zwischen den Ebenen (b^0) und (\mathbf{a}_0) und ebenso zwischen (b^3) und (\mathbf{a}_3) unser bereits fester Parameter t ist. Nach unseren vorigen Überlegungen ist das gewünschte hyperbolische Pentagondodekaeder damit konstruiert. In Abb. 3.4 haben wir sein Bild in stereographischer Projektion dargestellt. Bei den fetten Kanten haben die Keilwinkel die Größe $\frac{2\pi}{p}$, bei den anderen sind es rechte Winkel.

4. Die Pflasterungen $(T_q, \Gamma(q, 6); q = 3, 4, 5)$

4.1. In Abb. 4.1 ist der D -Graph mit

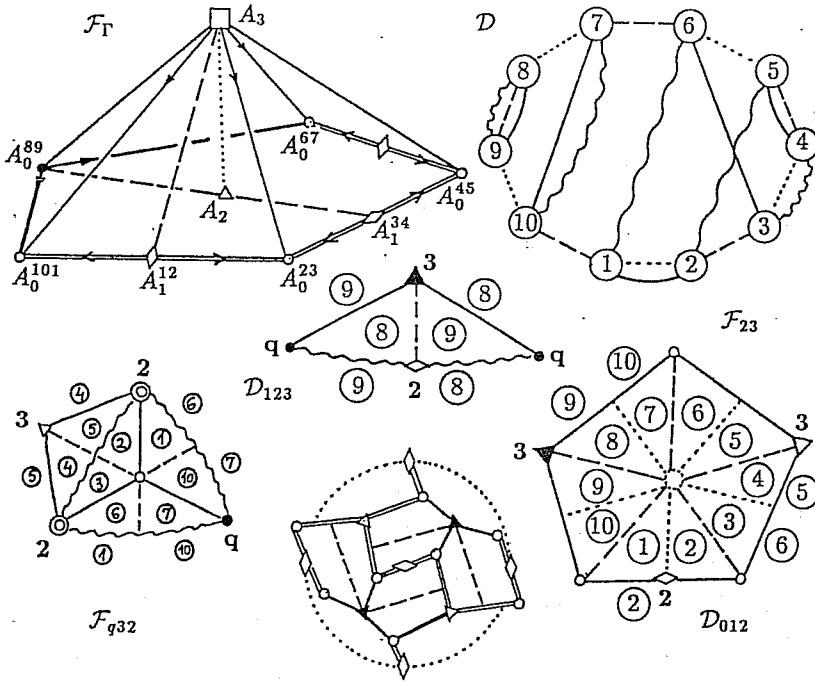


Abb. 4.1.

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad & \sigma_0: (1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,10) \dots\dots \\
 & \sigma_1: (1,10)(2,3)(4,5)(6,7)(8,9) \text{ ---} \\
 & \sigma_2: (1,2)(3,6)(4,5)(7,10)(8,9) \text{ ———} \\
 & \sigma_3: (1,6)(2,5)(3,4)(7,10)(8,9) \text{ ~~~~~}
 \end{aligned}$$

angegeben, der mittels Computer bestimmt wurde. Für die gewünschten Dodekaederpflasterungen haben wir die Matrixfunktion:

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad & m_{01}(D) = 5, \quad m_{12}(D) = 3 \text{ für jedes } D \in \mathcal{D}; \\
 & m_{23}(D_1, D_2, D_5, D_4, D_3, D_6) = 3s, \quad 1 \leq s; \\
 & m_{23}(D_7, D_{10}) = m_{23}(D_8, D_9) = q, \quad 3 \leq q; \\
 & m_{02}(D) = m_{03}(D) = m_{13}(D) = 2 \text{ für jedes } D \in \mathcal{D}
 \end{aligned}$$

mit den freien Parametern $(q, 3s)$. Abb. 4.1 zeigt einen entsprechenden

Fundamentalebene \mathcal{F}_Γ für die Gruppe Γ . Ebenso wie in Abschnitt 3 können wir die Erzeugenden

$$(4.3) \quad \begin{aligned} r_1 &: A_3 A_0^{101} A_0^{23} \rightarrow A_3 A_0^{23} A_0^{101}, \\ r_2 &: A_3 A_0^{67} A_0^{45} \rightarrow A_3 A_0^{23} A_0^{45}. \\ r_3 &: A_3 A_0^{101} A_0^{89} \rightarrow A_3 A_0^{67} A_0^{89} \text{ durch } \sigma_2, \text{ ferner} \\ r &: A_0^{89} A_0^{101} A_0^{23} A_0^{45} A_0^{67} \rightarrow A_0^{89} A_0^{67} A_0^{45} A_0^{23} A_0^{101} \text{ durch } \sigma_3 \end{aligned}$$

eingeführen. Die definierenden Relationen für Γ sind

$$(4.4) \quad \begin{aligned} 1 &= r_1^2 = r_2^3 = r_3^3 = r_3 r_2 r_1 = r^2 = (r r_3)^q = \\ &= (r_1 r r_2 r r_2^{-1} r)^s \text{ nach (4.2)}. \end{aligned}$$

Die wesentlichen 0-Eckenstabilisatoren nach \mathcal{D}_{123} sind:

$$(4.5) \quad \Gamma_{123}(A_0^{89}) = (+, 0; [q, 3, 2]; \{ \}) \quad (\text{Abb. 4.1}),$$

$$(4.6) \quad \Gamma_{123}(A_0^{101}, A_0^{67}, A_0^{23}, A_0^{45}) = (+, 0; [q, 3, s]; \{ \}).$$

Beide Fundamentalebereiche stellen nach [10], [20] orientierbare (+) Flächen mit Genus 0 dar. In den obigen Flächensymbolen sind die singuläre Rotationszentren in Klammern [] aufgezählt. Die Gruppe (4.5) ist genau dann endlich (sphärisch), wenn $q = 3, 4, 5$ ist. Für die Gruppe (4.6) können nur die Fälle $(q, s) = (3, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2)$ auftreten. Der Fall $(3, 1)$ führt zu einer nicht-maximalen Pflasterung (\mathcal{T}, Γ) im sphärischen Raum S^3 . Die anderen Fälle mit $s = 2$ führen in der Tat zu hyperbolischen Realisierungen, wie die folgenden überlegungen zeigen.

4.2. Wir beginnen mit dem Stabilisator

$$(4.7) \quad \Gamma_{012}(A_3) = (+, 0; [2, 3, 3]; \{ \}) = [3, 3]^+ = 23$$

der Ordnung 12, der eine sphärische Rotationsgruppe liefert. Diese wirkt auf den flächen des Dodekaeders einfach transitiv (Abb. 4.1 unten in der Mitte). In der üblichen Darstellung führen wir zunächst die euklidischen Koordinaten $A_0^{101}(x, y, z)$, $A_0^{23}(x, -y, -z)$, $A_0^{67}(y, z, x)$ für die 23-Bilder, $A_3(0, 0, 0)$ für den Aufpunkt ein (Abb. 4.1). $A_1^{12}(x, 0, 0)$ ist ein Punkt der r_1 -Rotationsachse, $A_0^{89}(a, a, a)$ kennzeichnet die r_3 -Rotationsachse, $A_0^{45}(b, -b, b)$ liegt auf der Achse der 3-Drehung r_2 . Die reellen Zahlen $0 \leq |z| \leq y \leq x$; $0 < a, b$ werden später geeignet gewählt werden. Nun führen wir in diesem euklidischen Raum die Einheitskugel mit dem Zentrum A_3 ein, die das Cayley-Kleinsche Modell der hyperbolischen Raumgeometrie realisiert. Zu den euklidischen Basisvektoren

e_1, e_2, e_3 , führen wir formal einen neuen Basisvektor e_0 ein, um einen reellen Vektorraum V^4 aufzuspannen. Für beliebige $x = x^i e_i$ und $y = y^j e_j$ definiert die Formel

$$(4.8) \quad \langle x; y \rangle = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 \in \mathbb{R}$$

ein Skalarprodukt der Signature $(+, +, +, -)$. Über die Teilraumstruktur von V^4 gewinnen wir den projektiv-metrischen Raum $\mathcal{P}^3(V^4(\langle; \rangle))$, in den der hyperbolische Punktbaum

$$(4.9) \quad H^3 := \{(x) \subset V^4 : \langle x; x \rangle := -x^0 x^0 + x^1 x^1 + x^2 x^2 + x^3 x^3 < 0\}$$

auf übliche Weise eingebettet wird (vgl. 3.4). Mit $x = x^1/x^0, y = x^2/x^0, z = x^3/x^0$ in (4.9), stimmt H^3 in der Tat mit der euklidischen Einheitskugel überein. Der zu V^4 duale Raum \mathcal{V}_4 kennzeichnet die Ebenen von H^3 . Wir benützen, daß die euklidischen Bewegungen um das feste Zentrum A_3 genau die entsprechenden hyperbolischen Bewegungen des Modells darstellen und ferner die Geometrien der Sphären in den Räumen S^3, E^3, H^3 alle isomorph sind. Zur Konstruktion des Fundamentalbereiches \mathcal{F}_Γ der Gruppe $\Gamma(q, 6)$ in H^3 führen wir die Punkte mit den zugeordneten Vektoren

$$(4.10) \quad \begin{aligned} A_3 &\sim \mathbf{c}(1, 0, 0, 0), \quad A_0^{89} \sim \mathbf{a}_0(1, a, a, a), \\ A_0^{45} &\sim \mathbf{b}(1, b, -b, b), \quad A_0^{101} \sim \mathbf{x}(1, x, y, z), \quad A_1^{12} \sim \mathbf{d}(1, x, 0, 0), \\ A_0^{23} &\sim \mathbf{x}^{r_1}(1, x, -y, z), \quad A_0^{67} \sim \mathbf{x}^{r_3} = \mathbf{x}^{r_1 r_2^{-1}}(1, y, z, x) \end{aligned}$$

ein. Nun wollen wir die Achse $A_0^{89} A_1^{34}$ der Halbdrehung r im Sinne der Formeln (4.3-4) bestimmen und damit die die Gruppe $\Gamma(q, 6)$ kennzeichnenden Parameter a, x, y, z für $q = 3, 4$ und 5 festlegen.

4.3. *Wir wollen nun die Formel für eine Geradenspiegelung im unseren Modell von H^3 entwickeln.* Es seien (\mathbf{a}_0) und (\mathbf{a}_1) zwei eindimensionale Unterräume von V^4 , welche als Punkte in H^3 interpretiert, eine Gerade $r = (\mathbf{a}_0)(\mathbf{a}_1)$ festlegen. Die Spiegelung oder Halbdrehung um die Achse r wird durch die synonym bezeichnete Abbildung

$$(4.11) \quad r: y \mapsto y^r \sim y - 2\langle y; \mathbf{a}_\alpha \rangle a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta \quad \alpha, \beta \in \{0, 1\},$$

wo

$$a_{\alpha\beta} := \langle \mathbf{a}_\alpha; \mathbf{a}_\beta \rangle, \quad (a^{\alpha\beta}) := (a_{\alpha\beta})^{-1}$$

mit dem Skalarprodukt (4.8) erfaßt. Mit der Summationskonvention gilt

$$(4.12) \quad a_{\gamma\alpha} a^{\alpha\beta} = \delta_\gamma^\beta \quad (\text{das Kronecker-Symbol})$$

für die regulären 2×2 Matrizen.

In der Tat ist die Abbildung r nach (4.11) involutorisch und die Punkte (\mathbf{a}_γ) ($\gamma = 0, 1$) der Achse werden gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\gamma &\mapsto \mathbf{a}_\gamma - 2\langle \mathbf{a}_\gamma; \mathbf{a}_\alpha \rangle a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta = \mathbf{a}_\gamma - 2a_{\gamma\alpha} a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta = \\ &= \mathbf{a}_\gamma - 2 \cdot \delta_\gamma^\beta \mathbf{a}_\beta = \mathbf{a}_\gamma - 2\mathbf{a}_\gamma = -\mathbf{a}_\gamma \end{aligned}$$

auf sich abgebildet, gleiches gilt für die anderen Achsenpunkte. Ein beliebiger Punkt (\mathbf{u}) der polaren Geraden der Achse wird mittels $\langle \mathbf{u}, \mathbf{a}_\gamma \rangle = 0$ ($\gamma = 0, 1$) festgelegt.

Nun definieren wir einen Achsenpunkt mit Hilfe von

$$(4.13) \quad \mathbf{a}_0(1, a, a, a), \text{ einen weiteren mit } \mathbf{a}_1\left(1, \frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{x+z}{2}\right).$$

Dann gilt ersichtlich nach (4.11)

$$(4.14) \quad \mathbf{x}(1, x, y, z) \xrightarrow{r} \mathbf{x}^r(1, y, z, x), \text{ also } A_0^{101} \xrightarrow{r} A_0^{67}.$$

Hiermit wird die Matrix $(a_{\alpha\beta})$ mit

$$(4.15) \quad \begin{aligned} a_{00} &= \langle \mathbf{a}_0; \mathbf{a}_0 \rangle = -1 + 3a^2 < 0, \\ a_{01} &= a_{10} = \langle \mathbf{a}_0; \mathbf{a}_1 \rangle = -1 + a(x+y+z) < 0, \\ a_{11} &= \langle \mathbf{a}_1; \mathbf{a}_1 \rangle = -1 + \frac{1}{4}\{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2\} < 0 \end{aligned}$$

definiert, deren Determinante

$$(4.16) \quad A = a_{00}a_{11} - (a_{12})^2 < 0$$

ist. Die inverse Matrix $(a^{\alpha\beta})$ wird durch

$$(4.17) \quad a^{00} = \frac{1}{A}a_{11}, \quad a^{10} = a^{01} = -\frac{1}{A}a_{01}, \quad a^{11} = \frac{1}{A}a_{00}$$

bestimmt. Die Forderung in (4.3)

$$(4.18) \quad A_0^{23} \xrightarrow{r} A_0^{45}, \text{ d.h. } \mathbf{x}^{r1}(1, x, -y, -z) \xrightarrow{r} \mathbf{b}(1, b, -b, b)$$

führt mit (4.11) zu zwei Gleichungen, welche besagen: Der Bildvektor \mathbf{x}^{r1r} hat eine gleiche erste und dritte Koordinaten, während zweite Koordinate zur ersten negativ gleich ist.

4.4. Nun kehren wir zu den zwei letzten Relationen aus (4.4) zurück, die uns die dritte und vierte Gleichung liefern. Die Relation $1 = (rr_3)^2$ ist gemäß der sphärischen Geometrie (siehe die Dreiecke ⑧ ⑨ in Abb. 4.1) erfüllt, wenn für den Winkel bei A_0^{89}

$$(4.19) \quad \cos A_3 A_0^{89} A_1^{34} \angle = \cos[(c)(\mathbf{a}_0)(\mathbf{a}_1) \angle] = \cos \frac{\pi}{q} / \sin \frac{\pi}{3}$$

gilt.

Mit $s = 2$ bedeutet die Relation $1 = (r_1 r r_2 r r_2^{-1} r)^2$, daß die Halbdrehungsachse r_1 zur Bildachse $r r_2^{-1} r$ im Punkt $A_1^{12} \sim d(1, x, 0, 0)$ senkrecht ist. Da $A_1^{34} \xrightarrow{r_2^{-1} r} A_1^{12}$ gilt, müssen wir das $r_2^{-1} r$ -Bild des Punktes A_0^{89} berechnen. Wir sehen, daß

$$a_0(1, a, a, a) \xrightarrow{r_2^{-1}} a_0^{r_2^{-1}}(1, -a, -a, a) \xrightarrow{r} a_0^{r_2^{-1} r} =: a_0^*$$

nach (4.11) bestimmt werden kann, doch leistet das folgende Lemma wertvolle Dienste:

Lemma. Sind (b_0) , (b_1) , (b_2) die Eckpunkte eines hyperbolischen Dreiecks und ist β_0 der Winkel beim Eckpunkt (b_0) , so gilt die Gleichung

$$(4.20) \quad \cos \beta_0 = \frac{b_{01} b_{20} - b_{00} b_{21}}{\sqrt{(b_{00} b_{22} - b_{02}^2)(b_{00} b_{11} - b_{01}^2)}}$$

mit der Matrix $(b_{ij}) = ((b_i; b_j))$, $i, j \in \{0, 1, 2\}$.

Den Beweis können wir im Sinne von [12] leicht ausführen. Tatsächlich drückt (4.20) gerade den Cosinus-Satz für die Dreiecksseiten s_{01} , s_{12} , s_{02} aus, wenn wir den Zähler und den Nenner durch $\sqrt{b_{00} b_{00} b_{11} b_{22}}$ dividieren. Wir erhalten dann nach (3.15) in der Tat

$$(4.21) \quad \cos \beta_0 = \frac{\operatorname{ch} s_{01} \cdot \operatorname{ch} s_{02} - \operatorname{ch} s_{12}}{\operatorname{sh} s_{02} \cdot \operatorname{sh} s_{01}}. \quad \diamond$$

Wir wenden nun (4.20) zuerst auf das Dreieck $(a_0)(a_1)(c)$ an. Dann liefern (4.19) und (4.20) mit (4.10), (4.15), (4.16) unsere dritte Gleichung

$$(4.22) \quad \cos \frac{\pi}{q} / \sin \frac{\pi}{3} = \frac{(-1 + a(x + y + z))(-1) - (-1 + 3a^2)(-1)}{\sqrt{[(-1 + 3a^2)(-1) - (-1)^2] \cdot A}}.$$

Sie reduziert sich auf die besonders einfache Gleichung

$$(4.23) \quad 2 \left(\cos \frac{\pi}{q} \right) \sqrt{-A} = 3a - (x + y + z).$$

Eine ähnliche Überlegung für das Dreieck $(d)(c)(a_0^*)$, mit dem rechten Winkel bei (d) , führt zur Gleichung

$$(4.24) \quad -x a_0^{*0} + a_0^{*1} = 0,$$

wo a_0^{*0} die nullte, a_0^{*1} die erste Koordinate des Vektors $a_0^* := a_0^{r_2^{-1} r}$ bezeichnet.

4.5. Damit haben wir für die vier Unbekannten

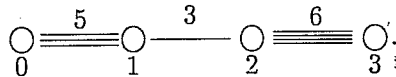
$$(4.25) \quad \begin{aligned} a, x, y, z \text{ mit } 0 < a < \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad y - z \geq 0, \\ y + z \geq 0, \quad x - y \geq 0, \quad 1 - (x^2 + y^2 + z^2) > 0, \\ (y, z) \neq (0, 0) \quad (y, z) \neq (x, x) \text{ und } (y, z) \neq (x, -x) \end{aligned}$$

vier komplizierte algebraische Gleichungen gefunden, von denen zwei in (4.18) stehen und je eine in (4.23) bzw. (4.24) angegeben wurde. Dieses System ist zu lösen mit den Parametern $q = 3, 4, 5$.

Ein wichtiger Grenzfall liegt für $q = 6$ vor und besitzt die Lösung

$$(4.26) \quad a = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}, \quad y = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{6}, \quad z = 0.$$

Dies führt zum regulären Pentagondodekaeder mit idealen Eckpunkten auf der Absolutfigur. Dazu gehört das Coxeter-Diagramm



Dies bedeutet: Jeder Keilwinkel des Dodekaeders ist $2\pi/6$. Die Gruppe $\Gamma(6, 6)$ ist nicht maximal und wegen der idealen Eckpunkte aus den Untersuchungen ausgeschlossen. Jedoch hilft sie bei der Computerlösung des obigen Systems.

Ich danke meinem Neffen András Szücs (18) für die Computerlösung durch "EUREKA: The Solver". Wir haben die folgenden Resultate bekommen:

$$q=3: \quad a = 0,43179031; \quad (b = 0,52258057); \\ x = 0,88826347, \quad y = 0,24479189, \quad z = -0,13507566.$$

$$q=4: \quad a = 0,51596916; \quad (b = 0,55918439); \\ x = 0,92191361, \quad y = 0,30668816, \quad z = -0,069738281.$$

$$q=5: \quad a = 0,55529221; \quad (b = 0,57149464); \\ x = 0,93073512, \quad y = 0,33816666, \quad z = -0,027537192.$$

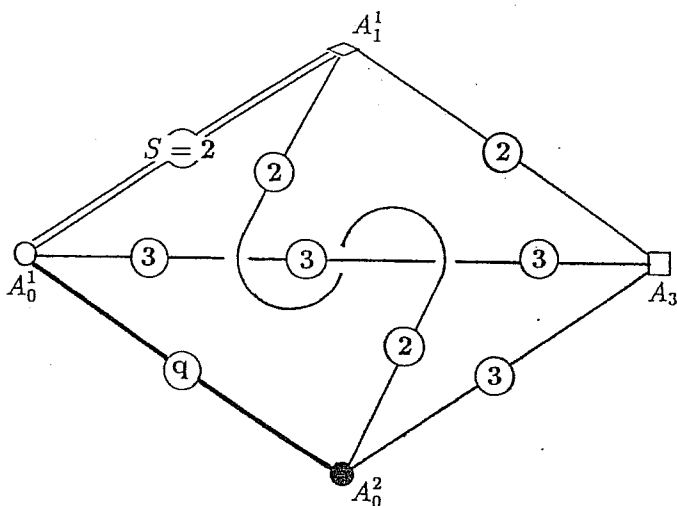


Abb. 4.2.

Bemerkung. Der Bahnenraum $H^3/\Gamma(q,6) \sim \mathcal{F}_T$ in Abb. 4.1 kann durch den Knoten in Abb. 4.2 dargestellt werden. Die numerierten Linien bezeichnen die Drehachsenklassen mit ihren Ordnungen. Die Knotenpunkte weisen auf die entsprechenden Eckenklassen von \mathcal{F}_T hin.

5. Die Vollständigkeit der Klassifikation

Wie in Abschnitt 2 erwähnt, lieferte unser Algorithmus in [7] alle kombinatorischen flächentransitiven Pflasterungen, wo die Stabilisatoren der Körper, Flächen, Kanten und Ecken (!!!) der Pflasterung T endliche (sphärische) Gruppen sind.

Für die Pentagondodekaeder-Pflasterungen müssen wir diejenigen D -Symbole $\mathcal{D}(\Sigma_I, \mathcal{M})$ (bis auf D -Isomorphie) auflisten, wo

$$I = \{0, 1, 2, 3\}, \text{ die Dimension } d = 3 \text{ ist}$$

und die Matrixfunktion $\mathcal{M}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{N}_{I \times I}$ (beschrieben in Abschnitt 2) den folgenden zusätzlichen Forderungen 1)–4) genügt:

- 1) $m_{01}(D) = 5$, $m_{12}(D) = 3$ für jedes $D \in \mathcal{D}$, denn jeder Pflasterstein T von T ist ein Pentagondodekaeder.
- 2) Die wichtigen Matrixkoeffizienten $m_{23}(D)$ ($D \in \mathcal{D}$) sind so auszuwählen, daß die Teilsymbolkomponente von \mathcal{D}^i , gewonnen durch

Streichen genau einer i -Operation $i \in I$, mit den verbliebenen drei Operationen je eine sphärische Pflasterung endlicher Gruppe Γ^i darstellt.

- 3) Das Teilsymbol \mathcal{D}^2 , d.h. mit 0-, 1-, 3-Operationen, besteht aus einer einzigen Komponente, welche den Flächenstabilisator Γ^2 bis auf Konjugiertsein kennzeichnet.
- 4) Das D -Symbol $\mathcal{D}(\Sigma_I, \mathcal{M})$ gestattet keine solche Abbildung auf ein kleineres D -Symbol $\overline{\mathcal{D}}$, die die σ_i -Operationen $i \in I$ und die Matrix-funktion erhält. Dies bedeutet, daß die Gruppe Γ maximal ist, also der Isomorphismus $\Gamma \cong \text{Aut } \mathcal{T}$ besteht.

Geometrisch ausgedrückt, müssen wir diejenigen simplizial-zusammengeklebten Fundamentaltbereiche \mathcal{F} auffinden (bis auf äquivalente Modifikation), wo

- a) die Simplexe in \mathcal{F} mit 0-, 1-, 2-, 3-Labellierungen versehen sind;
- b) die mit 3 labellierten Flächen der Simplexe eine pentagonale Fläche eines kombinatorischen Dodekaeders (eventuell von beiden Seiten her) stützen;
- c) die Flächenidentifikationen des Fundamentaltbereiches \mathcal{F} eine solche Gruppe Γ erzeugen, wo alle Stabilisatoren der 0-, 1-, 2-, 3-dimensionalen Simplexelemente endlich sind;
- d) die so gewonnene Gruppe Γ zu der Automorphismengruppe der Pflasterung äquivalent ist.

Schließlich kommen wir zu einem Kriterium über die Realisierung im Bolyai-Lobatschewskischen hyperbolischen Raum H^3 : Die kombinatorische Pflasterung (\mathcal{T}, Γ) muß in H^3 metrisch sein, d.h. mittels einer Bewegungsgruppe Γ realisiert werden können.

Die Forderung der Maximalität hatte die relativ-wenigen Fälle impliziert.

Zum Beispiel ist in Abb. 1.1 die Pflasterung, die zum Fundamentaltbereich $A_0 A_0^2 A_2 A_3$ und der Rotationsgruppe Γ_1 mit D -symbol \mathcal{D}_1 gehört, nicht maximal, wie dies auch die Abbildung $\mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ zeigt. Viele analoge nicht-maximalen Fälle konnten mit Hilfe des Computerprogramms von D. Huson ausgeschlossen werden. Diese Fälle können durch unsere maximalen Pflasterungen auch reproduziert werden.

Damit ist der Hauptsatz vollständig bewiesen. \diamond

Literatur

- [1] BRAUNER, H.: Geometrie Projektiver Räume, I–II, Mannheim: Bibliographisches Institut, 1976.
- [2] BRAUNER, H.: Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie, Springer-Verlag, Wien–New York, 1986.
- [3] COXETER, H. S. M.: Regular honeycombs in hyperbolic space, *Proc. Internat. Congress of Mathematicians* (1956), 155–169.
- [4] DELANEY, M. S.: Quasi symmetries of space group orbits, *Proc. of the ZiF-Conference of Crystallographic groups Match 9* (1980), 73–80.
- [5] DRESS, A. W. M.: Presentations of discrete groups, acting on simply connected manifolds in terms of parametrized systems of Coxeter matrices — A systematic approach, *Advances in Math.* 63 (1987), 196–212.
- [6] DRESS, A. W. M. and HUSON, D. H.: On Tilings of the plane, *Geometriae Dedicata* 24 (1987), 295–310.
- [7] DRESS, A. W. M. – HUSON, D. H. – MOLNÁR, E.: The classification of face-transitive periodic 3D-tilings, *Acta Crystallographica*, (to appear).
- [8] DRESS, A. W. M. und SCHARLAU, R.: Zur Klassifikation äquivarianter Pflasterungen, *Mitteilungen aus dem Math. Seminar Giessen* 164 (1984), *Coxeter-Festschrift*, 83–136.
- [9] GIERING, O.: Vorlesungen über höhere Geometrie, Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1982.
- [10] LUČIĆ, Z. – MOLNÁR, E.: Fundamental domains for planar discontinuous groups and uniform tilings, *Geometriae Dedicata* 40 (1991), 125–143.
- [11] LUČIĆ, Z. – MOLNÁR, E.: Combinatorial classification of fundamental domains of finite area for planar discontinuous isometry groups, *Archiv Math.* 54 (1990), 511–520.
- [12] MOLNÁR, E.: Projective metrics and hyperbolic volume, *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Math.* 32 (1989), 127–157.
- [13] MOLNÁR, E.: Polyhedron complexes with simply transitive group actions and their realizations, *Acta Math. Hung.* 59 (1992), 175–216.
- [14] MOLNÁR, E.: Tetrahedron manifolds and space forms, *Note di Matematica* (Lecce) 10 (1990), 335–346.
- [15] MOLNÁR, E.: Symmetry breakings of the cube tiling and the spatial chess board by D -symbols, *Beiträge Alg. Geom.* (to appear).
- [16] MOLNÁR, E. – PROK, I.: A polyhedron algorithm for finding space groups, *Proc. of Third Int. Conf. on Engineering Graphics and Descriptive Geometry*, Vienna 1988, 2, 37–44.
- [17] MOLNÁR, E. – PROK, I.: Classification of solid transitive simplex tilings in homogeneous simply connected Riemannian 3-spaces I, *Colloquia Math. Soc.*

- J. Bolyai* 63, *Intuitive Geometry*, Szeged (Hungary), 1991, North-Holland, (to appear).
- [18] SCOTT, P.: The geometries of 3-manifolds, *Bull. London Math. Soc.* 15 (1983), 401-487.
- [19] THURSTON, W. P.: Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* 6 (1982), 357-381.
- [20] ZIESCHANG, H. - VOGT, E. - COLDEWEY, H. D.: Surfaces and planar discontinuous groups, *Lect. Notes in Math.* 835, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1980.

LINEAR TOPOLOGICAL CLASSIFICATIONS OF CERTAIN FUNCTION SPACES II

Vesko M. Valov

*Department of Mathematics, Sofia State University, 1126 Sofia,
A. Ivanov 5, Bulgaria*

Received December 1991

AMS Subject Classification: 46 E 10, 54 C 35

Keywords: Linear homeomorphism, function space, manifold.

Abstract: Some linear classification results for the spaces $C_p(X)$ and $C_p^*(X)$ are proved.

0. Introduction

If X is a space then $C_p(X)$ denotes the set of all continuous real-valued functions on X with the topology of pointwise convergence. We write $C_p^*(X)$ for the subspace of $C_p(X)$ consisting of all bounded functions. \mathbb{R} stands for the usual space of real numbers, I for the unit segment $[0, 1]$, Q is the Hilbert cube $[-1, 1]^\omega$ and s is the pseudointerior $(-1, 1)^\omega$ of Q . We will consider also the spaces $\sigma = \{(t_1, t_2, \dots) \in Q : t_i = 0 \text{ for all but finitely many } i\}$ and $\Sigma = \{(t_1, t_2, \dots) \in Q^\omega : t_i = 0 \text{ for all but finitely many } i\}$.

In [11] some linear topological classification results of the spaces $C_p(X)$ and $C_p^*(X)$ are given. Using the ideas of [11] we prove in this paper that $C_p(X) \sim C_p(Y)$ provided Y is one of the spaces σ , Σ , $s \times \Sigma$ and X is a manifold modeled on Y . Here the symbol " \sim " stands for linear homeomorphism. A similar results are also proved for the spaces C_p^* .

1. Preliminaries

All spaces under discussion are Tychonoff and all mappings between topological spaces are continuous. By $L_p(X)$ is denoted the dual linear space of $C_p(X)$ with the weak (i.e., pointwise) topology. It is known that

$$L_p(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i \delta_{x_i} : a_i \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ and } x_i \in X \text{ for each } i \leq k \right\}.$$

Here δ_x is the Dirac measure at the point $x \in X$. We denote

$$P_\infty(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i \delta_{x_i} : a_i \in (0, 1) \text{ for each } i \text{ and } \sum_{i=1}^k a_i = 1 \right\}$$

and $\text{supp}(\ell) = \{x_1, \dots, x_k\}$, where $\ell = \sum_{i=1}^k a_i \delta_{x_i} \in L_p(X)$.

Let A be a closed subset of a space X . Consider the following conditions:

- (i) there is a continuous linear extension operator $u : C_p(A) \rightarrow C_p(X)$ (recall that $u : C_p(A) \rightarrow C_p(X)$ is an extension operator if $u(f)|_A = f$ for every $f \in C_p(A)$);
- (ii) there is a continuous linear extension operator $u : C_p(A) \rightarrow C_p(X)$ and a positive constant c such that $\|u(f)\| \leq c \|f\|$ for every $f \in C_p^*(A)$ (here $\|f\|$ is the supremum norm of f);
- (iii) there is a regular extension operator $u : C_p(A) \rightarrow C_p(X)$ i.e. a continuous linear extension operator u with $u(1_A) = 1_X$ and $u(f) \geq 0$ provided $f \geq 0$.

A is said to be ℓ -embedded (resp., ℓ^* -embedded) in X if the condition (i) (resp., the condition (ii)) holds. If (iii) is satisfied then A is called *strongly ℓ -embedded* in X . Dugundji [5] proved that every closed subset of a metric space X is strongly ℓ -embedded in X (he did not state this explicitly in this form). It is known (see [1], [4]) that A is ℓ -embedded (resp., strongly-embedded) in X if and only if there is a mapping $r : X \rightarrow L_p(A)$ (resp., $r : X \rightarrow P_\infty(A)$) such that $r(x) = \delta_x$ for every $x \in A$. Such a mapping will be called an L_p -valued (resp., a P_∞ -valued) *retraction*. Every L_p -valued retraction $r : X \rightarrow L_p(A)$ defines a continuous linear extension operator $u_r : C_p(A) \rightarrow C_p(X)$ by setting $u_r(f)(x) = r(x)(f)$. If the operator u_r satisfies the condition (ii), r is said to be a *bounded L_p -valued retraction*.

Let $u : C_p(A) \rightarrow C_p(X)$ be a continuous linear extension operator. Then the mapping $v(f, g) = u(f) + g$ is a linear homeomorphism from $C_p(A) \times C_p(X; A)$ onto $C_p(X)$, where

$$C_p(X; A) = \{g \in C_p(X) : g|_A = 0\}.$$

Analogously, if A is ℓ^* -embedded in X then $C_p^*(A) \times C_p^*(X; A)$ is linearly homeomorphic to $C_p^*(X)$.

Let \mathcal{K} be a family of bounded subsets of a space X (i.e. $f|_K$ is bounded for every $K \in \mathcal{K}$ and $f \in C_p(X)$) and E be a linear topological subset of $C_p(X)$. Then we set:

$$(\Pi E)_{\mathcal{K}} = \{(f_1, \dots, f_n, \dots) \in E^\omega : \lim_n \|f_n\|_K = 0 \text{ for every } K \in \mathcal{K}\}$$

and

$$(\Pi E)_{\mathcal{K}}^* = \{(f_1, \dots, f_n, \dots) \in (\Pi E)_{\mathcal{K}} : \sup_n \|f_n\| < \infty\}.$$

$(\Pi E)_{\mathcal{K}}$ and $(\Pi E)_{\mathcal{K}}^*$ are considered as topological linear subspaces of $C_p(X)^\omega$. We write $(\Pi E)_b$ and $(\Pi E)_b^*$ (resp., $(\Pi E)_c$ and $(\Pi E)_c^*$) if \mathcal{K} is the family of all bounded (resp., of all compact) subsets of X . In the above notations $\|f\|_K$ stands for $\sup\{|f(x)| : x \in K\}$. Let us note that if X is pseudocompact and E is a linear subset of $C_p(X)$, the space

$$(\Pi E)_0 = \{(f_1, \dots, f_n, \dots) \in E^\omega : \lim_n \|f_n\| = 0\}$$

is considered in [6].

2. The spaces $C_p(X)$

Lemma 2.1. *Let X be one of the spaces $\sigma, \Sigma, s \times \Sigma$. Then $C_p(X) \sim \sim C_p(X)^\omega \sim C_p(\text{cl}_X(U))$ for every open subset U of X .*

Proof. First we prove that $C_p(X) \sim C_p(X)^\omega$. Consider $X \times N$, where N is a discrete infinite countable space. Then $X \times N$ can be embedded as a closed subset of X (see [3]). Since X is metrizable, $X \times N$ is ℓ -embedded in X . Hence

$$\begin{aligned} C_p(X) &\sim C_p(X \times N) \times C_p(X; X \times N) = C_p(X)^\omega \times C_p(X; X \times N) \sim \\ &\sim C_p(X)^\omega \times C_p(X)^\omega \times C_p(X; X \times N) \sim \\ &\sim C_p(X)^\omega \times C_p(X \times N) \times C_p(X; X \times N) \sim \\ &\sim C_p(X)^\omega \times C_p(X) \sim C_p(X)^\omega. \end{aligned}$$

Now, let U be an open subset of X . Consider the open cover $\gamma = \{U, X - \{x_0\}\}$ of X , where $x_0 \in U$, and the constant map $f : X \rightarrow x_0$.

By ([3], Corollaries 6.1, 6.2, 6.3) there is a closed embedding $h : X \rightarrow X$ such that f and h are γ -close i.e. for every $x \in X$ there is $V \in \gamma$ with $h(x), f(x) \in V$. Since $f(x) = x_0 \bar{\in} X - \{x_0\}$ for any $x \in X$ we have $h(x) \subset U$. Hence, $h(X)$ is a copy of X which is closed in $\text{cl}_X(U)$. Then

$$\begin{aligned} C_p(\text{cl}_X(U)) &\sim C_p(h(X)) \times C_p(\text{cl}_X(U); h(X)) \sim \\ &\sim C_p(X) \times C_p(\text{cl}_X(U); h(X)). \end{aligned}$$

On the other hand $\text{cl}_X(U)$ is closed in X , so

$$C_p(X) \sim C_p(\text{cl}_X(U)) \times C_p(X; \text{cl}_X(U)).$$

Hence,

$$\begin{aligned} C_p(\text{cl}_X(U)) &\sim C_p(X) \times C_p(\text{cl}_X(U); h(X)) \sim \\ &\sim C_p(X)^\omega \times C_p(\text{cl}_X(U); h(X)) \sim \\ &\sim C_p(X)^\omega \times C_p(X) \times C_p(\text{cl}_X(U); h(X)) \sim \\ &\sim C_p(X)^\omega \times C_p(\text{cl}_X(U)) \sim \\ &\sim (C_p(\text{cl}_X(U)) \times C_p(X; \text{cl}_X(U)))^\omega \times C_p(\text{cl}_X(U)) \sim \\ &\sim C_p(\text{cl}_X(U))^\omega \times C_p(X; \text{cl}_X(U))^\omega \sim \\ &\sim (C_p(\text{cl}_X(U)) \times C_p(X; \text{cl}_X(U)))^\omega \sim C_p(X)^\omega \sim C_p(X). \quad \diamond \end{aligned}$$

Remark 2.2. By similar arguments one can prove that if $X = \ell_2(\tau)$ and U is open in $\ell_2(\tau)$ then $C_p(X) \sim C_p(X)^\tau \sim C_p(\text{cl}_X(U))$. Here $\ell_2(\tau)$ is the Hilbert space of weight $\tau \geq \omega$.

Let f be a mapping from a space X onto a space Y . Recall that a continuous linear operator $C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ is said to be an *averaging operator* for f if $u(h.f) = h$ for every $h \in C_p(Y)$. If f admits a regular averaging operator $u : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ we can define a mapping $r : Y \rightarrow P_\infty(X)$ by the formula $r(y)(g) = u(g)(y)$. The mapping r has the following property [4]: $\text{supp}(r(y))$ is contained in $f^{-1}(y)$ for each $y \in Y$. Conversely, if there is a mapping $r : Y \rightarrow P_\infty(X)$ such that $\text{supp}(r(y)) \subset f^{-1}(y)$ for every $y \in Y$, the formula $u(g)(y) = r(y)(g)$ defines a regular averaging operator u for f . It is easily seen that if u is a regular averaging operator for f , the mapping $v(g) = (u(\dot{g}), g - u(g).f)$ is a linear homeomorphism from $C_p(X)$ onto $C_p(Y) \times E$, where

$$E = \{g - u(g).f : g \in C_p(X)\}.$$

Proposition 2.3. Let $\gamma = \{U_\alpha : \alpha < \tau\}$ be an infinite locally finite functionally open cover of a space X of cardinality τ . Suppose there is

a space Y with $C_p(\text{cl}_X(U_\alpha)) \sim C_p(Y)$ for each $\alpha < \tau$. Then $C_p(X) \sim \sim C_p(Y)^\tau$ provided X contains an ℓ -embedded copy of a topological sum $\sum_{\alpha < \tau} F_\alpha$ such that $C_p(F_\alpha) \sim C_p(Y)$ for every $\alpha < \tau$.

Proof. For every $\alpha < \tau$ take an $f_\alpha \in C_p(X)$ such that $f_\alpha^{-1}(0) = X - U_\alpha$ and $f_\alpha \geq 0$. Without loss of generality we can suppose that $\sum_{\alpha < \tau} f_\alpha = 1$

because γ is a locally finite cover of X . Define $f \in C_p\left(\sum_{\alpha < \tau} \text{cl}_X(U_\alpha)\right)$ such that $f|_{\text{cl}_X(U_\alpha)} = f_\alpha|_{\text{cl}_X(U_\alpha)}$ and consider the natural mapping $p : \sum_{\alpha < \tau} \text{cl}_X(U_\alpha) \rightarrow X$ with all finite preimages. Let $r : X \rightarrow$

$P_\infty\left(\sum_{\alpha < \tau} \text{cl}_X(U_\alpha)\right)$ be defined by $r(x) = \sum\{f(y)\delta_y : y \in p^{-1}(x)\}$. It is easily seen that r is continuous and $\text{supp}(r(x)) \subset p^{-1}(x)$ for every $x \in X$. Thus there is a regular averaging operator $u : C_p\left(\sum_{\alpha < \tau} \text{cl}_X(U_\alpha)\right) \rightarrow$

$C_p(X)$ for p . Hence, $C_p\left(\sum_{\alpha < \tau} \text{cl}_X(U_\alpha)\right) \sim C_p(X) \times E$ where E is a linear subspace of $C_p\left(\sum_{\alpha < \tau} \text{cl}_X(U_\alpha)\right)$. Since $\sum_{\alpha < \tau} F_\alpha$ is ℓ -embedded

in X we have $C_p(X) \sim C_p\left(\sum_{\alpha < \tau} F_\alpha\right) \times C_p\left(X; \sum_{\alpha < \tau} F_\alpha\right)$. Observe that

$C_p\left(\sum_{\alpha < \tau} \text{cl}_X(U_\alpha)\right) \sim \prod_{\alpha < \tau} C_p(\text{cl}_X(U_\alpha)) \sim C_p(Y)^\tau \sim C_p\left(\sum_{\alpha < \tau} F_\alpha\right)$.

Now, using the technique of Pelczynski [9] and Bessega [2] we have

$$C_p(X) \sim C_p\left(\sum_{\alpha < \tau} F_\alpha\right) \times C_p\left(X; \sum_{\alpha < \tau} F_\alpha\right) \sim$$

$$\sim C_p(Y)^\tau \times C_p\left(X; \sum_{\alpha < \tau} F_\alpha\right) \sim$$

$$\sim (C_p(Y)^\tau \times \dots C_p(Y)^\tau \times \dots) \times C_p(Y)^\tau \times C_p\left(X; \sum_{\alpha < \tau} F_\alpha\right) \sim$$

$$\sim (C_p(Y)^\tau \times \dots C_p(Y)^\tau \times \dots) \times C_p(X) \sim$$

$$\sim (C_p(X) \times E \times \dots C_p(X) \times E \dots) \times C_p(X) \sim C_p(X)^\omega \times E^\omega \sim$$

$$\sim (C_p(X) \times E)^\omega \sim C_p \left(\sum_{\alpha < \tau} \text{cl}_X(U_\alpha) \right)^\omega \sim C_p(Y)^{\omega \cdot \tau} = C_p(Y)^\tau \cdot \diamond$$

Theorem 2.4. *Let X be a metrizable space of weight $\tau \geq \omega$. Suppose X admits an open cover by sets homeomorphic to open subsets of Y , where Y is one of the spaces $\sigma, \Sigma, s \in \Sigma, \ell_2(\tau)$. Then $C_p(X) \sim C_p(Y)^\tau$.*

Proof. Since every point of Y does not contain a compact neighbourhood in Y the space X can not be compact. So there is a locally finite open cover $\{U_\alpha : \alpha < \tau\}$ of X of cardinality τ such that $\text{cl}_X(U_\alpha)$ is a regularly closed subset of Y for every $\alpha < \tau$. On the other hand X contains as a closed subset a topological sum $\sum_{\alpha < \tau} F_\alpha$ of regularly closed subsets F_α of Y . Then, by Lemma 2.1 and Remark 2.2, $C_p(\text{cl}_X(U_\alpha)) \sim C_p(F_\alpha) \sim C_p(Y)$ for every $\alpha < \tau$. Hence, by Prop. 2.3 $C_p(X) \sim C_p(Y)^\tau$. \diamond

Remark 2.5. $C_p(\Sigma)$ is not homeomorphic to $C_p(s \times \Sigma)$ and $C_p(\sigma)$ is not linearly homeomorphic to $C_p(\Sigma)$.

The first assertion follows from the observation that Σ is σ -compact and $s \times \Sigma$ is not σ -compact and the following result of Okunev [7]: if $C_p(X)$ and $C_p(Y)$ are homeomorphic and X is σ -compact then Y is also σ -compact.

Assume $C_p(\Sigma) \sim C_p(\sigma)$. By a result of Pestov [10] we have $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$ such that:

- (i) each Y_i is closed in Σ ;
- (ii) for any i and any $y \in Y_i$ there is an open neighbourhood V of y in Y_i such that V is a union of finitely many its closed subspaces A_k which can be embedded in σ .

Since Σ contains a copy of Q , there is an m such that Y_m also contains a copy of Q i.e. $Q \subset Y_m$. It follows from (ii) that for every $y \in Q \subset Y_m$ there exists an open neighbourhood V of y in Q with $V = \bigcup_{k=1}^n A_k$, where each A_k is closed in V and can be embedded in σ . But V is a complete metric space, so $\text{Int}_V(A_{k'}) \neq \emptyset$ for some k' . Thus $A_{k'}$, contains a copy of Q . Consequently σ contains also a copy of Q . Hence Q is a union of countably many finite-dimensional compacta because σ is a such space. It is well known that this is not possible. Therefore $C_p(\Sigma)$ is not linearly homeomorphic to $C_p(\sigma)$. \diamond

3. The spaces $C_p^*(X)$

Lemma 3.1. [11]. *Suppose X is a metric space. Then $C_p^*(X; \times I) \sim \sim (\Pi C_p^*(X \times I))_c^*$.*

Corollary 3.2. *Let X be one of the spaces σ , Σ , $s \times \Sigma$, $\ell_2(\tau)$. If $Y = \sum_{\alpha < \lambda} X$ is a topological sum of λ many copies of X , where $\lambda \geq \omega$, then $C_p^*(Y) \sim (\Pi C_p^*(Y))_c^*$*

Proof. Since $X \times I$ is homeomorphic to X we have that $Y \times I$ is homeomorphic to Y . Thus, by Lemma 3.1,

$$C_p^*(Y) \sim C_p^*(Y \times I) \sim (\Pi C_p^*(Y \times I))_c^* \sim (\Pi C_p^*(Y))_c^*. \quad \diamond$$

Lemma 3.3. [11]. *Let $\{X_\alpha : \alpha < \tau\}$ be an infinite family of spaces such that each X_α is closed in a metric space Y and contains a closed copy Y_α of Y . Then $C_p^*\left(\sum_{\alpha < \tau} Y_\alpha\right) \sim \left(\Pi C_p^*\left(\sum_{\alpha < \tau} X_\alpha\right)\right)_c^* \sim C_p^*\left(\sum_{\alpha < \tau} X_\alpha\right)$ if $C_p^*\left(\sum_{\alpha < \tau} Y\right) \sim \left(\Pi C_p^*\left(\sum_{\alpha < \tau} Y\right)\right)_c^*$.*

Proposition 3.4. [11]. *Let $\{U_\alpha : \alpha < \tau\}$ be an infinite locally finite functionally open cover of a space X . Suppose there is a space Y such that $C_p^*(Y) \sim C_p^*\left(\sum_{\alpha < \tau} \text{cl}_X(U_\alpha)\right) \sim \left(\Pi C_p^*\left(\sum_{\alpha < \tau} \text{cl}_X(U_\alpha)\right)\right)_c^*$. Then $C_p^*(X) \sim C_p^*(Y)$ if X contains an ℓ^* -embedded copy of Y .*

Theorem 3.5. *Let X be a metrizable space of weight $\tau \geq \omega$. Suppose X admits an open cover by sets homeomorphic to open subsets of Y , where Y is one of the spaces σ , Σ , $s \times \Sigma$, $\ell_2(\tau)$. Then $C_p^*(X) \sim \sim C_p^*\left(\sum_{\alpha < \tau} Y\right)$.*

Proof. Let $\{U_\alpha : \alpha < \tau\}$ be a locally finite open cover of X of cardinality τ such that $\text{cl}_X(U_\alpha)$ is a regularly closed subset of Y for every $\alpha < \tau$. By Cor. 3.2 we have $C_p^*\left(\sum_{\alpha < \tau} Y\right) \sim \left(\Pi C_p^*\left(\sum_{\alpha < \tau} Y\right)\right)_c^*$. Since each set $\text{cl}_X(U_\alpha)$ is closed in Y and contains a closed copy of Y , it follows from Lemma 3.3 that

$$C_p^*\left(\sum_{\alpha < \tau} \text{cl}_X(U_\alpha)\right) \sim \left(\Pi C_p^*\left(\sum_{\alpha < \tau} \text{cl}_X(U_\alpha)\right)\right)_c^* \sim C_p^*\left(\sum_{\alpha < \tau} Y\right).$$

Obviously X contains a closed copy of $\sum_{\alpha < \tau} Y$. Thus, by Prop. 3.4,

$$C_p^*(X) \sim C_p^* \left(\sum_{\alpha < \tau} Y \right). \diamond$$

References

- [1] ARHANGEL'SKIĬ, A. V. and ČOBAN, M. M.: Funkcional'nye vlojenija Tihonovskih protranstv i obobsčennye retracts, Preprint, 1990.
- [2] BESSAGA, C.: On topological classification of complete linear metric spaces, *Fund. Math.* 56 (1965), 251-288.
- [3] BESTVINA, M. and MOGILSKI, J.: Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts, *Michigan Math. J.* 33 (1986), 291-313.
- [4] DRANISHNIKOV, A. N.: Absoljutnye F -značnye retrakty i prostranstva funkcii v topologii potoččnoj shodimosti, *Sib. Mat. J.* 27/3 (1986), 74-86.
- [5] DUGUNDJI, J.: An extension of Tietze's theorem, *Pacif. J. Math.* 1 (1951), 353-367.
- [6] GUL'KO, S. and HMYLEVA, T.: Kompaktnost'ne sohranjaetsja otnošeniem t -ekvivalentnosti, *Mat. Zametki* 39/6 (1986), 895-903.
- [7] OKUNEV, O.: O slaboi topologii soprjajennogo prostranstva i otnošenii t -ekvivalentnosti, *Mat. Zametki* 46/1 (1989), 53-59.
- [8] PAVLOVSKIĬ, D.: On spaces of continuous functions, *Soviet Math. Dokl.* 22 (1980), 34-37.
- [9] PELCZYNSKI, A.: Projections in certain Banach spaces, *Studia Math.* 19 (1960), 209-228.
- [10] PESTOV, V.: The coincidence of the dimension \dim of ℓ -equivalent topological spaces, *Soviet Math. Dokl.* 28 (1982), 380-383.
- [11] VALOV, V.: Linear topological classifications of certain function spaces, *TAMS* 327/2 (1991), 583-600.

ACCELERATION PROPERTIES OF ROBOT-MANIPULATORS

Marie Kargerová

Department of Technical Mathematics, Faculty of Mechanical Engineering, TU Prague, Horská 3, 128 00 Prague 2

Received November 1992

AMS Subject Classification: 53 A 17

Keywords: Robot-manipulators, velocity operator, acceleration operator.

Abstract: The motion of a p -parametrical robot-manipulator is expressed, its velocity and acceleration operators are found. In particular, three parametrical robot-manipulators with only rotational axes are considered. All robot-manipulators of this type, which have one component of Coriolis acceleration equal to zero at each position are found.

1. Introduction

In this paper we shall study the motion of robot-manipulators. We express the axes of a robot-manipulator using Plücker coordinates and we shall calculate the velocity operator and the acceleration operator for instantaneous position of robot-manipulator.

Let us have the Euclidean space E_3 with a system of Cartesian coordinates (x_1, x_2, x_3) . Let $P = A + \lambda \bar{x}$ be a straight line in E_3 . Plücker coordinates $\chi = (\bar{x}; \bar{y})$ of the straight line P consist of the pair $(\bar{x}; \bar{y})$ where \bar{x} is the unit vector of P and $\bar{y} = A \times \bar{x}$.

Let $r(\varphi)$ be a matrix of the revolution around the line $\chi = A + \lambda \bar{x}$ where φ is the angle of revolution. The expression of this revolution is

$$r(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & \gamma \end{pmatrix}$$

where γ is an orthogonal matrix and t is a column matrix. For the

derivative of $r(\varphi)$ we have $r'(\varphi) = r'(0)r(\varphi)$ and we can write the matrix $r'(0)$ in the following form

$$r'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t' & \gamma' \end{pmatrix}$$

where $t'(0) = \bar{y}$, $\gamma'(0) = \bar{x}$. Here we have used the following identification

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \bar{x}.$$

The matrix $r'(0)$ can be identified with Plücker coordinates of the axis of revolution $r(\varphi)$ and we have $r'(0) = \chi = (\bar{x}, \bar{y})$.

A *robot-manipulator* with p -degrees of freedom is a product of p -revolutions around p -axes $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_p$ which are given by their Plücker coordinates $X_i = (\bar{x}_i; \bar{y}_i)$. The motion of the end-effector of this robot-manipulator is expressed by the matrix $g(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p) = r_1(\varphi_1) \cdot r_2(\varphi_2) \dots r_p(\varphi_p)$, where $r_i(\varphi_i)$ is the matrix of the revolution around χ_i . If $\varphi_i = \varphi_i(t)$ are functions of time t we obtain a one-parametric motion of the end-effector $g(t) = r_1(\varphi_1(t)) \cdot r_2(\varphi_2(t)) \dots r_p(\varphi_p(t))$. Trajectory of a point \bar{A} of the end-effector is $A(\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_p) = g(t)\bar{A}$. See [2].

2. Velocity and acceleration operators for robot-manipulators

Let Ω be the *velocity operator* of $g(t)$, θ' be the *acceleration operator* of $g(t)$. This means that $v_A = \Omega A$, $a_A = \theta' A$, where v_A is the velocity of the trajectory of \bar{A} at A and a_A is the acceleration of the trajectory of \bar{A} at A . Computation yields $\Omega = g'g^{-1}$, $\theta' = \Omega' + \Omega^2$. If we express Ω for a p -parametrical robot-manipulator we obtain $\Omega = \sum_{i=1}^p Y_i v_i$ where Y_i is the instantaneous position of i -th axis and v_i is the angular velocity of $r_i(\varphi_i(t))$; $v_i = \frac{d\varphi_i}{dt}$. For the derivative of Ω we have

$$\Omega' = \left(\sum_{i=1}^p Y_i \cdot v_i \right)' = \sum_{i=1}^p Y_i' \cdot v_i + \sum_{i=1}^p Y_i \frac{dv_i}{dt}$$

We can split the acceleration operator into three parts:

- (1) Ω^2 is the centrifugal acceleration;
- (2) $\sum_{i=1}^p Y_i \varepsilon_i$ is the Euler acceleration where $\varepsilon = \frac{dv_i}{dt}$ is the angular

- acceleration of $r_i(\varphi_i(t))$;
- (3) $\sum_{i=1}^p Y_i' v_i = \sum_{i < j=1}^p Y_i \times Y_j v_i v_j$ is the Coriolis acceleration where $Y_i \times Y_j$ is the cross-product of Plücker coordinates of Y_i with Y_j . See [1].

Let us consider the *Coriolis acceleration* for 3-parametric robot-manipulators with rotational axes X_1, X_2, X_3 . Let the instantaneous position of these axes be Y_1, Y_2, Y_3 . Then the Coriolis acceleration C is

$$C = Y_1 \times Y_2 v_1 v_2 + Y_1 \times Y_3 v_1 v_3 + Y_2 \times Y_3 v_2 v_3.$$

Let

$$Y_1 = (\bar{x}', \bar{y}'), Y_2 = (\bar{x}'', \bar{y}''), Y_3 = (\bar{x}''', \bar{y}''').$$

We define $\langle Y_1, Y_2 \rangle = x'y'' + y'x''$ as a scalar product in the 6-dimensional space of Plücker coordinates. Let V_1 denote the vector space generated by Y_1, Y_2, Y_3 and V_2 be its orthogonal complement. It follows that the Coriolis acceleration has two components: C_1 into V_1 , C_2 into V_2 .

Let us find all 3-parametric robot-manipulators with the component $C_1 = 0$ at all positions. Y_1, Y_2, Y_3 is the base of V_1 and therefore we must have

$$(1) \quad \langle Y_1, C \rangle = 0, \quad \langle Y_2, C \rangle = 0, \quad \langle Y_3, C \rangle = 0.$$

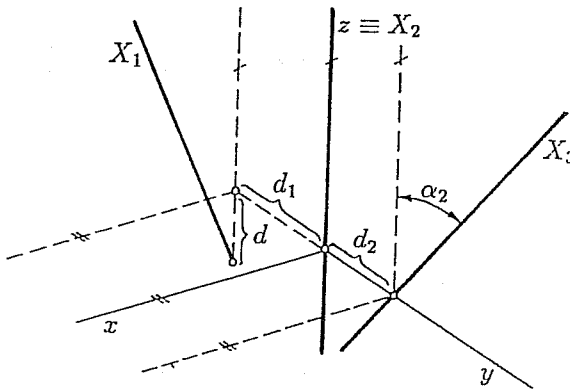


Fig. 1

(1) leads to the equation $\langle Y_1, Y_2 \times Y_3 \rangle = 0$. We shall express this condition in coordinates. Let us choose the coordinate system (see Fig. 1) in the fixed space. The Plücker coordinates of the axes X_1, X_2, X_3 are:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_1 & d_1 \cos \alpha_1 \\ 0 & d \sin \alpha_1 \\ \cos \alpha_1 & d_1 \sin \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_2 & d_2 \cos \alpha_2 \\ 0 & 0 \\ \cos \alpha_2 & d_2 \sin \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

For the instantaneous axes Y_1, Y_2, Y_3 we obtain $Y_1 = X_1, Y_2 = X_2,$

$$Y_3 = \begin{pmatrix} -\cos \varphi_2 \sin \alpha_2 & d_2 \cos \varphi_2 \cos \alpha_2 \\ -\sin \varphi_2 \sin \alpha_2 & d_2 \sin \varphi_2 \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_2 & d_2 \sin \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial Y_3}{\partial \varphi_2} = Y_2 \times Y_3, \quad \frac{\partial \langle Y_1, Y_3 \rangle}{\partial \varphi_2} = \langle Y_1, Y_2 \times Y_3 \rangle = 0.$$

This shows that $\langle Y_1, Y_3 \rangle$ must be constant with respect to φ_2 . Computation yields

$$\begin{aligned} \langle Y_1, Y_3 \rangle = & -d_2 \sin \alpha_1 \cos \varphi_2 \cos \alpha_2 + d_2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \\ & -d_1 \cos \alpha_1 \cos \varphi_2 \sin \alpha_2 + d \sin \alpha_1 \sin \varphi_2 \sin \alpha_2 + d_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2. \end{aligned}$$

The coefficients by $\cos \varphi_2, \sin \varphi_2$ must be zero and therefore we have the following conditions

$$(2) \quad d \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = 0, \quad d_2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + d_1 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 = 0.$$

There are three possibilities for the axes X_1, X_2, X_3 of a 3-parametrical robot-manipulator:

- (a) If $\sin \alpha_1 = 0$, then $d_1 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 = 0$. From $d_1 = 0$ follows that the axes X_1, X_2 coincide.
- (b) From $\sin \alpha_2 = 0$ follows that the axes X_1, X_2, X_3 are parallel.
- (c) If $\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \neq 0$ then $d = 0$.

From (2) we get

$$(3) \quad d_2 \cot \alpha_2 + d_1 \cot \alpha_1 = 0.$$

It means that the axes X_1, X_2, X_3 have a common perpendicular and satisfy the condition (3). From these considerations we see the following

Theorem 3. *3-parametrical robot-manipulators with three rotational axes X_1, X_2, X_3 have the component C_1 of the Coriolis acceleration equal to zero in the following cases:*

- (1) *the axes X_1, X_2 or X_2, X_3 coincide;*
- (2) *the axes X_1, X_2, X_3 are parallel;*
- (3) *the axes X_1, X_2, X_3 have a common perpendicular and satisfy (3).*

Remark. Let X_1, X_2, X_3 be axes of the robot-manipulator from the case (c). Let us denote by \bar{X}_3 the straight line defined analogically to X_3

with the angle α_2 substituted by $-\alpha_2$. Then X_1, \bar{X}_3 are conjugated polars of the linear complex with axis X_2 and parameter $v_0 = d_1 \tan \alpha_1 = -d_2 \tan \alpha_2$.

References

- [1] CRAIG, J. J.: *Introduction to Robotics. Mechanics and Control*, Addison-Wesley Publishing Company, 1986.
- [2] KARGER, A. and NOVÁK, J.: *Space kinematics and Lie groups*, Gordon and Breach. New York-London, 1985.

CORRIGENDUM TO "A CONCRETE ANALYSIS OF THE RADICAL CONCEPT"

B. de la Rosa

University of the Orange Free State, Bloemfontein, South Africa

J. S. van Niekerk

University of the Orange Free State, Bloemfontein, South Africa

R. Wiegandt

*Hungarian Academy of Sciences, H-1364 Budapest, P. O. Box
127, Hungary*

In our paper (Math. Pannonica, 3/2 (1992), 3-15) in the final paragraph of the proof of Th. 4 the sentence "If B has a finitely generated subring $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ (we may assume all x_i are potent elements), \dots , say M ," contains invalid arguments, and must be replaced by: "If B has a finitely generated subring, say V , we may, in view of Lemma 1 in [1], select a maximal element in the set $\{C \triangleleft B : n \in \mathbb{N}, V^n \not\subseteq C\}$ say M ."

Reference

- [1] LEVITZKI, J.: On three problems concerning nil-rings, *Bull. Amer. Math. Soc.* 51 (1945), 913-919.